МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1993

УДК 539.3

© 1993 г. В. Н. САВОСТЬЯНОВ, Л. Ю. ФРИШТЕР

МОДЕЛИРОВАНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ

Метод моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений, предусматривающий предварительное «замораживание» деформаций определенного вида в элементах модели и последующее «размораживание» всей модели известен и используется, в основном, при решении задачи термоупругости для однородных изотропных тел [1, 2].

В публикуемой работе дано теоретическое обоснование экспериментального метода моделирования задачи теории упругости для тел, составленных из материалов различной массы с различными механическими свойствами (кусочно-однородная задача). Преимуществом предлагаемого метода является возможность получения экспериментального результата в виде суммы ограниченного числа решений однородной задачи. При этом отпадает необходимость дорогостоящего и не всегда возможного синтеза оптически чувствительного материала модели с задаваемыми условиями моделирования соотношениями свойств.

1. Рассматривается пространственное тело V, составленное из частей V_1 и V_2, имеющих различные плотности γ_1 и γ_2, модули упругости и коэффициенты Пуассона, E_1, ν_1 и E_2, ν_2 соответственно.

На тело действуют поверхностные усилия P_i, известные перемещения f_i и температурное поле $T = T(x, y, z)$.

Заданы объемные силы $F_{i1}(\gamma_1)$ и $F_{i2}(\gamma_2)$, действующие в областях V_1 и V_2, причем $F_{il} = \text{const}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, $l = 1, 2$.

Разрешающая система уравнений исходной кусочно-однородной задачи имеет вид:

$$\sum_j \partial\sigma_{ij}/\partial j + F_i = 0 \qquad (1)$$

$$2\varepsilon_{ij} = \partial u_i/\partial j + \partial u_j/\partial i \quad (i, j \in V_1, V_2) \qquad (2)$$

$$\sum_j \sigma_{ij} n_j \,|_{L_\sigma} = P_i, \quad u_i \,|_{L_u} = f_i \qquad (3)$$

$$\sigma_{zi1} \,|_G = \sigma_{zi2} \,|_G, \quad u_{i1} \,|_G = u_{i2} \,|_G \qquad (4)$$

$$\varepsilon_{ij1} = [(1 + \nu_1)\,\sigma_{ij1} - \nu_1 S_1 \delta_{ij}]/E_1 + \varepsilon_{ij1}^T \quad (i, j \in V_1) \qquad (5)$$

$$\varepsilon_{ij2} = [(1 + \nu_2)\,\sigma_{ij2} - \nu_2 S_2 \delta_{ij}]/E_2 + \varepsilon_{ij2}^T \quad (i, j \in V_2) \qquad (6)$$

$$\varepsilon_{ije}^T = [(1 + \nu_l)\,\sigma_{ijl}^T - \nu_l S^T \delta_{ij}]/E_l \quad (l = 1, 2) \qquad (7)$$

$$S = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii}; \text{ или } \varepsilon_{ij}^T = \alpha T \delta_{ij}$$

где соотношения (4) определяют условия на поверхности раздела G областей V_1 и V_2.

Решение исходной задачи (1)—(6), используя принцип суперпозиции воздействий представляется в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' + \sigma_{ij}^{(n)}, \quad u_i = u_i^{(n)}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(n)} \tag{8}$$

где $\eta' = (\sigma_{ij}', u_i', \varepsilon_{ij}')$ — решения двух упругих однородных задач, отдельно для области V_1 с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1, усилиями F_{i1} (γ_1) и для области V_2 с характеристиками E_2, ν_2, воздействием F_{i2} (γ_2) соответственно. Закон Гука для этой задачи имеет вид

$$\varepsilon_{ijl}' = [(1 + \nu_l)\,\sigma_{ijl}' - \nu_l S'\delta_{ij}]/E_l \quad (l = 1, 2) \tag{9}$$

где $\eta^{(n)} = (\sigma_{ij}^{(n)}, u_i^{(n)}, \varepsilon_{ij}^{(n)})$ — решение вспомогательной неоднородной задачи, которая отличается от исходной (1)—(6) только тем, что вместо объемных воздействий F_{il} заданы вынужденные деформации вида (9) в каждой из частей V_1 и V_2.

Однородная задача для области V рассматривается при тех же воздействиях, что и вспомогательная неоднородная задача при условии одинаковых E и ν в обоих частях V_1 и V_2. Можно положить E и ν соответствующими материалу модели. Решение $\eta^{(0)} = (\sigma_{ij}^{(0)}, u_i^{(0)}, \varepsilon_{ij}^{(0)})$ удовлетворяет системе

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial j} = 0, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial i} \tag{10}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = [(1 + \nu)\,\sigma_{ij}^{(0)} - \nu S^{(0)}\delta_{ij}] + \varepsilon_{ij}^{T} + \varepsilon_{ij}' \quad (i, j \in V_1, V_2)$$

$$\sum_j \sigma_{ij}^{(0)} n_j \,|_{L_\sigma} = P_i, \quad u_i^{(0)} \,|_{L_u} = f_i$$

где ε_{ij}^{T} и ε_{ij}' вынужденные деформации вида (7) и (9).

Введем в рассмотрение решение вспомогательной кусочно-однородной задачи $\eta^{(n,1)} = (\sigma_{ij}^{(n,1)}, u_i^{(n,1)}, \varepsilon_{ij}^{(n,1)})$, удовлетворяющее соотношению

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(n,1)}, \quad u_i^{(n)} = u_i^{(0)} + u_i^{(n,1)} \tag{11}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \varepsilon_{ij}^{(n,1)} \text{ или } \eta^{(n)} = \eta^{(0)} + \eta^{(n,1)}$$

Подставив соотношения (11) в систему уравнений для вспомогательной задачи $\eta^{(n)}$ с учетом (10), получим систему уравнений для первой вспомогательной задачи

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}^{(n,1)}}{\partial j} = 0, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(n,1)} = \frac{\partial u_i^{(n,1)}}{\partial j} + \frac{\partial u_j^{(n,1)}}{\partial i} \quad (i, j \in V_1, V_2) \tag{12}$$

$$\sum_j \sigma_{ij}^{(n,1)} n_j \,|_{L_\sigma} = 0, \quad u_i^{(n,1)} \,|_{L_u} = 0$$

$$\sigma_{zi1}^{(n,1)} \,|_G = \sigma_{zi2}^{(n,1)} \,|_G, \quad u_{i1}^{(n,1)} \,|_G = u_{i2}^{(n,1)} \,|_G$$

В области V_1 (E_1, ν_1):

$$\varepsilon_{ij}^{(n,1)} = [(1 + \nu_1)\,\sigma_{ij}^{(n,1)} - \nu_1 S^{(n,1)}\delta_{ij}]/E_1 -$$

$$- k_1\,[(1 + \nu)\,\sigma_{ij}^{(0)} - \nu S^{(0)}\delta_{ij}]/E + m_1 \frac{1}{E} S^{(0)}\delta_{ij} \tag{13}$$

В области V_2 (E_2, ν_2):

$$\varepsilon_{ij}^{(n,1)} = [(1 + \nu_2)\,\sigma_{ij}^{(n,1)} - \nu_2 S^{(n,1)}\delta_{ij}]/E_2 -$$

$$-k_2\,[(1+\nu)\,\sigma_{ij}^{(0)} - \nu S^{(0)}\delta_{ij}]/E + m_2\,\frac{1}{E}\,S^{(0)}\delta_{ij} \tag{14}$$

$$k_l = 1 - \frac{(1+\nu_l)\,E}{(1+\nu)\,E_l}, \quad m_l = \frac{(\nu-\nu_l)\,E}{(1+\nu)\,E_l}$$

$$l = 1 \;\; (i, j \in V_1), \quad l = 2 \;\; (i, j \in V_2)$$

Соотношения (13, 14) можно переписать в виде

$$\varepsilon_{ij1}^{(n,1)} = [(1+\nu_1)\,\sigma_{ij}^{(n,1)} - \nu_1 S^{(n,1)}\delta_{ij}]/E_1 + \xi_{ij1}^{(0)} \quad (i, j \in V_1) \tag{15}$$

$$\varepsilon_{ij2}^{(n,1)} = [(1+\nu_2)\,\sigma_{ij}^{(n,1)} - \nu_2 S^{(n,1)}\delta_{ij}]/E_2 + \xi_{ij2}^{(0)} \quad (i, j \in V_2)$$

$$\xi_{ij1}^{(0)} = k_1\,(\varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}') - k_1\varepsilon_{ij}^{(0)} + m_1\,\frac{1}{E}\,S^{(0)}\delta_{ij} \text{ для } V_1$$

$$\xi_{ij2}^{(0)} = k_2\,(\varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}') - k_2\varepsilon_{ij}^{(0)} + m_2\,\frac{1}{E}\,S^{(0)}\delta_{ij} \text{ для } V_2 \tag{16}$$

Многократно применяя представление вида (11), с учетом (8) напряженно-деформированное состояние составного тела $\eta = (\sigma_{ij}, u_i, \varepsilon_{ij})$ сводится к сумме решений ряда однородных задач, получаемых экспериментально, на моделях из стандартного оптически чувствительного материала (E, ν):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' + \sum_{m=0}^{N} \sigma_{ij}^{(m)} + \sigma_{ij}^{(n,N+1)}, \quad u_i = \sum_{m=0}^{N} u_i^{(m)} + u_i^{(n,N+1)} \quad (i, j = x, y, z) \tag{17}$$

Здесь σ_{ij}' — напряжения от действия F_{i1}, F_{i2} в каждой отдельно взятой области V_1 и V_2 с исходными механическими характеристиками E_l, ν_l ($l = 1, 2$).

Решению при $m = 0$ соответствует напряженно-деформированное состояние однородного тела (10) с механическими характеристиками E, ν при действии тех же нагрузок и условий закрепления, что и в исходной неоднородной задаче, а также вынужденных деформаций, соответствующих решению σ_{ij}' в каждой из областей V_1 и V_2 при действии объемных сил F_{il} ($l = 1, 2$).

Решения при $m = 1, 2$ ... соответствуют решениям однородных задач при действии вынужденных деформаций вида:

$$\xi_{ij}^{(m-1)} = k_l\,(\varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}') - \sum_{\substack{p=1 \\ m\ge p}}^{m} k_l^p \varepsilon_{ij}^{(m-p)} + \delta_{ij}\,\frac{m_l}{E} \sum_{\substack{p=1 \\ m\ge p}}^{m} k_l^{p-1} S^{(m-p)} \tag{18}$$

$$k_l = 1 - \frac{(1+\nu_l)\,E}{(1+\nu)\,E_l}, \quad m_l = \frac{(\nu-\nu_l)\,E}{(1+\nu)\,E_l}, \quad \varepsilon_{ij}^T = \alpha T\delta_{ij}$$

$$S = \sum_{l=1}^{3} \sigma_{ii}, \quad l = 1 \;\; (i, j \in V_1), \quad l = 2\; (i, j \in V_2)$$

где $\eta^{(n,N+1)}$ — решение кусочно-однородной задачи при действии деформации (18) при $m = N$.

Учитывая, что модуль упругости высокоэластического состояния полимера значительно меньше модуля упругости конструкционного материала ($E \ll E_1 < E_2$) и используя очевидные неравенства $|k_l| < 1$, $|m_l| < 1$ ($l = 1, 2$), можно предположить, что при $N \to \infty$, $\eta^{(n, N+1)} \to 0$. При этом основные зависимости (17) представимы в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' + \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{ij}^{(m)}, \quad u_i = \sum_{m=0}^{\infty} u_i^{(m)} \tag{19}$$

Решение однородных задач, составляющих зависимости (19), реализуется на моделях, используя метод «размораживания» деформаций, в том числе и свободных температурных, техника которого разработана с достаточной подробностью [3].

Представленный зависимостями (18), (19) общий метод экспериментального решения кусочно-однородной задачи теории упругости при рассмотрении частных задач приводит к упрощению зависимости (18), и подтверждает теоретические и экспериментальные положения предложенные ранее.

2. Рассмотрим частные случаи. 1°. Тело состоит из материалов, отличающихся только модулями упругости ($E_1 < E_2$, $E_1 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $F_{i1} = F_{i2}$). Параметры разложения равны $k_1 = m_1 = m_2 = 0$, $k_2 = k = 1 - E_1/E_2 < 1$. Решение кусочно-однородной задачи в этом случае имеет вид

$$\eta = \sum_{m=0}^{\infty} \eta^{(m)} \tag{20}$$

Здесь $\eta^{(m)}$ — решение m-й однородной задачи, определяемой действием вынужденной деформации $\xi_{ij}^{(m-1)}$ в области V_2 однородной задачи (m — 1):

$$\xi^{(m-1)} = k^m \varepsilon_{ij}^T - \sum_{p=1}^{m} k^p \varepsilon_{ij}^{(m-p)}, \quad m \geq p \quad (m = 1, 2, \dots) \tag{21}$$

Соотношения (20) и (21) удобно представить в форме

$$\eta = \sum_{m=0}^{\infty} k^m \eta^{\vee\,(m)} \tag{22}$$

где $\eta^{\vee\,(m)}$ ($\eta^{(m)} = k^m \eta^{\vee\,(m)}$) — решение m-й однородной задачи при действии вынужденных деформаций в области V_2 (m − 1)-й — однородной задачи вида

$$\xi_{ij}^{\vee\,(m-1)} = \alpha T \delta_{ij} - \varepsilon_{ij}^{\vee\,(0)} - \varepsilon_{ij}^{\vee\,(1)} - \dots - \varepsilon_{ij}^{\vee\,(m-1)} \tag{23}$$

Представление (22), (23) решения кусочно-однородной задачи с различными модулями упругости совпадает тождественно с полученным ранее в [4, 5] и полностью согласуется с разработанной там же методикой моделирования.

В случае, когда $\nu_1 = \nu_2$; $E_1 = E_2$, E — модуль упругости однородных задач в разложении (21), соотношение (20) иллюстрирует известные теоремы о влиянии модуля упругости материала однородного тела на его напряженно-деформированное состояние.

2°. Тело состоит из материалов, отличающихся коэффициентами Пуассона ($E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 < \nu_2$). Однородные задачи ряда (20) определяются действием вынужденных деформаций

$$\xi_{ij}^{(m-1)} = k_l^m \varepsilon_{ij}^T - \sum_{p=1}^{m} k_l^p \left(\varepsilon_{ij}^{(m-p)} - \delta_{ij} \frac{S^{(m-p)}}{E}\right), \quad m \geq p \tag{24}$$

$$l = 1, \quad (i, j \in V_1), \quad l = 2 \ (i, j \in V_2)$$

$$(p = 1, 2, \dots m; \quad i, j = x, y, z), \quad k_l = (\nu - \nu_l)/(1 + \nu)$$

Как видно из выражения (24) вынужденные деформации m-й однородной задачи обусловлены помимо деформаций $(m - p)$ задачи также и деформациями, пропорциональными первому инварианту напряжений в этой же задаче.

В случае $E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2$, $\nu < \nu_2$, соответствующем рассмотрению двух тел, одинаковых во всем, кроме коэффициентов Пуассона их материалов, зависимость (8) при $l = 1$, совпадает с предложенной ранее [6, 7] $k_l = k = (1 - \nu_1)/(1 + \nu)$.

Представление решения кусочно-однородной задачи в виде разложения в ряд решений (19) однородных задач с вынужденными деформациями (18) по степеням параметров k_l, m_l обеспечивает унифицированный подход в исследовании влияния физико-механических характеристик на напряженно-деформированное состояние тела.

3°. Исследуется влияние различия объемных масс γ_1 и γ_2 частей тела V_1 и V_2 соответственно при действии объемных сил F_{i1} и F_{i2}. Для однородного по свойствам материала соотношения (19) упрощаются и принимают вид

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' + \sigma_{ij}^{(0)}, \quad u_i = u_i^{(0)} \tag{25}$$

Здесь σ_{ij}, u_i — исходные напряжения и перемещения в теле при действии объемных сил F_{i1} и F_{i2}; σ_{ij}', ε_{ij}' — напряжения и деформации от действия объемных сил в каждой из отдельно взятых областей V_1 и V_2; $\sigma_{ij}^{(0)}$, $u_i^{(0)}$ — напряжения и перемещения в теле от действия вынужденных деформаций ε_{ij1}' и ε_{ij2}'.

Представление (25) тождественно совпадает с предложенным в [8], где решена задача о напряженном состоянии тела, составленного из материалов с различной массой. Рассмотренный выше круг задач требует при экспериментальной реализации, помимо исследований однородной по свойствам модели при заданных воздействиях, испытания также моделей двух видов.

Однородных моделей с полными деформациями, действующими в одной из областей $(l = 2)$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \eta^{(m)} (\varepsilon_{ij2}^{(m-1)}) \tag{26}$$

Однородных моделей с вынужденными деформациями «частного» вида

$$\sum_{m=0}^{\infty} \eta^{(m)} \left(\frac{1}{E} S^{(m-1)} \delta_{ij}\right) \tag{27}$$

Экспериментально решение задачи вида (26) осуществляется применением однотипного методического приема. Область V_2 с замороженными деформациями $\varepsilon_{ij}^{(m-1)}$ отрезается от модели $(m - 1)$ и склеивается с областью V_1, свободной от напряжений. После «отжига» в модели реализуется напряженное состояние, соответствующее m-й задаче. Показано, что ряд решений вида (23) мажорируется геометрической прогрессией и его сумму, как это сделано в [4], следует оценивать, используя рекуррентные соотношения, выполняющиеся с заданной точностью для последовательности решений $\eta^{\vee(m)}$.

Учитывая, что предлагаемый способ рассчитан на использование моделей из оптически чувствительного материала, заданная точность оценки суммы не должна превосходить точности при определении напряжений методом фотоупругости. Этого удается достичь при испытании 3—4 моделей.

Решение задач ряда (24) производится с использованием «размораживания» свободных температурных деформаций [3], имея в виду их аналогию с деформациями частного вида ряда (27). При этом из рассмотрения скачка напряжений $\sigma_{z1}^{(m)}|_G = \sigma_{z2}^{(m)}|_G$ (z — нормаль к поверхности G раздела областей V_1 и V_2), обусловленного величиной $S^{(m)}$ можно судить о сходимости ряда (24). Для получения результата требуемой точности достаточно испытания 1—2 моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Варданян Г. С., Пригоровский Н. И.* Моделирование термоупругих напряжений в поляризационно-оптическом методе. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1962. № 4. С. 6—8.
2. *Бугаенко С. Е.* Моделирование напряжений от заданных несовместных деформаций поляризационно-оптическим методом // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 8—11.
3. Метод фотоупругости. Т. 3. / Под ред. Г. Л. Хесина. М.: Стройиздат, 1975. С. 176—311.
4. *Варданян Г. С., Фриштер Л. Ю.* Моделирование термоупругих напряжений в составных конструкциях. Изв. Арм. ССР. Механика. 1985. № 986. Вып. XXXVIII. С. 3—13.
5. *Vardanjan G. S., Frister L. J.* Modellierung thermoelastisher Spannungen in zusammengesetzten Konstruktionen//Spannungsoptische Untersuchungen. Berlin: Beiträge (3). 1986. S. 16—21.
6. *Савостьянов В. Н., Золотов А. Б., Исайкин А. С.* Влияние различия коэффициентов Пуассона при исследовании напряжений на моделях из несжимаемого материала // VIII Всес. конф. по методу фотоупругости. Т. 3. Таллин. 1979. С. 71—74.
7. *Савостьянов В. Н., Омельченко Д. И.* Моделирование напряженно-деформированного состояния сооружений при различных коэффициентах Пуассона материала модели и натуры // Изв. Вузов. Строительство и архитектура. 1989. № 7. С. 21—22.
8. *Савостьянов В. Н., Агаханов Э. К.* Об эквивалентности систем воздействий в статической задаче механики деформируемого твердого тела // Развитие методов возведения, расчета и проектирования строительных конструкций. Москва, 1989. С. 12—13.

Москва

Поступила в редакцию
16.IX.1991