МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1993

УДК 539.3

© 1993 г. А. Г. КОЛПАКОВ

СТРУКТУРНАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

Вопрос структурной устойчивости (чувствительности) [1] для композиционных материалов слабо изучен. Абстрактная формулировка задачи такова: пусть $\mathbf{q}$ — набор параметров задающих микроструктуру (строение) композита, $\mathbf{d}$ — его усредненные характеристики, $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{q})$. Пусть структура композита испытывает возмущение $\delta\mathbf{q}$. Тогда (если $\mathbf{d}(\mathbf{q})$ гладкая функция) $\mathbf{d}(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}) = \mathbf{d}(\mathbf{q}) + A(\mathbf{q})\,\delta\mathbf{q} + B(\mathbf{q})\,\delta\mathbf{q}\delta\mathbf{q}$. Выделяются следующие случаи. Первый $A(\mathbf{q}) = 0$ — малые возмущения структуры ведут к еще меньшим возмущениям свойств материала. Второй $A(\mathbf{q}) \neq 0$ — изменения свойств композита пропорциональны возмущениям его структуры. В случае $A(\mathbf{q}) \neq 0$ говорят, что материал структурно устойчив и имеет чувствительность первого порядка (по отношению к малым возмущениям структуры). При $A(\mathbf{q}) = 0$ соответствующую классификацию можно осуществить по $B(\mathbf{q})$ (в этом случае говорят о чувствительности второго порядка [1] и так далее).

Ясная в абстрактной постановке, задача содержит существенные трудности при ее решении в конкретных случаях. Это обусловлено тем, что связь $\mathbf{d}$ с $\mathbf{q}$ реализуется, как правило, разрешающими операторами краевых задач для дифференциальных уравнений.

В публикуемой статье рассматривается задача структурной устойчивости для слоистых (и отчасти волокнистых) композитов. В связи с широким распространением таких материалов задача имеет практическое значение [2, 3].

1. Рассмотрим композит, ячейка периодичности (ЯП) P которого представлена на фиг. 1. Размеры ЯП в исходных переменных $\varepsilon << 1$, а в безразмерных переменных $\mathbf{z} = \mathbf{x}/\varepsilon$ — порядка единицы. ЯП, изображенную на фиг. 1 (возмущенную), можно считать полученной из ЯП P_0, представленной на фиг. 2, путем деформации задаваемой формулами

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} + \delta F(\mathbf{y}), \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) \tag{1.1}$$

$$F_1(\mathbf{y}) = F_3(\mathbf{y}) = 0, \quad F_2(\mathbf{y}) = f(y_1)\,\varphi(y_2)$$

где f, φ — периодическое функции, обращающиеся в нуль на гранях ЯП P_0, $|f|$, $|\varphi| \leq 1$; f определяют форму границы раздела материалов (чем она определяется однозначно), а φ задает деформацию ЯП, P_0 в поперечном направлении (ее выбор достаточно произвольный). Механический смысл параметра δ виден из фиг. 1, 2.

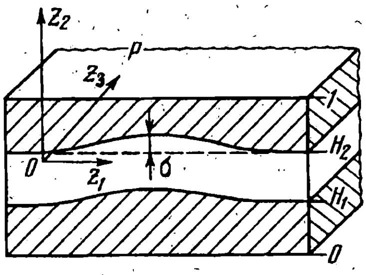
Для определения усредненных упругих постоянных композита согласно [4—6] следует решить на P следующую задачу теории упругости:

$$\int_P a_{ijkl}(\mathbf{z})\, N^{\alpha\beta}_{k,l}(\mathbf{z})\, \varphi_{i,j}(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} + \int_P a_{ij\alpha\beta}(\mathbf{z})\, \varphi_{i,j}(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} = 0 \tag{1.2}$$

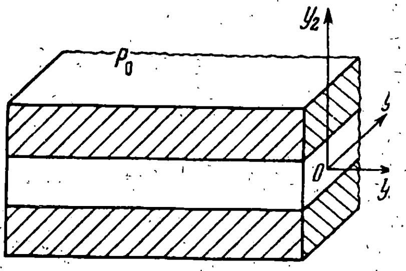
для любой периодической функции $\varphi(\mathbf{z}) \in H^1(P)$.

После чего усредненные упругие постоянные $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ вычисляются по формуле [4—6]:

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\operatorname{mes} P} \int_P (a_{\alpha\beta\gamma\delta} + a_{ijkl} N^{\alpha\beta}_{k,l} N^{\gamma\delta}_{i,j})\, d\mathbf{z} \tag{1.3}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где a_{ijkl} (z) — упругие постоянные композита (также называемые локальными или микроскопическими характеристиками).

Перейдем от задачи (1.2), (1.3) на ЯП P к соответствующей задаче на ЯП P_0. Для этого воспользуемся формулой [7]:

$$\int_P f(\mathrm{z})\, d\mathrm{z} = \int_{P_0} f(\mathrm{z}(\mathrm{y})) \det \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}\, d\mathrm{y}$$

и учтем соотношения

$$\frac{\partial f(\mathrm{z}(\mathrm{y}))}{\partial z_l} = \frac{\partial f(\mathrm{z}(\mathrm{y}))}{\partial y_l} - \delta \frac{\partial f(\mathrm{z}(\mathrm{y}))}{\partial y_k} \frac{\partial F_k}{\partial y_l} + \delta^2 \Phi_{lk}(\mathrm{y}) \frac{\partial f(\mathrm{z}(\mathrm{y}))}{\partial y_k} + \ldots \tag{1.4}$$

$$\Phi_{lk} = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial F_l}{\partial y_j} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}, \quad \det \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}} = 1 + \delta \operatorname{div} \mathbf{F} + \delta^2 I + \ldots$$

Отметим, что для $\mathbf{F}$ заданной формулами (1.1) $I = 0$.

Пользуясь (1.4) запишем (1.2) в переменных y. При этом функцию φ (z) возьмем в виде $\varphi(\mathrm{z}) = \psi(\mathrm{y}(\mathrm{z}))$. Тогда для нее

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_l} = \frac{\partial \psi}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial z_l} \frac{\partial z_l}{\partial y_l} = \frac{\partial \psi}{\partial y_l}(\mathrm{y})$$

После чего получаем из (1.2) следующее уравнение (в котором сохранены члены не выше второго порядка по δ):

$$\int_{P_0} \Big[a_{ijkl}(\mathrm{y}) \left(\frac{\partial}{\partial y_l} - \delta F_{l,p} \frac{\partial}{\partial y_p} + \delta^2 \Phi_{lp} \frac{\partial}{\partial y_p}\right) N_k^{\alpha\beta}(\mathrm{z}(\mathrm{y}))\, \psi_{ij}(\mathrm{y}) +$$

$$+ a_{ij\alpha\beta}(\mathrm{y})\, \psi_{i,j}(\mathrm{y})\Big]\, d\mathrm{y} = 0 \tag{1.5}$$

для любой периодической функции $\psi \in H^1(P_0)$.

В предположении малости δ проведем группировку членов при одинаковых степенях δ. При этом функцию $\mathrm{N}^{\alpha\beta}(\mathrm{y}) = \mathrm{N}^{\alpha\beta}(\mathrm{z}(\mathrm{y}))$ будем искать в виде

$$\mathrm{N}^{\alpha\beta}(\mathrm{y}) = \mathrm{N}^{\circ\alpha\beta}(\mathrm{y}) + \delta \mathrm{N}^{1\alpha\beta}(\mathrm{y}) + \delta^2 \mathrm{N}^{2\alpha\beta}(\mathrm{y}) + \ldots \tag{1.6}$$

Замечание 1. Поскольку оператор задачи теории упругости на множестве периодических функций с нулевым средним сильно монотонен [4] как оператор на $H^1(P_0)$, то ряд (1.6) сходится в $H^1(P_0)$ в окрестности $\delta = 0$ (с точностью до постоянной, исключаемой условием нулевого среднего).

Осуществив группировку членов при δ°, δ^1, δ^2 имеем

$$\delta^\circ: \int_{P_0} \left[a_{ijkl}(\mathrm{y})\, N_{k,l}^{\circ\alpha\beta}\, \psi_{i,j}(\mathrm{y}) + a_{ij\alpha\beta}(\mathrm{y})\, \psi_{i,j}(\mathrm{y})\right] d\mathrm{y} = 0 \tag{1.7}$$

$$\delta^1: \int\limits_{P_0} [a_{ijkl}(y) N_{k,l}^{1\alpha\beta}\psi_{i,j}(y) + (a_{ijkl}(y) N_{k,l}^{\circ\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{F} - \tag{1.8}$$

$$- a_{ijkl}(y) F_{l,p} N_{k,p}^{\circ\alpha\beta} + a_{ij\alpha\beta}(y) \operatorname{div} \mathbf{F}) \psi_{i,j}(y)] \, dy = 0$$

$$\delta^2: \int\limits_{P_0} [a_{ijkl}(y) N_{k,l}^{2\alpha\beta} + (a_{ijkl}(y) N_{k,l}^{1\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{F} - a_{ijkl}(y) F_{l,p} N_{k,p}^{1\alpha\beta} - a_{ijkl}(y) F_{l,p} N_{k,p}^{\circ\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{F} +$$

$$+ \Phi_{lp}(y) N_{k,p}^{\circ\alpha\beta}] \psi_{i,j}(y) \, dy = 0 \tag{1.9}$$

для любой периодической функции $\psi \in H^1(P_0)$.

Уравнение (1.7) для $\mathbf{N}^{\circ\alpha\beta}$ совпадает с уравнением, возникающем при усреднении слоистых тел идеальной структуры. Оно имеет решение вида $\mathbf{N}^{\circ\alpha\beta} = \mathbf{N}^{\circ\alpha\beta}(y_2)$, в частности, для композита с изотропными компонентами [6]:

$$N_2^{\circ 11\prime}(y_2) = -\frac{\lambda(y_2)}{\lambda(y_2) + \mu(y_2)} + C_2^{11}, \quad N_i^{\circ\alpha\beta}(y_2) = 0 \text{ при } \alpha\beta i \neq 112$$

где штрих обозначает производную по y_2, $C_2^{11} = \langle \lambda/(\lambda+\mu) \rangle$.

Применяя формулу замены переменных к (1.3) с учетом (1.4), (1.6) получим (все функции в (1.10) аргумента y):

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\operatorname{mes} P_0} \int\limits_{P_0} (a_{\alpha\beta\gamma\delta} + a_{ijkl} N_{k,l}^{\circ\alpha\beta} N_{i,j}^{\circ\gamma\delta}) \, dy + \frac{\delta}{\operatorname{mes} P_0} \int\limits_{P_0} (a_{\alpha\beta\gamma\delta} \operatorname{div} \mathbf{F} + a_{ijkl} N_{k,l}^{1\alpha\beta} N_{i,j}^{\circ\gamma\delta} + \tag{1.10}$$

$$+ a_{ijkl} N_{k,l}^{\circ\alpha\beta} N_{i,j}^{1\gamma\delta} + a_{ijkl} N_{i,j}^{\circ\alpha\beta} N_{k,l}^{\circ\gamma\delta} \operatorname{div} \mathbf{F} - a_{ijkl} F_{j,p} N_{i,p}^{\circ\alpha\beta} N_{k,l}^{\circ\gamma\delta} - a_{ijkl} F_{l,q} N_{i,j}^{\circ\alpha\beta} N_{k,q}^{\circ\gamma\delta}) \, dy +$$

$$+ \frac{\delta^2}{\operatorname{mes} P_0} \int\limits_{P_0} [a_{ijkl} (N_{k,l}^{1\alpha\beta} N_{i,j}^{1\gamma\delta} + N_{k,l}^{\circ\alpha\beta} N_{i,j}^{2\gamma\delta} + N_{k,l}^{2\alpha\beta} N_{i,j}^{\circ\gamma\delta}) + a_{ijkl} (N_{k,l}^{\circ\alpha\beta} N_{i,j}^{1\gamma\delta} + N_{k,l}^{1\alpha\beta} N_{i,j}^{\circ\gamma\delta}) \operatorname{div} \mathbf{F} -$$

$$- a_{ijkl} F_{l,p} (N_{k,p}^{\circ\alpha\beta} N_{i,j}^{1\gamma\delta} + N_{k,p}^{1\alpha\beta} N_{i,j}^{\circ\gamma\delta}) - a_{ijkl} F_{j,q} (N_{k,l}^{\circ\alpha\beta} N_{i,q}^{1\gamma\delta} + N_{k,l}^{1\gamma\beta} N_{i,q}^{\circ\gamma\delta}) - a_{ijkl} (F_{l,p} N_{k,p}^{\circ\alpha\beta} N_{i,j}^{\circ\gamma\delta} +$$

$$+ N_{k,l}^{\circ\alpha\beta} F_{j,q} N_{i,q}^{\circ\gamma\delta}) \operatorname{div} \mathbf{F} + F_{l,p} N_{k,p}^{\circ\alpha\beta} F_{j,q} N_{j,q}^{\circ\gamma\delta} + \Phi_{lp} N_{k,p}^{\circ\alpha\beta} N_{i,j}^{\circ\gamma\delta} + N_{k,l}^{\circ\alpha\beta} \Phi_{iq} N_{i,q}^{\circ\gamma\delta}] \, dy$$

Формулы (1.10) и (1.7)—(1.9), весьма громоздкие в исходной форме, далее будут существенно сокращены.

2. Рассмотрим случай возмущения идеальной геометрической структуры слоистого композита при сохранении объемного содержания его компонентов. Этот случай можно описать условием $\int_0^1 f(y_1)\, dy_1 = 0$, где f — функция из (1.1). Рассмотрим член при δ в формуле (1.10). С целью его изучения положим в (1.8) $\psi = \mathbf{N}^{\circ\alpha\beta}$ ($\mathbf{N}^{\circ\alpha\beta} \in H^1(P_0)$ и периодична на P_0). В результате получим равенство

$$\int\limits_{P_0} (a_{ijkl} N_{k,l}^{1\alpha\beta} N_{i,j}^{\circ\gamma\delta} + a_{ijkl} N_{k,l}^{\circ\alpha\beta} N_{i\circ,j}^{\circ\gamma\delta} \operatorname{div} \mathbf{F} - a_{ijkl} F_{l,p} N_{k,p}^{\circ\alpha\beta} N_{i,j}^{\circ\gamma\delta} + a_{ijkl} \operatorname{div} \mathbf{F} N_{i,j}^{\circ\gamma\delta}) \, dy = 0 \tag{2.1}$$

и аналогичное равенство, получающееся из (2.1) заменой индексов $\alpha\beta \leftrightarrow \gamma\delta$ ($ij \leftrightarrow kl$). Сравнивая полученные выражения с выражением при δ в (2.1), замечаем наличие подобных членов. В результате найдем следующее выражение для члена при δ в (1.10):

$$A\delta\mathbf{F} = -\frac{\delta}{\operatorname{mes} P_0} \int\limits_{P_0} (a_{ijkl} N_{k,l}^{\circ\gamma\delta} N_{i,j}^{\circ\alpha\beta} +$$

$$+ a_{ij\alpha\beta} N_{i,j}^{\circ\gamma\delta} + a_{ij\gamma\delta} N_{i,j}^{\circ\alpha\beta})(y_2)\, \varphi'(y_2) f(y_1)\, dy_1\, dy_2\, dy_3 \tag{2.2}$$

Здесь учтено, что в силу (1.1) $\operatorname{div}\mathbf{F} = \varphi'(y_2) f(y_1)$. Интеграл в (2.2) по формуле Фубини представляется в виде повторного интеграла [7]:

$$\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ldots dy_2\, dy_3\right)\left(\int_0^1 f(y_1)\, dy_1\right) = 0$$

Последнее равенство в силу условия на функцию f (условия сохранения объемного содержания компонентов).

Если в формулах (1.1) задать не плоскую, а пространственную деформацию, положив $F_1 = 0$, $F_2 = \varphi_2(y_2, y_3) f(y_1)$, $F_3 = \varphi_3(y_2, y_3) f(y_1)$, можно описать деформацию прямого волокна, лежащего параллельно оси Oy_1 (его изгиб или утолщение-утоньшение). Формула (2.1) справедлива и в этом случае, так как явный вид функции $\mathbf{N}^{\circ\alpha\beta}$ при ее получении не использовался. Известно [6], что для однонаправленного волокнистого композита $\mathbf{N}^{\circ\alpha\beta}$ является функцией переменных y_2, y_3. Тогда $\operatorname{div}\mathbf{F} = (\partial\varphi_2/\partial y_2 + \partial\varphi_3/\partial y_3) f(y_1)$, в результате чего (2.1) приводит к интегралу вида

$$\left(\int \ldots dy_2\, dy_3\right)\left(\int_0^1 f(y_1)\, dy_1\right) = 0$$

Т. е. и для этого случая $A(\mathbf{q}) = 0$ для возмущений сохраняющих объемное содержание компонентов (волокон и связующего) в композите.

Подсчитаем член при δ^2 в (1.10). С этой целью воспользуемся уравнением (1.9) для $\mathbf{N}^{2\alpha\beta}$. Положив в (1.9) $\psi = \mathbf{N}^{\circ\gamma\delta}$ получаем равенство

$$\int_{P_0} (a_{ijkl} N^{2\alpha\beta}_{k,l} N^{\circ\gamma\delta}_{i,j} + a_{ijkl} N^{1\alpha\beta}_{k,l} N^{\circ\gamma\delta}_{i,j} \operatorname{div}\mathbf{F} - a_{ijkl} F_{l,p} N^{1\alpha\beta}_{k,p} N^{\circ\gamma\delta}_{i,j} -$$

$$- a_{ijkl} F_{l,p} N^{\circ\alpha\beta}_{k,p} \operatorname{div}\mathbf{F} N^{\circ\gamma\delta}_{i,j} + \Phi_{lp} N^{\circ\alpha\beta}_{k,p} N^{\circ\gamma\delta}_{i,j})\, dy = 0 \qquad (2.3)$$

Сравнение (2.1) (и получающихся из него заменами $\alpha\beta \leftrightarrow \gamma\delta$, $kl \leftrightarrow ij$, $p \leftrightarrow q$ равенств) с членом при δ^2 в (1.10) позволяет исключить из (1.10) ряд членов. Окончательно получаем, что член при δ^2 в (1.10) может быть записан в виде

$$B\delta\mathbf{F}\delta\mathbf{F} = \frac{\delta^2}{\operatorname{mes} P_0} \int_{P_0} [a_{ijkl} N^{1\alpha\beta}_{k,l} N^{1\gamma\delta}_{i,j} - a_{ijkl} (F_{l,p} N^{1\alpha\beta}_{k,p} N^{\circ\gamma\delta}_{i,j} +$$

$$+ F_{j,q} N^{\circ\alpha\beta}_{k,l} N^{1\alpha\delta}_{i,q}) + a_{ijkl} F_{l,p} N^{\circ\alpha\beta}_{k,p} F_{j,q} N^{\circ\gamma\delta}_{i,q}]\, dy \qquad (2.4)$$

Согласно [5] $u^L_{i,j} = u_{i,j} + u_{\alpha,\beta} N^{\alpha\beta}_{i,j}$, где $\mathbf{u}^L$ — истинные (микроскопические, локальные), а $\mathbf{u}$ — усредненные перемещения. Пользуясь (1.4) и (1.1), (1.6) получаем

$$\frac{\partial N^{\alpha\beta}_i}{\partial z_j}(\mathbf{z}) = \frac{\partial N^{\circ\alpha\beta}_i}{\partial y_j}(\mathbf{y}(\mathbf{z})) + \delta\left(\frac{\partial N^{1\alpha\beta}_i}{\partial y_j} - F_{2,j}\frac{\partial N^{\circ\alpha\beta}_i}{\partial y_2}\right)(\mathbf{y}(\mathbf{z})) \qquad (2.5)$$

Для вычисления локальных деформаций следует воспользоваться соотношением $\varepsilon^L = 1/2\,(u^L_{i,j} + u^L_{j,i})$, а для вычисления напряжений — свернуть (2.5) с тензором упругих постоянных.

3. Как видно из формул (2.4), (2.5), для вычисления определяемых ими величин необходимо провести вычисление функций $\mathbf{N}^{1\alpha\beta}$. Уравнения для них вытекают из (1.9) и имеют вид

$$(a_{ijkl} N^{1\alpha\beta}_{k,l})_{,j} = (-a_{ijkl} N^{\circ\alpha\beta}_{k,l} \operatorname{div}\mathbf{F} + a_{ijkl} F_{l,p} N^{\circ\alpha\beta}_{k,p} - a_{ij\alpha\beta} \operatorname{div}\mathbf{F})_{,j} = X^{\alpha\beta}_i \qquad (3.1)$$

с условием перемещений $\mathbf{N}^{1\alpha\beta}$ и соответствующих им нормальных напряжений на гранях ЯП $P_0 = [0, 2\pi] \times [0, 1]^2$. Отметим, что упругие постоянные здесь зависят от одной переменной — y_2 (рассматривается идеальная слоистая среда), что позволяет применить при решении (3.1) метод разделения переменных.

Возьмем функцию F_2 (у) в виде $F_2(y) = f(y_2) \cos y_1$ (граница раздела компонентов имеет форму $z_2 = \mathrm{const} \cos z_1$). Рассмотрение проводится на ЯП $P_0 = [0,2\pi] \times [0,1]^2$. В этом случае правая часть (3.1) с учетом вида функции $\mathrm{N}^{0\alpha\beta}$ упрощается и принимает вид

$$X_1^{\alpha\beta} = (\lambda(y_2) + 2\mu(y_2)) f'(y_2) \sin y_1, \quad X_2^{\alpha\beta} = -(2\mu(y_2) f'(y_2))' \cos y_1 \text{ при } \alpha\beta = 11$$

$$X_1^{\alpha\beta} = 2\mu(y_2) f'(y_2) \sin y_1, \quad X_2^{\alpha\beta} = -((\lambda(y_2) + 2\mu(y_2)) f'(y_2))' \cos y_1 \text{ при } \alpha\beta = 22$$

$$X_1^{\alpha\beta} = -(2\mu(y_2) f'(y_2))' \cos y_1, \quad X_2^{\alpha\beta} = 2\mu(y_2) f'(y_2) \sin y_1 \text{ при } \alpha\beta = 12{,}21$$

при других $\alpha\beta$ правые части (3.1) равны нулю.

Решение задачи (3.1) с правыми частями указанного вида будем искать в виде

$$N_1^{1\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}(y_2) \sin y_1 + B^{\alpha\beta}(y_2) \cos y_1 \tag{3.2}$$

$$N_2^{1\alpha\beta} = C^{\alpha\beta}(y_2) \sin y_1 + D^{\alpha\beta}(y_2) \cos y_1$$

Поскольку для определенных (3.2) функций выполнено равенство $\int_{P_0} \mathrm{N}^{1\alpha\beta}(\mathrm{y})\, d\mathrm{y} = 0$, то они определены единственным образом [4, 5].

Подставляя (3.2) в (3.1) и приравнивая выражения при $\sin y_1$ и $\cos y_1$, получим

$$(\mu A^{\alpha\beta\prime} - \mu D^{\alpha\beta})' - \lambda D^{\alpha\beta\prime} - (\lambda + 2\mu) A^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} \tag{3.3}$$

$$(\mu(B^{\alpha\beta\prime} + C^{\alpha\beta}))' + \lambda C^{\alpha\beta\prime} - (\lambda + 2\mu) B^{\alpha\beta} = b^{\alpha\beta\prime}$$

$$((\lambda + 2\mu) C^{\alpha\beta\prime} - \lambda B^{\alpha\beta\prime})' - \mu B^{\alpha\beta\prime} - \mu C^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta}$$

$$(\lambda A^{\alpha\beta} + (\lambda + 2\mu) D^{\alpha\beta\prime})' + \mu A^{\alpha\beta\prime} - \mu D^{\alpha\beta} = d^{\alpha\beta\prime}$$

где через $a^{\alpha\beta}$, $b^{\alpha\beta}$, $c^{\alpha\beta}$, $d^{\alpha\beta}$ обозначены коэффициенты при $\sin y_1$, $\cos y_1$ в правых частях (3.1) (случай $\alpha\beta = 11{,}22$):

$$X_1^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} \sin y_1 + b^{\alpha\beta\prime} \cos y_1, \quad X_2^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta} \sin y_1 + d^{\alpha\beta\prime} \cos y_1$$

Уравнения (3.3) дополняются условиями периодичности и условиями на границах раздела слоев

$$[A^{\alpha\beta}] = [B^{\alpha\beta}] = [C^{\alpha\beta}] = [D^{\alpha\beta}] = 0 \tag{3.4}$$

$$[\mu A^{\alpha\beta\prime} - \mu D^{\alpha\beta}] = 0, \quad [\mu B^{\alpha\beta\prime} + \mu C^{\alpha\beta} - b^{\alpha\beta}] = 0$$

$$[(\lambda + 2\mu) C^{\alpha\beta\prime} - \lambda B^{\alpha\beta}] = 0, \quad [(\lambda + 2\mu) D^{\alpha\beta\prime} + \lambda A^{\alpha\beta} - d^{\alpha\beta}] = 0$$

где [. . .] — знак скачка (на гранях ЯП или границах раздела компонентов).

Система (3.3), (3.4) распадается на две системы второго порядка относительно функций $(A^{\alpha\beta}, D^{\alpha\beta})$ и функций $(B^{\alpha\beta}, C^{\alpha\beta})$. Фундаментальные решения в слоях (при $\lambda, \mu = \mathrm{const}$) для однородных уравнений находятся в явном виде

$$\text{для } (A^{\alpha\beta}, D^{\alpha\beta}): \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{y_2}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} y_2 e^{y_2}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-y_2}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} y_2 e^{-y_2} \tag{3.5}$$

$$\text{для } (B^{\alpha\beta}, C^{\alpha\beta}): \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{y_2}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} y_2 e^{y_2}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-y_2}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} y_2 e^{-y_2}$$

Решения в слоях имеют вид $C_1\mathrm{y}_1 + C_2\mathrm{y}_2 + C_3\mathrm{y}_3 + C_4\mathrm{y}_4 + \mathrm{y}_0$, где $\{\mathrm{y}_i\}_{i=1}^4$ — решения (3.5); y_0 — частное решение (оно легко находится для a, b, c, $d = \mathrm{const}$). Коэффициенты $\{C_i\}$ находятся из условий (3.4), сводящихся к системе алгебраических уравнений размера $4 \times m$, где m — число слоев образующих период структуры композита (см. фиг. 1, 2).

Подстановка выражений (3.2) вместо $\mathbf{N}^{1\alpha\beta}$ в формулы (2.4), (2.5) дает следующее: член при δ^2 в формуле для усредненных упругих постоянных равен: при $\alpha\beta\gamma\delta = 1111$ (поправка к жесткости композита в плоскости его слоев):

$$B\delta\mathrm{F}\delta\mathrm{F} = \frac{\delta^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 [(\lambda + 2\mu)(A^2 + D'^2) + 2\lambda AD' - 2\mu f'AN_1^{011} -$$

$$- 2(\lambda + 2\mu) f'D'N_2^{011'} + 2\mu f'^2 (N_1^{011'})^2 + (\lambda + 2\mu) f'2 (N_2^{011})^2] (y_2) \cos^2 y_1 dy_1\, dy_2 +$$

$$+ \frac{\delta^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 [2\mu (A'^2 + D^2) - 2(\lambda + 2\mu) fDN_2^{011'}] (y_2) \sin^2 y_1\, dy_1\, dy_2$$

$$A = A^{11}, \quad D = D^{11} \tag{3.6}$$

при $\alpha\beta\gamma\delta = 1122$:

$$B\delta\mathrm{F}\delta\mathrm{F} = \frac{\delta^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 [\lambda A^{11}D^{22} - (\lambda + 2\mu) f'D^{11}N_2^{022'} + 2\mu f'^2 N_1^{011'}N_1^{022'} +$$

$$+ (\lambda + 2\mu) f'^2 N_2^{011'}N_2^{022'}] \cos^2 y_1 dy_1\, dy_2 + \frac{\delta^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 [-\lambda A^{11'}D^{22} + 2\mu A^{11'}A^{22'} +$$

$$+ 2\mu D^{11}D^{22} - (\lambda + 2\mu) fD^{11}N_2^{022'}] \sin^2 y_1\, dy_1\, dy_2 \tag{3.7}$$

при $\alpha\beta\gamma\delta = 1212$:

$$B\delta\mathrm{F}\delta\mathrm{F} = \frac{\delta^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 [2\mu B'^2 + 2\mu C^2 + 2\mu f'N_1^{012'} + (\lambda + 2\mu) f'N_2^{012}] \cos^2 y_1\, dy_1\, dy_2 +$$

$$+ \frac{\delta^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 [(\lambda + 2\mu) B^2 + (\lambda + 2\mu) C'^2 - 2\lambda BC + 4\mu fBN_1^{012'}] \sin^2 y_1\, dy_1\, dy_2$$

$$B = B^{12}, \quad C = C^{12} \tag{3.8}$$

Отметим, что выражения в квадратных скобках в (3.6)—(3.8) являются функциями одной переменной y_2. Аналогичные полученным выражениям можно получить для всех остальных значений индексов $\alpha\beta\gamma\delta$.

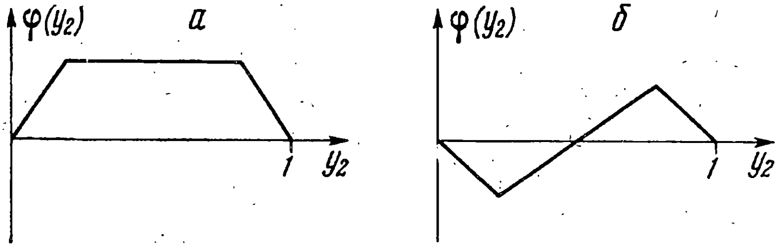
Производная функции $N_1^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\frac{\partial N_1^{\alpha\beta}}{\partial z_1}(\mathrm{z}(\mathrm{y})) = \frac{\partial N_1{}^{\circ\alpha\beta}}{\partial y_1} + \delta\left(A^{\alpha\beta}\cos y_1 - B^{\alpha\beta}\sin y_1 + f(y_1)\sin y_1 \frac{\partial N_1{}^{\circ\alpha\beta}}{\partial y_2}\right) \tag{3.9}$$

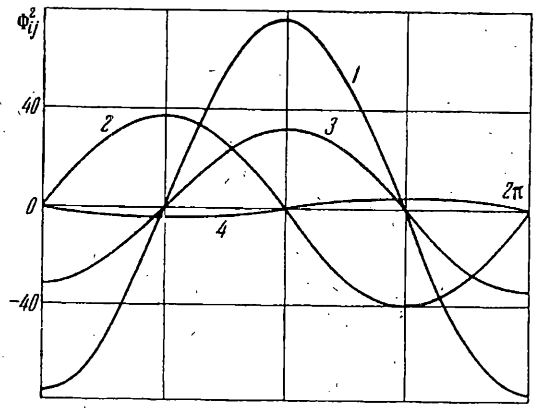
Аналогичные формулы можно получить для всех остальных значений индексов. При подсчете локальных напряжений формулы вида (3.9) сворачиваются с тензором упругих постоянных.

Для вычисления возмущенных значений упругих постоянных и локальных напряжений в композите следует решить систему (3.3), (3.4) относительно $\{C_i\}$ и провести интегрирование в (3.6)—(3.8). Это можно осуществить при конкретных значениях упругих постоянных и объемных содержаниях компонентов.

Попытки провести подсчет упругих постоянных слоистых и волокнистых композитов с несовершенствами (в частности, с изогнутыми слоями и волокнами) предпринимались во многих работах. Особенно привлекало интерес вычисление A_{1111}, см. (3.6). Приведенный выше подсчет $B\delta\mathrm{F}\delta\mathrm{F}$ оставляет мало надежд на получение простого выражения для подсчета возмущений усредненных жесткостей. Неаддитивность процедуры усреднения также подтверждает этот вывод [8, 9].



Фиг. 3



Фиг. 4

Рассмотрим применение изложенного метода на примере композиционного материала со структурой «пакет искривленных слоев». Функция $\varphi(y_2)$ из (1.1) имеет два основных типа, представленных на фиг. 3*а*, *б*. Тип (*а*) описывает колебание толщины слоев, (*б*) — их изгиб. Возьмем функцию $\varphi(y_2)$ в виде

$$\varphi(y_2) = \begin{cases} 3y_2 & \text{при } y_2 \in [0, H_1) \\ 1 & \text{при } y_2 \in (H_1, H_2] \\ 3(1 - y_2) & \text{при } y_3 \in (H_2, 1], \quad 0 \le H_1 \le H_2 \le 1 \end{cases}$$

Модули Юнга слоев пусть будут такие $E_1 = 0{,}7 \cdot 10^{11}$ Па, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па и для определенности более жесткий слой является средним, коэффициенты Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$ и $H_1 = 1/3$, $H_2 = 2/3$. После проведения численного решения системы уравнений получаем $B\delta F\delta F = 2210{,}5\ \delta^2$ при $\alpha\beta\gamma\delta = 1111$ соответственно $A_{1111} = (1{,}58 + 2210.5\ \delta^2) \cdot 10^{11}$ Па, где δ показано на фиг. 2, $B\delta F\delta F = 573\ \delta^2$ при $\alpha\beta\gamma\delta = 2222$ соответственно $A_{2222} = (1{,}34 + 573\ \delta^2) \cdot 10^{11}$ Па.

Производные определяются по формуле (3.9). Рассмотрим случай когда к композиту приложено усредненное напряжение вида $\sigma_{11} \neq 0$, $\sigma_{ij} = 0$ при $ij \neq 11$ (растяжение вдоль оси Ox_1). Соответствующие усредненные перемещения есть $u_1 = Cx_1$, $u_2 = -\nu^* Cx_2$ (где ν^* — усредненный коэффициент Пуассона). Локальные деформации (с учетом того, что в рассматриваемом случае $u_{1,2} = u_{2,1} = 0$) будут равны

$$\varepsilon_{ij}^L = 1/2\,(u_{i,j} + u_{\alpha,\beta} N_{i,j}^{\alpha\beta} + u_{j,i} + u_{\alpha,\beta} N_{j,i}^{\alpha\beta}) = \varepsilon_{ij} + 1/2\,(N_{i,j}^{11} - \nu^* N_{i,j}^{22} + N_{j,i}^{11} - \nu^* N_{j,i}^{22})$$

Подстановка выражений вида (3.9) дает формулы для подсчета локальных напряжений: в слое занятом n-м материалом

$$\sigma_{ij}^L = (\delta_{i1}\delta_{j1} E_n / \langle E \rangle + \delta\Phi_{ij}^n)\,\sigma_{11}$$

$$\langle E \rangle = E_1 (1 - H_2 + H_1) + E_2 (H_2 - H_1)$$

где Φ^n_{ij} — известные (вычисляемые численно) функции. На фиг. 4 представлены графики функций Φ^2_{ij} при $y_1 = H_2 - 0$ (т. е. на разделе компонентов, причём приводимые значения относятся к компоненту с $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па); кривые *1*, *2* соответствуют Φ^2_{11} и Φ^2_{22}, $\Phi^2_{12} = F1 + F2$, где $F1$ и $F2$ соответствуют кривые *3*, *4*.

Возмущение структуры в рассмотренном примере слабо сказывается на усредненных жесткостях и существенно влияет на локальные напряжения. Так 1% возмущение ($\delta = 0{,}01$) дает поправку к A_{1111} в $\sim 0{,}221 \cdot 10^{11}$ Па и к A_{2222} в $0{,}0573 \cdot 10^{11}$ Па при их невозмущенных значениях 1,58 и 1,34 ($\times 10^{11}$ Па) соответственно. Поправка же к напряжениям сравнима с напряжениями в идеальном композите. Так в последней формуле $E_2/\langle E \rangle \approx 1{,}26$, а $\delta\Phi^2_{11}$ достигает 0,8.

Таким образом усредненные характеристики слоистых и волокнистых композитов устойчивы по отношению к малым возмущениям структуры. Если возмущения сохраняют объемное содержание компонентов, имеет место чувствительность второго порядка.

Напряженно-деформированное состояние указанных композитов устойчиво относительно малых возмущений структуры и имеет чувствительность первого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Haug E. J., Choi K. K., Komkov V.* Design sensitivity analysis of structural systems. Orlando, Fla: Acad. Press. 1986. 381 p.
2. *Копьев И. М., Овчинский А. С.* Разрушение металлов, армированных волокнами. М.: Наука, 1977. 240 с.
3. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
4. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов//Успехи мат. наук. 1979. Т. 34. № 5. С. 65—133.
5. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 325 с.
6. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1978. 700 p.
7. *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1966. 319 с.
8. *Marcellini P.* Su una convergenza di funzioni convesse//Boll. Unione Mat. Ital. 1973. V. 8. No. 1. P. 137—158.
9. *Колпаков А. Г.* К задаче теории балок с начальными напряжениями//Прикл. мех. и тех. физика. 1992. № 6. С. 139—144.

Новосибирск

Поступила в редакцию 24.VII.1991