МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1993

УДК 539.3

 В. В. МИХАСЬКИВ, В. З. СТАНКЕВИЧ, М. В. ХАЙ

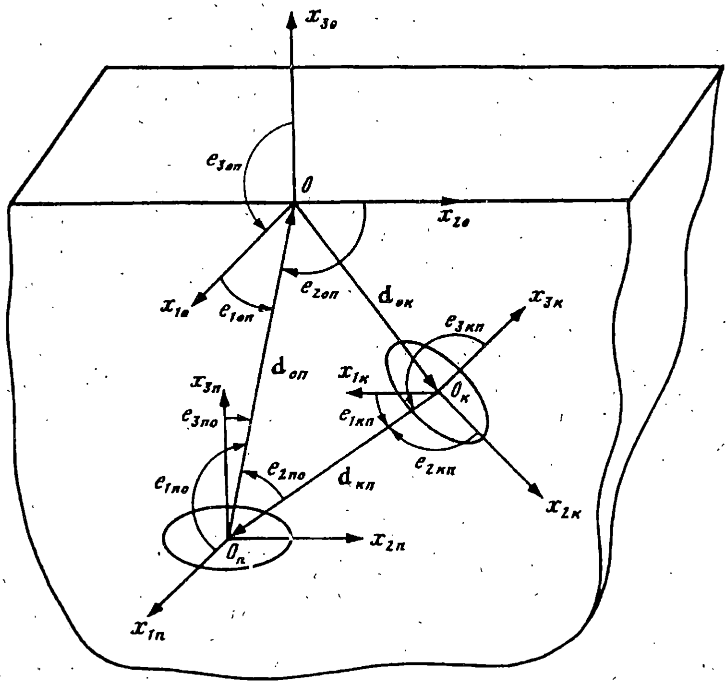
ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПЛОСКИМИ ТРЕЩИНАМИ

Полупространство с трещинами является наиболее простым объектом, позволяющим аналитически исследовать взаимодействие трещин с границей тела. Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) показал свою достаточную эффективность при аналитическом исследовании взаимодействия трещин в бесконечном теле [1, 2]. В случае полупространства, при сведении динамических задач к ГИУ, необходимо преодолеть значительные математические трудности при удовлетворении граничных условий на его границе, что физически обусловлено взаимодействием дифрагирующих на границе тела продольных и поперечных волн и появлением волны Рэлея.

В публикуемой работе рассматривается установившийся режим нагружения полупространства с трещинами, причем считается, что в процессе деформации тела с трещинами отсутствует частичный контакт их поверхностей. Этого можно достичь посредством предварительного нагружения поверхностей трещин статическими растягивающими нагрузками. Отметим, что ГИУ задач для полупространства с плоскими трещинами при произвольном динамическом процессе нагружения могут быть получены по аналогичной методике с использованием интегрального преобразования Лапласа или Фурье по времени. Исходная задача сведена к решению ГИУ, из которых определяются функции, характеризующие взаимное смещение противоположных поверхностей трещин в процессе деформации рассматриваемого тела и позволяющие достаточно просто определять коэффициенты интенсивности напряжений. При этом существенно используются результаты [1—3].

1. Рассмотрим упругое изотропное полупространство, ослабленное N плоскими произвольно расположенными трещинами (разрезами). Граница полупространства S_0 и противоположные поверхности трещин $S_n^\pm$ $(n = \overline{1, N})$ находятся под действием самоуравновешенных усилий, изменяющихся во времени по гармоническому закону с циклической частотой ω.

Выберем на границе полупространства декартовую систему координат $O_0x_{10}x_{20}x_{30}$ так, чтобы полупространству соответствовала область $x_{30} \leq 0$, и локальные системы координат $O_nx_{1n}x_{2n}x_{3n}$ $(n = \overline{1, N})$ таким образом, чтобы область S_n, которую занимает n-я трещина, содержалась в координатной плоскости $x_{1n}O_nx_{2n}$, а противоположным поверхностям $S_n^\pm$ n-й трещины соответствовали значения $x_{3n} = \pm 0$ (фиг. 1). Тогда расположение трещин в полупространстве полностью определяется заданием направляющих косинусов координатных осей и расстояниями между трещинами и границей полупространства. Обозначим через l_{jkn}, m_{jkn} и n_{jkn} $(k, n = \overline{0, N})$ направляющие косинусы осей O_nx_{jn} в координатной системе $O_kx_{1k}x_{2k}x_{3k}$, которые задаются таблицей. Через d_{kn} обозначим расстояние между началами k-й и n-й координатных систем, а через e_{jkn} направляющие косинусы вектора d_{kn} в k-й системе координат (фиг. 1). Тогда



Фиг. 1

произвольная точка x_n^* с координатами (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}) в n-й системе координат имеет координаты $(x_{1kn}, x_{2kn}, x_{3kn})$ в k-й системе координат, причем

	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}
x_{1k}	l_{1kn}	l_{2kn}	l_{3kn}
x_{2k}	m_{1kn}	m_{2kn}	m_{3kn}
x_{3k}	n_{1kn}	n_{2kn}	n_{3kn}

$$x_{1kn} = d_{kn}e_{1kn} + \sum_{j=1}^{3} l_{jkn}x_{jn}, \quad x_{2kn} = d_{kn}e_{2kn} + \sum_{j=1}^{3} m_{jkn}x_{jn}, \quad x_{3kn} = d_{kn}e_{3kn} + \sum_{j=1}^{3} n_{jkn}x_{jn}, \tag{1.1}$$

Для определения компонент перемещений в полупространстве с трещинами, обусловленных воздействием заданных внешних нагрузок, воспользуемся тем, что в процессе деформации рассматриваемого тела происходит взаимное смещение противоположных поверхностей $S_n^{\pm}$ $(n = \overline{1, N})$ трещин. Функции, характеризующие такое смещение в направлении координатных осей $O_n x_{jn}$ будем обозначать через $\alpha_{jn}(x_n)$, а перемещения точек границы полупространства обозначим в системе координат $O_0x_{10}x_{20}x_{30}$ через $\alpha_{j0}(x_0)$. Тогда амплитудные значения компонент $u_j(x_0^*)$ $(j = 1, 2, 3)$ вектора перемещений в системе координат $O_0x_{10}x_{20}x_{30}$, обусловленные заданными внешними нагрузками, можно определить по формулам

$$u_j(x_0^*) = \sum_{k=0}^{N} [u_{1k}(x_{k0}^*) l_{jk0} + u_{2k}(x_{k0}^*) m_{jk0} + u_{3k}(x_{k0}^*) n_{jk0}] \tag{1.2}$$

где $u_{jk}(x_{k0}^*)$ — компоненты вектора перемещений, определяемые через произвольные функции $\alpha_{sk}(x_k)$ $(s = 1, 2, 3)$, соотношениями

$$u_{jk}(x_{k0}^*) = \left(1 - \frac{2\omega_1^2}{\omega_2^2}\right)\frac{\partial F_{3k}}{\partial x_{jk}} + \frac{2}{\omega_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x_{3k}\partial x_{jk}}\left[\frac{\partial F_{2k}}{\partial x_{1k}} - \frac{\partial F_{1k}}{\partial x_{2k}} - \frac{\partial F_{3k}}{\partial x_{3k}}\right] -$$

$$-\frac{2}{\omega_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x_{3k}\partial x_{jk}}\left[\frac{\partial P_{2k}}{\partial x_{1k}}-\frac{\partial P_{1k}}{\partial x_{2k}}-\frac{\partial P_{3k}}{\partial x_{3k}}\right]+\delta_{j3}\left[2\frac{\partial P_{3k}}{\partial x_{3k}}+\frac{\partial P_{1k}}{\partial x_{2k}}-\frac{\partial P_{2k}}{\partial x_{1k}}\right]+$$

$$+(1-\delta_{j3})(-1)^j\frac{\partial P_{(3-j)k}}{\partial x_{3k}}\quad (j=1,2,3;\ k=\overline{0,N}) \tag{1.3}$$

$$F_{mk}(x_{k0}^*)=\iint_{S_k}\alpha_{mk}(\xi)\,\Phi_1(x_{k0}^*,\xi)\,d_\xi S,\quad P_{mk}(x_{k0}^*)=\iint_{S_k}\alpha_{mk}(\xi)\,\Phi_2(x_{k0}^*,\xi)\,d_\xi S$$

$$\Phi_j(x_{k0}^*,\xi)=\frac{\exp(i\omega_j|x_{k0}-\xi|)}{|x_{k0}-\xi|},\quad \omega_j=\frac{\omega}{c_j}\quad (j=1,2)$$

где δ_{js} — символ Кронекера, S_k — область, занятая k-й трещиной, S_0 — область, совпадающая с границей полупространства, c_1 и c_2 — скорости распространения в теле продольных и поперечных волн, $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица. Условия излучения Зоммерфельда при пользовании решением в форме (1.2) и (1.3) выполняются тождественно.

Определяя усилия на произвольной площадке тела и приравнивая их на границе к заданным внешним амплитудным значениям нагрузки $N_{jn}(x_n)$ ($n=\overline{0,N}$) получим систему $3(N+1)$ ГИУ относительно функций α_{jk}, через которые определяются решения исходной задачи. Эту систему можно представить в виде

$$\Delta_n(\Delta_n+\omega_2^2)\iint_{S_n}\alpha_{3n}(\xi)\,[\Phi_1(x_n,\xi)-\Phi_2(x_n,\xi)]\,d_\xi S+\frac{\omega_2^2}{4}\iint_{S_n}\alpha_{3n}(\xi)\,\Phi_1(x_n,\xi)\,d_\xi S=$$

$$=N_{3n}^*(x_n),\quad x_n\in S_n$$

$$\Delta_n(\Delta_n+\omega_2^2)\iint_{S_n}\alpha_{(3-j)n}(\xi)\,[\Phi_1(x_n,\xi)-\Phi_2(x_n,\xi)]\,d_\xi S-$$

$$-\frac{\omega_2^4}{4}\iint_{S_n}\alpha_{(3-j)n}(\xi)\,\Phi_2(x_n,\xi)\,d_\xi S+(\omega_1^2-\omega_2^2)\,\Delta_n\iint_{S_n}\alpha_{(3-j)n}(\xi)\,\Phi_1(x_n,\xi)\,d_\xi S-$$

$$-(\Delta_n+\omega_1^2)\frac{\partial}{\partial x_{(3-j)n}}\iint_{S_n}\left[\alpha_{1n}(\xi)\frac{\partial\Phi_1(x_n,\xi)}{\partial x_{1n}}+\alpha_{2n}(\xi)\frac{\partial\Phi_2(x_n,\xi)}{\partial x_{2n}}\right]d_\xi S+$$

$$+\left(\Delta_n+\frac{3\omega_2^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x_{(3-j)n}}\iint_{S_n}\left[\alpha_{1n}(\xi)\frac{\partial}{\partial x_{1n}}+\alpha_{2n}(\xi)\frac{\partial}{\partial x_{2n}}\right]\Phi_2(x_n,\xi)\,d_\xi S=N_{jn}^*(x_n),$$

$$x_n\in S_n\quad (j=1,2,\ n=\overline{0,N}) \tag{1.4}$$

$$N_{jn}^*(x_n)=(-1)^j\left[-\frac{\omega_2^2}{4G}N_{jn}(x_n)+\sum_{k=0}^{N}{}'\iint_{S_k}\sum_{s=1}^{3}\alpha_{sk}(\xi)\,X_{jskn}(x_{kn},\xi)\,d_\xi S\right] \tag{1.5}$$

$$X_{jskn}(x_{kn},\xi)=\mathrm{L}_{jsx}^{(1)kn}[\Phi_1(x_{kn},\xi)]+\mathrm{L}_{jsx}^{(2)kn}[\Phi_2(x_{kn},\xi)]$$

$$\Delta_n=\partial^2/\partial x_{1n}^2+\partial^2/\partial x_{2n}^2\quad (j=1,2,3,\ n=\overline{0,N})$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что в ней опущен член с номером

$k = n$, G — модуль сдвига, а $\mathrm{L}_{jsx}^{\nu(p)kn}$ — дифференциальные операторы, определяемые по формулам

$$\mathrm{L}_{jsx}^{\nu(1)kn} = \left[\delta_{1s} \frac{\partial^2}{\partial x_{2kn} \partial x_{3kn}} - \delta_{2s} \frac{\partial^2}{\partial x_{1kn} \partial x_{3kn}} - \delta_{3s} \left(\Delta_{kn} + \frac{\omega_2^2}{2} \right) \right] \left[- \frac{\nu\omega_1^2}{1-2\nu} + \mathrm{P}_{jx}^{\nu kn} \right]$$

$$\mathrm{L}_{jsx}^{\nu(2)kn} = \delta_{3s} \left\{ (\Delta_{kn} + \omega_2^2) \mathrm{P}_{jx}^{\nu kn} - \omega_2^2 \left[\frac{1}{2} n_{j3kn}^* \frac{\partial^2}{\partial x_{1kn} \partial x_{3kn}} + \frac{1}{2} m_{j3kn}^* \frac{\partial^2}{\partial x_{2kn} \partial x_{3kn}} + n_{j3kn} \frac{\partial^2}{\partial x_{3kn}^2} \right] \right\} -$$

$$- (-1)^s (1 - \delta_{3s}) \left\{ \left[\left(\Delta_{kn} + \frac{\omega_2^2}{2} \right)^2 - \left(\Delta_{kn} + \frac{3\omega_2^2}{4} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_{3kn}^2} \right] (\delta_{2s} m_{j3kn}^* + \delta_{2s} n_{j3kn}^*) + \right.$$

$$+ \left(\Delta_{kn} + \frac{3\omega_2^2}{4} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_{1kn} \partial x_{2kn}} (\delta_{2s} m_{j3kn}^* + \delta_{1s} n_{j3kn}^*) - l_{j3kn}^* \left(\frac{\omega_2^2}{4} + \frac{\partial^2}{\partial x_{(3-s)kn}^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_{3kn} \partial x_{skn}} -$$

$$- \left[l_{j3kn} \left(\delta_{2s} \frac{\omega_2^2}{4} + \frac{\partial^2}{\partial x_{1kn}^2} \right) + m_{j3kn} \left(\delta_{1s} \frac{\omega_2^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{2kn}^2} \right) + n_{j3kn} \left(\frac{\omega_2^2}{2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{3kn}^2} \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial x_{3kn} \partial x_{(3-s)kn}}$$

$$\mathrm{P}_{jx}^{\nu kn} = l_{j3kn} \frac{\partial^2}{\partial x_{1kn}^2} + m_{j3kn} \frac{\partial^2}{\partial x_{2kn}^2} + n_{j3kn} \frac{\partial^2}{\partial x_{3kn}^2} + l_{j3kn}^* \frac{\partial^2}{\partial x_{1kn} \partial x_{2kn}} + m_{j3kn}^* \frac{\partial^2}{\partial x_{2kn} \partial x_{3kn}} +$$

$$+ n_{j3kn}^* \frac{\partial^2}{\partial x_{1kn} \partial x_{3kn}}, \quad \Delta_{kn} = \frac{\partial^2}{\partial x_{1kn}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{2kn}^2} \tag{1.6}$$

Коэффициенты операторов $\mathrm{L}_{jsx}^{\nu(p)kn}$, $\mathrm{P}_{jx}^{\nu kn}$ зависят от геометрических параметров расположения в теле трещин и определяются соотношениями

$$l_{j3kn} = l_{jkn} l_{3kn}, \quad m_{j3kn} = m_{jkn} m_{3kn}, \quad n_{j3kn} = n_{jkn} n_{3kn}$$

$$l_{j3kn}^* = l_{jkn} m_{3kn} + l_{3kn} m_{jkn}, \quad m_{j3kn}^* = m_{jkn} n_{3kn} + m_{3kn} n_{jkn}, \quad n_{j3kn}^* = n_{jkn} l_{3kn} + n_{3kn} l_{jkn} \tag{1.7}$$

Неудобства системы уравнений (1.4) состоят в том, что в них имеется интегрирование по бесконечной области S_0, совпадающей с границей полупространства. Это затрудняет применение для ее решения численных методов. Поэтому важным является понижение размерности этой системы интегральных уравнений путем исключения из нее неизвестных функций $\alpha_{j0}(x)$ с интегрированием по бесконечной области S_0.

2. С этой целью выделим из системы интегральных уравнений (1.4) три интегральных уравнения при $n = 0$. Считая временно функции $\alpha_{jk}(\xi)$ $(k = \overline{1, N})$ известными, полученную систему трех интегральных уравнений для определения $\alpha_{jk}(x_0)$ можно рассматривать как систему интегральных уравнений типа свертки, заданную на бесконечной области S_0. Ее решение может быть получено путем применения двумерного интегрального преобразования Фурье по переменным x_{10} и x_{20}. Решая эту систему уравнений и опуская все промежуточные вычисления, имеем

$$\alpha_{30}(x_0) = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{S_0} N_{30}^*(\eta) K_0(\eta, x_0)\, d_\eta S \tag{2.1}$$

$$\alpha_{j0}(x_0) = -\frac{1}{\pi^2 \omega_2^2} \iint_{S_0} \left\{ -N_{j0}^*(\eta) \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} K_1(\eta, x_0) + N_{(3-j)0}^*(\eta) \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta_j^2} K_2(\eta, x_0) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial^2}{\partial \eta_{(3-j)}^2} K_3(\eta, x_0) + K_4(\eta, x_0) \right] \right\} d_\eta D \quad (j = 1, 2)$$

$$K_m(\eta, x_0) = \int_0^\infty \frac{L_m(\rho)}{R(\rho)} J_0(\rho|\eta - x_0|)\, d\rho$$

$$L_1(\rho) = L_3(\rho) - L_2(\rho), \quad L_0(\rho) = L_2(\rho) = -\rho R_1(\rho)$$

$$L_3(\rho) = -\frac{\rho(\rho^2 - 3\omega_2^2/4)}{R_2(\rho)}, \quad L_4(\rho) = -\frac{\rho(\rho^2 - \omega_2^2/2)^2}{R_2(\rho)}$$

$$L_5(\rho) = \rho^2 L_2(\rho) - \rho^2 L_3(\rho) - 2L_4(\rho)$$

$$R_j(\rho) = (\rho^2 - \omega_j^2)^{1/2}, \quad R(\rho) = (\rho^2 - \omega_2^2/2)^2 - \rho^2 R_1(\rho) R_2(\rho)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя вещественного аргумента нулевого порядка; $R(\rho)$ — функция Рэлея.

Подставляя $\alpha_{j0}(x_0)$ из (2.1) в оставшиеся уравнения (1.4), получим систему $3N$ интегральных уравнений для определения неизвестных функций $\alpha_{jn}(x_n)$ ($n = \overline{1, N}$), характеризующих раскрытие трещин в процессе деформации полупространства. Для приведения этой системы уравнений к виду, не содержащему интегрирования по бесконечной области S_0, необходимо вычислить двумерные интегралы вида

$$I_\lambda(x_0^*, \xi^*, \rho) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_j(x_{0n}^*, z)\, d_{2z}S \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_p(x_{k0}^*(\eta), \xi^*) \frac{\partial^2}{\partial\eta_m \partial\eta_\lambda} J_0(\rho|z - \eta|)\, d_\eta S \qquad (2.2)$$

где x_{0n}^* и ξ^* — точки с координатами $(x_{10n}, x_{20n}, x_{30n})$ и (ξ_1, ξ_2, ξ_3). $\Phi_m(x_{k0}^*(\eta), \xi)$ определяется по формулам (1.3), а зависимость $x_{k0}^*(\eta)$ от переменной интегрирования η дается соотношениями (1.1), если в них положить $n = 0$ и заменить x_{jn} на η_j, полагая при этом $\eta_3 = 0$. После достаточно сложных преобразований формулы для вычисления интегралов (2.2) представляются следующим образом

$$I_\lambda(x_{0n}^*, \xi^*, \rho) = f_{m\lambda}(c_{k0}, s_{k0})\, C_{jp}^{kn}(\rho, x_{0n}^*, \xi^*)\, J_\lambda(\rho r_{k0}) \qquad (2.3)$$

$$C_{jp}^{kn}(\rho, x_{0n}^*, \xi^*) = \frac{\exp(-|x_{30n}| R_j(\rho))}{R_j(\rho)} \cdot \frac{\exp(-|g_{k0}| R_p(\rho))}{R_p(\rho)} \qquad (2.4)$$

$$g_{k0}(\xi^*, x_{0n}) = l_{3k0}A_{k0n} + m_{3k0}B_{k0n} + n_{3k0}E_{k0n}$$

$$r_{k0}(\xi^*, x_{0n}) = [A_{k0n}^2 + B_{k0n}^2 + E_{k0n}^2 - g_{k0}^2]^{1/2}$$

$$c_{k0}(\xi^*, x_{0n}^*) = -(l_{1k0}A_{k0n} + m_{1k0}B_{k0n} + n_{1k0}E_{k0n})/r_{k0}$$

$$s_{k0}(\xi^*, x_{0n}) = -(l_{2k0}A_{k0n} + m_{2k0}B_{k0n} + n_{2k0}E_{k0n})/r_{k0}$$

$$A_{k0n} = e_{1k0}d_{k0} + l_{1k0}x_{10n} + l_{2k0}x_{20n} - \xi_1$$

$$B_{k0n} = e_{2k0}d_{k0} + m_{1k0}x_{10n} + m_{2k0}x_{20n} - \xi_2$$

$$E_{k0n} = e_{3k0}d_{k0} + n_{1k0}x_{10n} + n_{2k0}x_{20n} - \xi_3$$

где $J_\lambda(z)$ — функция Бесселя, $f_{m\lambda}$ — полиномиальная функция переменных c_{k0} и s_{k0}.

С учетом формул (2.3) и (2.4) интегральные уравнения задачи о взаимодействии в полупространстве плоских трещин можно представить в виде

$$\Delta_n (\Delta_n + \omega_2^2) \iint_{S_n} \alpha_{3n} (\xi) [\Phi_1 (x_n, \xi) - \Phi_2 (x_n, \xi)] d_\xi S + \frac{\omega_2^2}{4} \iint_{S_n} \alpha_{3n} (\xi) \Phi_1 (x_n, \xi) d_\xi S +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \iint_{S_n} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{sk} (\xi) K_{3skn} (\xi, x_n) d_\xi S = Q_{3n} (x_n), \quad x_n \in S_n \quad (n = \overline{1, N})$$

$$\Delta_n (\Delta_n + \omega_2^2) \iint_{S_n} \alpha_{(3-j)n} (\xi) [\Phi_1 (x_n, \xi) - \Phi_2 (x_n, \xi)] d_\xi S -$$

$$- \frac{\omega_2^4}{4} \iint_{S_n} \alpha_{(3-j)n} (\xi) \Phi_2 (x_n, \xi) d_\xi S + (\omega_1^2 - \omega_2^2) \Delta_n \iint_{S_n} \alpha_{(3-j)n} (\xi) \Phi_1 (x_n, \xi) d_\xi S -$$

$$- (\Delta_n + \omega_1^2) \frac{\partial}{\partial x_{(3-j)n}} \iint_{S_n} \left[\alpha_{1n} (\xi) \frac{\partial \Phi_1 (x_n, \xi)}{\partial x_{1n}} + \alpha_{2n} (\xi) \frac{\partial \Phi_2 (x_n, \xi)}{\partial x_{2n}} \right] d_\xi S +$$

$$+ \left(\Delta_n + \frac{3\omega_2^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial x_{(3-j)n}} \iint_{S_n} \left[\alpha_{1n} (\xi) \frac{\partial}{\partial x_{1n}} + \alpha_{2n} (\xi) \frac{\partial}{\partial x_{2n}} \right] \Phi_2 (x_n, \xi) d_\xi S +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \iint_{S_n} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{sk} (\xi) K_{jskn} (\xi, x_n) d_\xi S = Q_{jn} (x_n), \quad x_n \in S_n \quad (j = 1, 2) \tag{2.5}$$

$$K_{jskn} (\xi, x_n) = (-1)^{j+1} [(1 - \delta_{nk}) X_{jskn} (\xi, x_n) + \Omega_{jskn} (\xi, x_n)] \tag{2.6}$$

$$Q_{jn} = (-1)^{j+1} \frac{\omega_2^2}{4G} [N_{jn} + T_{jn} (x_n)]$$

Функция $\Omega_{jskn}(\xi, x_n)$ характеризует взаимодействие трещин через границу полупространства. Она определяется через геометрические параметры, характеризирующие расположение трещин в полупространстве по формулам

$$\Omega_{jskn} (\xi, x_{kn}) = \sum_{\lambda, p=1}^{2} \Big\{ \mathrm{L}_{j3x}^{v(\lambda)0n} \mathrm{L}_{3s\xi}^{v(p)k0} [Y_{0kn}^{\lambda p} (\xi^*, x_{0n}^*)] +$$

$$+ \frac{4}{\omega_2^2} \sum_{m=1}^{2} (-1)^m \mathrm{L}_{jmx}^{v(\lambda)0n} \mathrm{L}_{ms\xi}^{v(p)k0} [Y_{1kn}^{\lambda p} (\xi^*, x_{0n}^*) c_{k0} (\xi^*, x_{0n}) s_{k0} (\xi^*, x_{0n})] +$$

$$+ \frac{2}{\omega_2^2} \sum_{m=1}^{2} (-1)^m \mathrm{L}_{jmx}^{v(\lambda)0n} \mathrm{L}_{(3-m)s\xi}^{v(p)k0} [(-1)^m Y_{1kn}^{\lambda p} (\xi^*, x_{0n}^*) [c_{k0}^2 (\xi^*, x_{0n}) - s_{k0}^2 (\xi^*, x_{0n})] +$$

$$+ Y_{5kn}^{\lambda p} (\xi^*, x_{0n}^*)] \Big\}_{\xi_3=0} \tag{2.7}$$

$$Y_{0kn}^{\lambda p} (\xi^*, x_{0n}^*) = \int_0^\infty \frac{L_0 (\rho)}{R (\rho)} C_{\lambda p}^{kn} (\rho, x_{0n}^*, \xi^*) J_0 (\rho r_{k0}) d\rho$$

$$Y_{1kn}^{\lambda p} (\xi^*, x_{0n}^*) = \int_0^\infty \frac{\rho^2 L_1 (\rho)}{R (\rho)} C_{\lambda p}^{kn} (\rho, x_{0n}^*, \xi^*) J_2 (\rho r_{k0}) d\rho$$

$$Y_{5kn}^{\lambda p} (\xi^*, x_{0n}^*) = \int_0^\infty \frac{L_5 (\rho)}{R (\rho)} C_{\lambda p}^{kn} (\rho, x_{0n}^*, \xi^*) J_0 (\rho r_{k0}) d\rho$$

где выражения для операторов $L_{jsx}^{v(\lambda)0n}$ даются формулами (1.6), а дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами $L_{js\xi}^{v(\rho)k0}$ определяются также формулами (1.6), если в них заменить переменные x_{jkn} на ξ_j ($j = \overline{1, 3}$); ξ — точка с координатами (ξ_1, ξ_2, 0), а x_{0n} — точка (x_{10n}, x_{20n}, 0). Функции $T_{jn}(x_n)$ определяются через заданные амплитудные значения внешних нагрузок на границе полупространства соотношениями

$$T_{jn}(x_n) = \sum_{\lambda=1}^{2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Big\{ N_{30}(\eta) \frac{1}{2\pi} L_{\beta x}^{v(\lambda)0n} [D_{0\lambda}(\eta, x_{0n}^*) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{2} \frac{2(-1)^m}{\pi\omega_2^2} L_{jmx}^{v(\lambda)0n} [N_{m0}(\eta) D_{1\lambda}(\eta, x_{0n}^*) + N_{(3-m)0}(\eta) D_{2\lambda}^{(m)}(\eta, x_{0n}^*)]\Big\} d_\eta S$$

$$D_{0\lambda}(\eta, x_{0n}^*) = \int_0^\infty \frac{L_0(\rho)}{R(\rho)} D_\lambda(\eta, \rho, x_{0n}^*) d\rho, \quad D_{1\lambda}(\eta, x_{0n}^*) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_{10n} \partial x_{20n}} \int_0^\infty \frac{L_1(\rho)}{R(\rho)} D_\lambda(\eta, \rho, x_{0n}^*) d\rho \tag{2.8}$$

$$D_{2\lambda}^{(m)}(\eta, x_{0n}^*) = \int_0^\infty \frac{1}{R(\rho)} \left[L_2(\rho) \frac{\partial^2}{\partial x_{m0n}^2} + L_3(\rho) \frac{\partial^2}{\partial x_{(3-m)0n}^2} + L_4(\rho) \right] D_\lambda(\eta, \rho, x_{0n}^*) d\rho$$

$$D_\lambda(\eta, \rho, x_{0n}^*) = \frac{\exp(-|x_{30n}| R_\lambda(\rho))}{R_\lambda(\rho)} J_0(\rho |x_{0n} - \eta|)$$

Здесь $L_j(\rho)$ имеют вид (2.1), а операторы $L_{jmx}^{v(\lambda)0n}$ определяются по формулам (1.6).

Системой ГИУ (2.5) описывается взаимодействие трещин в полупространстве, обусловленное заданными установившимися внешними нагрузками на границе полупространства и на поверхностях трещин. Она является системой $3N$ двумерных интегральных уравнений типа потенциала Гельмгольца для определения функций α_{jn} ($j = 1, 2, 3$; $n = \overline{1, N}$), характеризующих раскрытие трещин в процессе деформации тела. Поэтому при решении ГИУ (2.5) необходимо определить обращающееся в нуль на контурах областей S_n ($n = \overline{1, N}$) ее решение. Ограниченность областей интегрирования в системе (2.5), в отличие от системы (1.4), существенна с точки зрения применения численно-аналитических методов для ее решения.

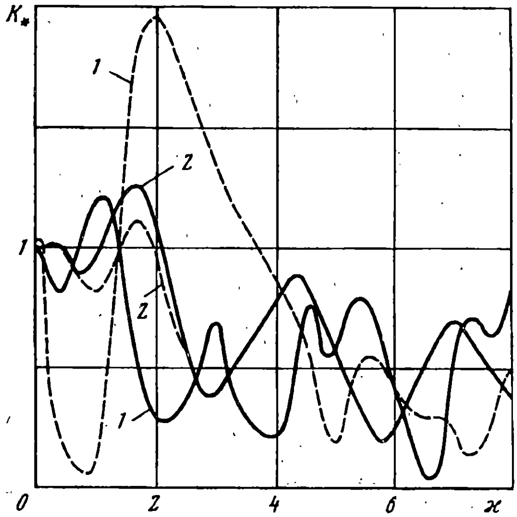
Система ГИУ (2.5) может быть использована также для исследования напряженно-деформированного состояния полупространства с трещинами при произвольных во времени внешних динамических нагрузках. При этом необходимо дополнительно воспользоваться результатами работы [4].

3. В качестве примера рассмотрим случай, когда в полупространстве имеется лишь одна плоская трещина, которая перпендикулярна к свободной от внешних усилий границе полупространства, а ее поверхности нагружены нормальными внешними усилиями $N_3(x, t) = N(x)e^{-i\omega t}$. Касательные усилия $N_1(x, t)$ и $N_2(x, t)$ равны нулю.

При таком нагружении и расположении трещины в полупространстве из системы ГИУ следует, что функции $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) = 0$, а интегральное уравнение для определения функции $\alpha_3(x) = \alpha(x)$ приводится к виду

$$\iint_S \alpha(\xi) \left[K_1(x, \xi) \frac{\exp(i\omega_1 |x - \xi|)}{|x - \xi|^5} - K_2(x, \xi) \frac{\exp(i\omega_2 |x - \xi|)}{|x - \xi|^5} \right] d_\xi S +$$

$$+ \iint_S \alpha(\xi) \left[K_1(y, \xi) \frac{\exp(i\omega_1 |y - \xi|)}{|y - \xi|^5} - K_2(y, \xi) \frac{\exp(i\omega_2 |y - \xi|)}{|y - \xi|^5} \right] d_\xi S -$$



Фиг. 2

$$-2\omega_2^3 \iint_S \alpha(\xi) \int_0^\infty \frac{\rho(\rho^2-c^2)^{1/2}}{(\rho^2-1/2)^{1/2}-\rho^2[(\rho^2-1)(\rho^2-c^2)]^{1/2}}\, \Omega(\rho, \xi, x, \omega_2)\, d\rho d_\xi S =$$

$$= \frac{\omega_2^2}{4G} N(x) \tag{3.1}$$

где S — область, занятая трещиной, x, ξ — точки трещины с координатами (x_1, x_2) и (ξ_1, ξ_2) соответственно, причем система координат Ox_1x_2 выбрана таким образом, что ось x_1 направлена перпендикулярно к границе полупространства, а начало координат находится в области расположения трещины

$$|y-\xi| = [(2d-x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2]^{1/2}$$

$$K_1(z, \xi) = 9 - 9i\omega_1|z-\xi| - (5\omega_1^2 - \omega_2^2|z-\xi|^2 - i\omega_1(2\omega_1^2-\omega_2^2)|z-\xi|^3 +$$

$$+ \frac{1}{4}(2\omega_1^2-\omega_2^2)^2|z-\xi|^4$$

$$K_2(z, \xi) = 9 - 9i\omega_2|z-\xi| - 4\omega_2^2|z-\xi|^2 + i\omega_2^3|z-\xi|^3$$

$$\Omega(\rho, \xi, x, \omega_2) = \frac{\nu^2\omega_2^2(\rho^2-1/2)^2}{4(1-\nu)^2[(\rho^2-1)(\rho^2-c^2)]^{1/2}} \exp(-\omega_2(2d-x_1-\xi_1)(\rho^2-c^2)^{1/2}) \times$$

$$\times J_0[\rho\omega_2(x_2-\xi_2)] + \frac{\nu\omega_2\rho(\rho-1/2)}{2(1-\nu)} \left[\frac{2(\rho^2-1/2)}{[(\rho^2-1)(\rho^2-c^2)]^{1/2}} \times\right.$$

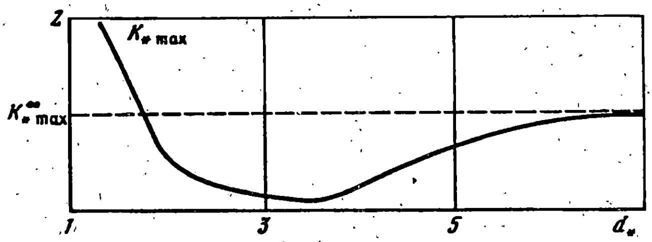
$$\times \exp(-\omega_2(2d-x_1-\xi_1)(\rho^2-c^2)^{1/2}) - \exp(-\omega_2(d-x_1)(\rho^2-1)^{1/2}) \times$$

$$\times \exp(-\omega_2(d-\xi_1)(\rho^2-c^2)^{1/2}) - \exp(-\omega_2(d-x_1)(\rho^2-c^2)^{1/2}) \times \tag{3.2}$$

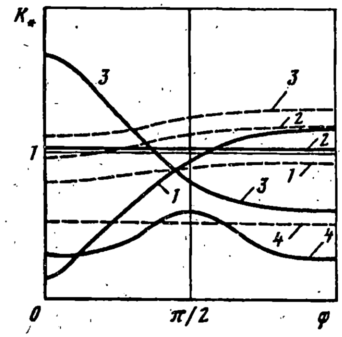
$$\left.\times \exp(-\omega_2(d-\xi_1)(\rho^2-1)^{1/2})\right] \frac{J_1[\rho\omega_2(x_2-\xi_2)]}{x_2-\xi_2} + 3\rho^2 \left[\frac{(\rho^2-1/2)^2}{[(\rho^2-1)(\rho^2-c^2)]^{1/2}} \times\right.$$

$$\times \exp(-\omega_2(2d-x_1-\xi_1)(\rho^2-c^2)^{1/2}) - (\rho^2-1/2)\exp(-\omega_2(d-x_1)(\rho^2-1)^{1/2}) \times$$

$$\times \exp(-\omega_2(d-\xi_1)(\rho^2-c^2)^{1/2}) - (\rho^2-1/2)\exp(-\omega_2(d-\xi_1)(\rho^2-1)^{1/2}) \times$$



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\times \exp\left(-\omega_2 (d - x_1)(\rho^2 - c^2)^{1/2}\right) + [(\rho^2 - 1)(\rho^2 - c^2)]^{1/2} \times$$

$$\times \exp\left(-\omega_2 (2d - x_1 - \xi_1)(\rho^2 - 1)^{1/2}\right)\Big] \frac{J_2\,[\rho\omega_2 (x_2 + \xi_2)]}{(x_2 - \xi_2)^2}, \quad c^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}$$

где d — расстояние начала координат от границы полупространства.

Из интегральных уравнений (3.1) следует, что слагаемые в регулярных ядрах, которые не содержат интегрирования по полубесконечной прямой, такие же, как и в случае взаимодействия в бесконечном теле двух компланарных трещин, симметричных относительно границы полупространства. Вычисление интеграла по полубесконечной прямой затруднительно из-за наличия в знаменателе функции Рэлея, обращающейся в нуль в точке $\rho^2 = c_2^2/c_R^2$, где c_R — скорость распространения в теле волны Рэлея.

Использование численно-аналитической методики [6] решения двумерных сингулярных интегральных уравнений позволяет численно решать такие уравнения. При численном вычислении рассматриваемого интеграла необходимо полубесконечный интервал интегрирования разбить на три части $[0;\ c]$, $[c;\ 1]$ и $[1;\ \infty]$. При вычислении интеграла на третьем участке необходимо воспользоваться регуляризацией Канторовича при вычислении особых интегралов. В рассматриваемом случае имеется особенность вида $(\rho^2 - c_2^2/c_R^2)^{-1}$ на участке $[1;\ \infty]$.

На фиг. 2 приведены зависимости амплитуд коэффициента интенсивности напряжения нормального отрыва

$$K_* = |K_1|/K_\infty, \quad K_1(\varphi, t) = -2G\pi(\pi a)^{1/2}\beta(\varphi, \varkappa)\, e^{-i\omega t}/(1 - \nu)$$

$$\beta(\varphi, \varkappa) = \lim_{r \to a}\left(\alpha(x, \varkappa)/(a^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}\right), \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

(K_∞ — статический коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва для дискообразного разреза радиуса a в бесконечном теле при действии на его поверхности усилий $N_3 = N_0 = \mathrm{const}$) от волнового числа $\varkappa = \omega a/c_2$, когда в полупространстве имеется дискообразная трещина радиуса a, перпендикулярная его границе и находящаяся под действием гармонических усилий с амплитудой N_0. Цифрой *1* обозначены кривые при расстоянии d центра трещины от границы полупространства равном $1{,}3a$ цифрой *2* — при $d = 5a$, сплошные кривые соответствуют точке контура трещины с угловой координатой $\varphi = \pi$ (отсчет угла φ производится от оси Ox_1), штриховые кривые соответствуют точке $\varphi = 0$.

Кривые на фиг. 2 имеют осциллирующий характер и при увеличении частоты колебаний внешних усилий, а также расстояния между трещиной и границей полупространства стремятся к аналогичным зависимостям для бесконечного тела с трещиной [5]. Динамическое взаимодействие трещины с границей полупространства приводит к тому, что для низких частот колебаний внешних усилий значение K_* меньше своего аналога для статического случая ($\varkappa = 0$) [3] и случая бесконечного тела с трещиной. При $d = 1{,}3a$ абсолютный максимум K_* достигается при $\varkappa = 1{,}9$ ($K_{*\max} = 1{,}96$ и на 43% превышает $K^{\infty}_{*\max}$ для бесконечного тела с трещиной). В то же время при расстояниях $d > 1{,}72a$ между трещиной и границей полупространства в рассматриваемом диапазоне частот колебаний $K_{*\max} < K^{\infty}_{*\max}$, что следует из фиг. 3, где показаны зависимости $K_{*\max}$ от $d_* = d/a$.

На фиг. 4 представлены зависимости K_* от угловой координаты φ точки контура трещины при различных значениях волнового числа: *1* — $\varkappa = 1{,}0$; *2* — $\varkappa = 1{,}35$; *3* — $\varkappa = 1{,}6$; *4* — $\varkappa = 6{,}8$. Сплошные кривые соответствуют значению $d = 1{,}3a$, штриховые — $d = 5a$.

Как видно из фиг. 4, с изменением частоты колебаний внешней нагрузки и расстояния между трещиной и границей полупространства точка максимальной амплитуды коэффициента интенсивности напряжений изменяет свое местоположение на контуре трещины, т. е. меняется возможное направление разрушения тела с трещиной. Для каждого расстояния между трещиной и границей полупространства существуют частоты колебаний внешней нагрузки, при которых коэффициенты интенсивности напряжений не меняются по контуру трещины (реализуется осесимметричное напряженное состояние).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мыхаськив В. В., Хай М. В.* Сведение к интегральным уравнениям динамических трехмерных задач теории упругости для тел с произвольно расположенными плоскими разрезами//ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 943—950.
2. *Мыхаськив В. В., Хай М. В.* Взаимодействие компланарных трещин в бесконечном теле, обусловленное установившимися во времени внешними нагрузками//Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1989. Вып. 30. С. 45—50.
3. *Кит Г. С., Лаушник И. П., Хай М. В.* Определение напряжений в полупространстве с произвольно расположенными плоскими трещинами//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 164—171.
4. *Мыхаськив В. В., Хай М. В.* Решение динамических задач теории упругости для тел с трещинами посредством преобразования Фурье//Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 11. С. 27—30.
5. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами//Киев: Наук. думка, 1989. 283 с.
6. *Хай М. В., Калыняк И. В.* Об одном подходе к численному решению задач математической теории трещин//Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1984. Вып. 20. С. 38—42.

Львов

Поступила в редакцию
2.XII.1991