

УДК 539.3

© 1993 г. А. О. ВАТУЛЬЯН, И. М. СЮНЯКОВА

О КОЛЕБАНИЯХ МАССИВНОЙ ЗАГЛУБЛЕННОЙ ПЛИТЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЫ

В настоящее время достаточно подробно исследованы динамические контактные задачи изотропной и анизотропной теории упругости для массивных и невесомых штампов, лежащих на поверхности среды, моделируемой либо слоем, либо полуплоскостью [1—4]. Задачи такого типа актуальны в фундаментостроении, вибросейсморазведке, при проектировании различных сооружений ответственного назначения, работающих в сложных динамических условиях. Отметим, что в этих ситуациях интегральные уравнения задач легко строятся при помощи интегрального преобразования Фурье. Учет же реального заглубления плиты и анизотропии основания требует иного подхода, базирующегося на методе граничных интегральных уравнений.

В публикуемой работе рассматривается задача об установившихся колебаниях массивного штампа, сцепленного с основанием, представляющим собой ортотропную полуплоскость с неровной границей, в частности, штамп может быть заглублен в полуплоскость на некоторую глубину h .

Отметим, что построенные специальные фундаментальные решения для ортотропной полуплоскости в виде однократных интегралов по контуру σ в комплексной плоскости позволяют сформулировать граничные интегральные уравнения (ГИУ) по конечной части границы полуплоскости, что не требует при реализации метода граничных элементов (МГЭ) привлечения бесконечных элементов [5]. Далее, использование классического варианта МГЭ при простейшей аппроксимации контактных напряжений позволяет свести полученную систему ГИУ к линейной алгебраической системе, причем коэффициенты ее представлены в виде однократных интегралов по контуру σ . Приведены результаты расчетов для различных частот в зависимости от числа используемых элементов.

1. Постановка задачи о колебаниях массивного тела на поверхности анизотропной среды. Рассмотрим задачу о колебаниях массивного тела массы m на поверхности упругой ортотропной среды, граница которой ∂S лишь в конечной части ∂S_1 отличается от границы полуплоскости $x_3 = 0$, а контакт тела с ∂S_1 осуществляется в области $\partial S_2 \subset \partial S_1$, которые не изменяются во времени. Колебания в среде могут вызываться как силами, приложенными к телу, равнодействующая которых $\underline{P} = (p_1, p_3)$, так и массовыми силами $\underline{F} = (f_1, f_3)$ с носителем в ограниченной области S_0 . Будем считать, что в области ∂S_2 имеет место полное сцепление тела со средой.

После отделения временного множителя $\exp(-i\omega t)$ получим, что задача имеет вид

$$L_{ij}u_j + \rho\omega^2 u_i + f_i = 0 \quad (i, j = 1, 3) \quad (1.1)$$

$$L_{11} = C_{11}\partial_1^2 + C_{55}\partial_3^2, \quad L_{33} = C_{55}\partial_1^2 + C_{33}\partial_3^2$$

$$L_{13} = L_{31} = (C_{13} + C_{55})\partial_1\partial_3, \quad \partial_i = \partial/\partial x_i$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0, \quad x \in \partial S/\partial S_1 \quad (1.2)$$

$$\sigma_{ij}n_j = 0, \quad x \in \partial S_1/\partial S_2$$

$$u_i = u_{ib} \quad (i = 1, 3), \quad x \in \partial S_2$$

где C_{ij} — упругие постоянные, n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали на ∂S_1 .

Смещение тела u_{ib} находится согласно

$$u_{1b} = a_1 + \varphi x_{3b}, \quad u_3 = a_3 - \varphi x_1 \quad (1.3)$$

где a_1, a_3, φ определяются из уравнений движения твердого тела

$$m\omega^2 a_k = \int_{\partial S_2} \sigma_{kj} n_j dl_x - p_k \quad (k = 1, 3)$$

$$J\omega^2 \varphi = \int_{\partial S_2} ((x_3 - \delta) \sigma_{1j} - x_1 \sigma_{3j}) n_j dl_x \quad (1.4)$$

Здесь m — масса плиты, J — ее момент инерции относительно центра масс, δ — расстояние от центра масс до прямой $x_3 = 0$. Замыкают постановку задачи условия излучения на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [1].

2. Формулировка системы ГИУ. Ключевым моментом при сведении краевой задачи (1.1) — (1.4) к системе ГИУ является построение специального фундаментального решения в полуплоскости $x_3 \leq 0$. Отметим, что фундаментальные решения в изотропном случае для неограниченной среды выражаются через функции Ханкеля [5], и если использовать их для формулировки ГИУ, то получатся ИУ с бесконечными пределами интегрирования, что в свою очередь при их дискретизации потребует привлечения бесконечных элементов. Чтобы избежать этого, построим специальные фундаментальные решения в полуплоскости $x_3 \leq 0$, удовлетворяющие некоторым граничным условиям.

Итак, под специальными фундаментальными решениями будем понимать функции $U_i^{(m)}(x, \xi)$, являющиеся решениями уравнений (1.1) для $f_i = \delta_{im} \delta(x, \xi)$ и удовлетворяющие граничным условиям

$$\sigma_{13}^{(m)} = \sigma_{33}^{(m)} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = 0 \quad (2.1)$$

Отметим, что фундаментальные решения для ортотропной полуплоскости, удовлетворяющие условиям излучения и граничным условиям (2.1) построены в [6] при помощи преобразования Фурье и представимы в форме

$$U_j^{(m)}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi C_{55}} \int \left\{ \sum_{s=1}^2 [P_{jm}^{(1)}(\beta, \mu_s) + P_{jm}^{(2)}(\beta, \mu_s) \operatorname{sgn}(\xi_3 - x_3)] \right.$$

$$\left. \exp[-k\mu_s |\xi_3 - x_3|] + \sum_{l=1}^2 P_{jm}^{(3)}(\beta, \mu_s, \mu_l) \exp[k(\mu_s \xi_3 + x_3 \mu_l)] \right\}$$

$$\exp[ik\beta(\xi_1 - x_1)] d\beta, \quad k^2 = \rho\omega^2/C_{33} \quad (2.2)$$

Рассчитанные на основе (2.2) компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{nj}^{(m)}(x, \xi) = \frac{k}{4\pi\gamma_5} \int \left\{ \sum_{s=1}^2 [q_{njm}^{(1)}(\beta, \mu_s) + q_{njm}^{(2)}(\beta, \mu_s) \operatorname{sgn}(\xi_3 - x_3)] \exp[-k\mu_s |\xi_3 - x_3|] + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^2 q_{njm}^{(3)}(\beta, \mu_s, \mu_l) \exp[k(\mu_s \xi_3 + x_3 \mu_l)] \right\} \exp[ik\beta(\xi_1 - x_1)] d\beta \quad (2.3)$$

В представлениях (2.2), (2.3) $\mu_s (s = 1, 2)$ — корни уравнения

$$\gamma_5 \mu^4 - \mu^2 [(\gamma_1 - 2\gamma_5 \gamma_7 - \gamma_7^2) \beta^2 - (1 + \gamma_5)] + (\gamma_1 \beta^2 - 1)(\gamma_5 \beta^2 - 1) = 0$$

$$\gamma_1 = C_{11}/C_{33}, \quad \gamma_5 = C_{55}/C_{33}, \quad \gamma_7 = C_{13}/C_{33} \quad (2.4)$$

удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} \mu_s > 0$ (если $\operatorname{Re} \mu_s = 0$, то $\operatorname{Im} \mu_s < 0$ в соответствии с условиями излучения), $P_{jm}^{(1)}, P_{jm}^{(2)}, q_{njm}^{(1)}, q_{njm}^{(2)}$ — функции, аналитические в комплексной плоскости, за исключением точек ветвления $\beta = \pm \gamma_1^{-1/2}, \pm \gamma_3^{-1/2}$, лежащих на вещественной оси и двух пар точек ветвления, определяемых из условия равенства нулю дискриминанта уравнения (2.4); при этом возможны различные ситуации в зависимости от сочетания упругих констант [7], $P_{jm}^{(3)}$ и $q_{kjm}^{(3)}$, кроме того, имеют резонансные полюса $\pm \beta_j$ на вещественной оси.

Контур σ в соответствии с принципом предельного поглощения всюду совпадает с вещественной осью, за исключением вещественных точек ветвления и вещественных полюсов, которые обходятся следующим образом: положительные особенности обходятся снизу, а отрицательные сверху.

На основании теоремы взаимности [5] поле перемещений внутри упругой области находится на основании соотношения

$$u_m(\xi) = \int_S U_i^{(m)}(x, \xi) f_i(x) dS_x + \int_{\partial S} \sigma_{ij}(x) n_j(x) U_i^{(m)}(x, \xi) dl_x - \int_{\partial S_1} \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) n_j(x) u_i(x) dl_x, \quad \xi \in S \quad (2.5)$$

Устремляя точку $\xi \rightarrow y \in \partial S_1$ и вычисляя предельные значения возникающих интегралов, получим

$$d_{mi}(y) u_i(y) = \int_S U_i^{(m)}(x, y) f_i(x) dS_x + \int_{\partial S} \sigma_{ij}(x) n_j(x) U_i^{(m)}(x, y) dl_x - \int_{\partial S_1} \sigma_{ij}^{(m)}(x, y) n_j(x) u_i(x) dl_x \quad (m = 1, 3), \quad y \in \partial S_1 \quad (2.6)$$

где $d_{mi}(y) = 1/2 \delta_{mi}$ для регулярной точки y и выражается в виде однократного интеграла для нерегулярной точки. Заметим также, что в случае, когда граница ∂S_1 расположена на вещественной оси (задача для штампа, лежащего на поверхности полуплоскости) $d_{mi} = \delta_{mi}$, ибо в этом случае в (2.5) и (2.6) отсутствует последний интеграл в силу граничных условий (2.1).

Таким образом, исходная краевая задача сводится к системе интегральных уравнений относительно контактных давлений $t_s = \sigma_{sj} n_j$, $x \in \partial S_2$, компонент вектора смещений u_i , $x \in \partial S_1 / \partial S_2$ и интегральных характеристик a_i, a_3, φ , характеризующих движение штампа как твердого целого

$$\begin{aligned} \int_{\partial S_2} t_i(x) U_i^{(m)}(x, y) dl_x - \int_{\partial S_1 / \partial S_2} \sigma_{ij}^{(m)}(x, y) n_j(x) u_i(x) dl_x = \\ = - \int_{S_0} f_i(x) U_i^{(m)}(x, y) dS_x + \int_{\partial S_2} \sigma_{ij}^{(m)}(x, y) n_j(x) (a_i + \mathcal{E}_{2i} x_j \varphi) dl_x + g_m(y) \\ g_m(y) = d_{mi}(y) u_i(y), \quad y \in \partial S_1 / \partial S_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$g_m(y) = d_{mi}(y) (a_i + \mathcal{E}_{2in} y_n \varphi), \quad y \in \partial S_2$$

$$m \omega^2 a_j = \int_{\partial S_2} t_j(x) dl_x - p_j \quad (j = 1, 3), \quad J \omega^2 \varphi = \int_{\partial S_2} ((x_3 - \delta) t_1 - x_1 t_3) dl_x$$

где $\mathcal{E}_{mjl}$ — тензор Леви — Чивита. Отметим, что интегралы с ядрами (2.3) понимаются в смысле главного значения по Коши [5].

3. Дискретизация системы ГИУ и численные результаты. Рассмотрим практически важный случай, когда массивный штамп прямоугольной формы длины $2a$ заглублен на величину h в ортотропную полуплоскость, а колебания вызываются сосредоточенной в точке (x_{10}, x_{30}) нагрузкой с составляющими T_i . Тогда

$\partial S_1 = \partial S_2$ и в (2.7) пропадает интеграл по $\partial S_1 / \partial S_2$. Осуществим дискретизацию системы (2.7) в этих предположениях путем разбиения границы ∂S_1 на N прямолинейных элементов ($N = 2N_1 + N_2$, N_1 — число элементов на основании). Будем считать [5], что неизвестные величины контактных усилий постоянны на каждом из элементов и равны значению в середине отрезка разбиения. Полагая далее $y = (y_{1p}, y_{3p})$ ($p = 1, 2, \dots, N$), где (y_{1p}, y_{3p}) — середина p -го элемента, получим линейную алгебраическую систему относительно узловых неизвестных $X_{1q} = t_1(\dot{y}_q)$ ($\partial S_{1q} = l_q$):

$$d_{lmp}^{(1)} a_l + d_{mp}^{(2)} \varphi + \sum_{q=1}^N A_{mjpa}^{(1)} X_{jq} = E_{mp} \quad (m = 1, 3; p = 1, 2, \dots, N)$$

$$m\omega^2 a_j - \sum_{q=1}^N S_{0q} X_{jq} = -p_j, \quad J\omega^2 \varphi - \sum_{q=1}^N ((S_{1q} - \delta S_{0q}) X_{1q} - S_{3q} X_{3q}) = 0 \quad (3.1)$$

$$S_{0q} = \int_{l_q} dl_x, \quad S_{1q} = \int_{l_q} x_3 dl_x, \quad S_{3q} = \int_{l_q} x_1 dl_x$$

$$A_{mjpa}^{(1)} = \int_{l_q} U_j^{(m)}(x, y_p) dl_x, \quad A_{mjpa}^{(2)} = \int_{l_q} \sigma_{jr}^{(m)}(x, \dot{y}_p) n_{rq} dl_x$$

$$d_{lmp}^{(1)} = -\frac{1}{2} \delta_{lm} - \sum_{q=1}^N A_{mlpq}^{(2)} \quad (3.2)$$

$$d_{mp}^{(2)} = -\frac{1}{2} \Theta_{m2n} y_{np} - \sum_{q=1}^N A_{mlpq}^{(2)} \Theta_{2l} y_{lp}, \quad F_{mp} = -T_l U_i^{(m)}(x_0, y_p)$$

При численной реализации в силу того, что фундаментальные решения $U_j^{(m)}(x, \xi)$ и $\sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)$ не имеют явного представления, как в классическом варианте МГЭ, коэффициенты $A_{mjpa}^{(1)}$ и $A_{mjpa}^{(2)}$ представимы в виде двукратных интегралов; однако при этом оказывается, что в явном виде можно осуществить интегрирование по q -му элементу, как это осуществлено в [8], введя предварительно на нем параметризацию $x_1 = y_{1q} + \beta_{1q}t$, $x_3 = y_{3q} + \beta_{3q}t$, $t \in [-1, 1]$, и представить эти коэффициенты в виде однократных интегралов по контуру σ :

$$A_{mjpa}^{(n)} = \frac{1}{4\pi\gamma_s} d_n \int_{\sigma} \sum_{s=1}^2 \{ P_{jmlq}^{(n)}(\mu_s) I_{3pqs} + P_{jmlq}^{(n)}(\mu_s) I_{4pqs} +$$

$$+ \sum_{l=1}^2 P_{jmlq}^{(n)}(\mu_s, \mu_l) I_{5ql} \exp[k(\mu_s y_{3p} + y_{3ql} \mu_l)] \exp[ik\beta(y_{1p} - y_{1q})] d\beta \quad (3.3)$$

$$P_{jmlq}^{(1)} = P_{jmlq}^{(i)}, \quad P_{jmlq}^{(2)} = q_{j\beta m}^{(i)} \beta_{1q} - q_{jlm}^{(i)} \beta_{3q} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$d_1 = \Delta_q / C_{33}, \quad d_2 = k, \quad \kappa = ka$$

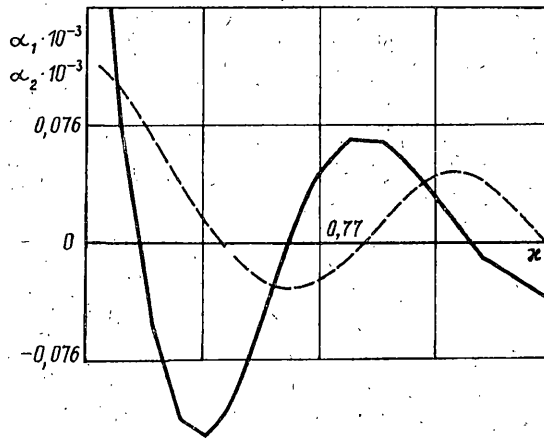
$$I_{rpqs} = I_r(k\beta\beta_{1q}, k\mu_s(y_{3p} - y_{3q}), k\mu_s\beta_{3q}) \quad (r = 3, 4)$$

$$I_{5ql} = I_5(k\beta\beta_{1q}, k\mu_l\beta_{3q}), \quad \Delta_q = (\beta_{1q}^2 + \beta_{3q}^2)^{1/2}$$

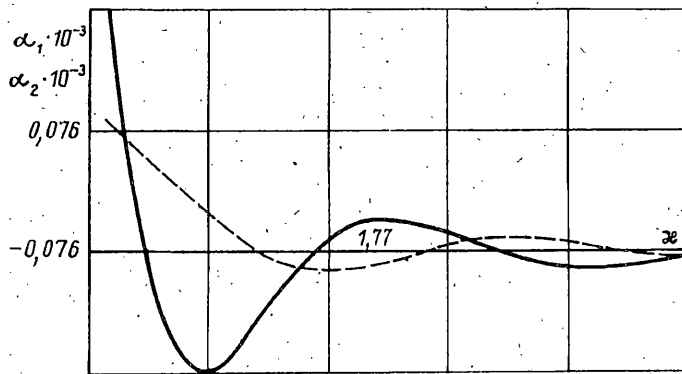
$$I_3(a_1, a_2, a_3) = \varphi_+(a_1, a_2, a_3) - \varphi_-(a_1, a_2, a_3) + (t_+ - t_-) \varphi(a_1, a_2, a_3) a_3$$

$$I_4(a_1, a_2, a_3) = \varphi_+(a_1, a_2, a_3) t_+ - \varphi_-(a_1, a_2, a_3) t_- + ia_1(t_+ - t_-) \varphi(a_1, a_2, a_3)$$

$$I_5(a_1, a_2) = \frac{1}{a_2 - ia_1} (\exp[a_2 - ia_1] - \exp[-a_2 + ia_1])$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\varphi_{\mp}(a_1, a_2, a_3) = \exp[-|a_2 \pm a_3| \pm ia_1]/(a_3 t_{\mp} - ia_1)$$

$$\varphi(a_1, a_2, a_3) = \exp[\xi] [a_3^2 t_+ t_- - ia_1 a_3 (t_+ + t_-) - a_1^2]^{-1}$$

$$t_{\mp} = \operatorname{sgn}(a_2 \pm a_3), \quad \xi = a_1 a_2 / a_3$$

Разрешив систему (3.1) относительно неизвестных X_{jq} , a_j , φ , находим узловые напряжения и интегральные характеристики колебаний.

Составлена программа, реализующая указанный алгоритм, причем интегрирование в (3.3) по контуру σ проводится при помощи квадратурных формул Гаусса с 16 узлами; отметим, что интегрирование осуществляется сразу для всей матрицы системы. Серия расчетов при различных частотах и разном числе элементов ($\kappa = 0, 1-4$, $N = 4-15$) показала достаточную эффективность метода. Отметим, что для нахождения a_1 , a_3 , φ с погрешностью не выше 5% требовалось, как правило, от 7 до 15 элементов, причем для низких частот $\kappa < 1$ достаточно 7-9 элементов, однако для стабильного нахождения узловых напряжений требуются гораздо более мелкие разбиения.

Исследовано влияние заглубления на амплитудно-частотные характеристики для следующих значений параметров; $a = 25$ м, $C_{11} = 4,9$; $C_{33} = 5,2$; $C_{13} = 1,25$; $C_{55} = 4,2 (\cdot 10^9 \text{ Н/м}^2)$; $T_1 = 0$, $T_3 = 100$ т/м; $m = 70$ т; $J = 1,52 \cdot 10^7 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $x_{10} = 0$; $x_{30} = -50$ м.

На фиг. 1 приведены зависимости $\alpha_1 = \operatorname{Re} a_3$ (сплошная линия), $\alpha_2 = \operatorname{Im} a_3$

(штриховая линия) от κ ($a_1 = 0$, $\varphi = 0$) при $h = 0$ (поверхностное расположение плиты). На фиг. 2 приведены эти же зависимости при $h = 4$ м.

Отметим, что максимум вертикальных смещений плиты в обоих случаях наблюдается при $\kappa = 0,9$, однако амплитудное значение для заглубленной плиты в 1,7 раза меньше, чем для поверхностной. Кроме того, если для поверхностной плиты характерно обращение в нуль $\operatorname{Re} a_3$ там, где $\operatorname{Im} a_3$ достигает экстремума, то для заглубленной плиты между этими точками имеется существенный сдвиг по фазе. Отметим, что с ростом заглубления h эти особенности становятся более выраженными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворович И. И., Бабишко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. Ватульян А. О. Контактная задача со сцеплением для анизотропного слоя//ПММ, 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 727—734.
3. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка, 1976. 283 с.
4. Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М. Динамические свойства упругой полуограниченной среды, контактирующей с упругим инерционным элементом//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 128—133.
5. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М., Мир, 1984. 494 с.
6. Ватульян А. О., Гусева И. А., Сюнякова И. М. О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применениях//Изв. СКНЦ ВШ. Сер. Естествен. науки. 1989. Вып. 2. С. 81—86.
7. Будаев В. С. Корни характеристического уравнения и классификация упругих анизотропных сред//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 33—40.
8. Ватульян А. О., Кацевич А. Я. Колебания ортотропного слоя с полостью//ПМТФ. 1991. № 1. С. 95—97.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
8.V.1992