МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1993

УДК 531.36 : 534.1

© 1993 г. К. С. МАТВИЙЧУК

ТЕХНИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССА ДВИЖЕНИЯ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ПЛАТФОРМ, НЕСУЩИХ ПЕРЕМЕЩАЮЩИЕСЯ МАХОВИКИ

Изучается техническая устойчивость [1—5] динамических состояний колеблющихся и связанных параллельными нерастяжимыми нитями двух платформ, несущих медленно вращающиеся маховики, которые могут перемещаться в плоскости платформ [6—8]. Одно из тел помещено в карданов подвес. Получены достаточные условия технической устойчивости на конечном, бесконечном промежутке времени, асимптотической технической устойчивости рассматриваемой системы. Начальные данные динамического процесса не обязаны зависеть от поведения системы в последующие моменты времени наперед задаваемого промежутка времени [1, 9]. Рассматриваемая система описывается уравнениями Лагранжа второго рода при шести степенях свободы [7, 8, 10]. Задаваемый любой промежуток времени представлен зависимым от малого параметра, который, в свою очередь, зависит от основных параметров исходного процесса. Применяется прямой метод Ляпунова совместно с методом сравнения [4, 5, 11—13].

1. Формулировка условий исходной задачи. Рассматривается [7—8] динамический процесс малых нелинейных колебаний двух платформ, соединенных тремя нитями одинаковой длины L и несущих медленно вращающиеся маховики, которые могут перемещаться в плоскости платформы. Верхняя платформа помещена в карданов подвес. Предполагаем, что ось вращения верхней платформы может перемещаться в ее плоскости по определенному закону $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(t)$. В качестве действующих внешних сил учитываются сила тяжести и силы вязкого трения, действующие в подшипниках осей карданова подвеса. Тела, находящиеся в кардановом подвесе, называем верхним гиростатом (обозначим ВГ), а подвешенные на нитях — нижним гиростатом (обозначим НГ). Влиянием суточного вращения Земли пренебрегаем. В невозмущенном состоянии нити, соединяющие гиростаты, перпендикулярны плоскостям, проходящим через точки A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 крепления этих нитей к ВГ и НГ соответственно. Вводим системы координат: неподвижная система $O\xi\eta\zeta$ с началом в точке пересечения осей карданова подвеса, ось $O\zeta$ направлена вертикально вверх, $O\xi$ — горизонтально вдоль оси вращения внешнего кольца, $O\eta$ — дополняет систему $O\xi\eta\zeta$ до правой; система $Oxyz$ связана с ВГ, ось Oz направлена по оси вращения несущего тела, оси Ox, Oy — в плоскости, перпендикулярной оси Oz; с нижней несущей системой НГ связана система $Px'y'z'$, P — центр окружности, проходящей через точки A_2, B_2, C_2. По предположению центральные оси инерции обеих платфом и маховиков параллельны соответствующим осям связанных систем $Oxyz$, $Px'y'z'$.

Пусть в системе $Px'y'z'$ координаты точек A_2, B_2, C_2 есть $(x_i', y_i', 0)$, $i = 1, 2, 3$. Координаты центра P и радиус R описанной около треугольника $A_2B_2C_2$ окружности равны

$$x_p' = -\frac{1}{2\Delta}[r_{12}(y_1' - y_3') - r_{13}(y_1' - y_2')] \tag{1.1}$$

$$y_p' = \frac{1}{2\Delta}\,[r_{12}(x_1' - x_3') - r_{13}(x_1' - x_2')]$$

$$\Delta = (x_1' - x_2') - (x_1' - x_3')(y_1' - y_2'), \quad r_{12} = x_1'^2 + y_1'^2 - (x_2'^2 + y_2'^2)$$

$$r_{13} = x_1'^2 + y_1'^2 - (x_3'^2 + y_3'^2), \quad R = [(x_3' - x_p')^2 + (y_3' - y_p')^2]^{1/2}$$

которые следуют из уравнений $(x_i' - x_p')^2 + (y_i' - y_p')^2 = R^2$ $(i = 1, 2, 3)$.

Рассматриваемая система имеет шесть степеней свободы. Ее динамическое состояние, согласно работе [7], характеризуется шестью обобщенными координатами ψ, θ, φ, α, x_p, y_p. Углы ψ, θ, φ характеризуют переход от системы $O\xi\eta\zeta$ к системе $Oxyz$ поворотами по схеме 3, 2, 1; угол α определяет поворот НГ относительно верхнего тела около полюса P; переменные x_p, y_p характеризуют смещение полюса P в системе $Oxyz$ [7, 8]. Матрица перехода от системы $O\xi\eta\zeta$ к $Oxyz$ имеет представление

$$A = \begin{Vmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi\sin\theta - \cos\varphi\sin\psi & \sin\psi\sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\theta \\ \cos\psi\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\theta\cos\varphi - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\theta \end{Vmatrix}$$

Рассматриваем малые движения системы около положения ее равновесия. Получаются следующие выражения векторов абсолютной угловой скорости верхнего и нижнего несущих тел в проекциях на оси, с ними связанные:

$$\omega_1 = \dot\varphi\mathbf{i} + \dot\theta\mathbf{j} + \dot\psi\mathbf{k}, \quad \omega_2 = \dot\varphi\mathbf{i}' + \dot\theta\mathbf{j}' + (\dot\psi + \dot\alpha)\,\mathbf{k}' \tag{1.2}$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}; \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ — единичные векторы соответствующих систем координат $Oxyz$, $Px'y'z'$. Кинетическая энергия рассматриваемой системы тел состоит из кинетической энергии колец карданова подвеса и кинетической энергии всех подвешенных в нем тел [7; 8]. Кинетическая энергия колец карданова подвеса

$$T_k = \tfrac{1}{2}(\overline{A}_1 + \overline{A}_2)\,\dot\varphi^2 + \tfrac{1}{2}B\dot\theta^2 \tag{1.3}$$

где $\overline{A}_1, \overline{A}_2$ — моменты инерции внешнего и внутреннего карданова кольца относительно оси $O\xi$, B — момент инерции внутреннего кольца относительно его оси вращения. Кинетическая энергия всех подвешенных тел

$$T_\Pi = \sum_{i=1}^{s}\Big\{\frac{1}{2}m_i\,[\omega_1 \times \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{v}]^2 + \frac{1}{2}(\omega_1 + \dot\lambda_i)\,J_i^c\,(\omega_1 + \dot\lambda_i) + \frac{1}{2}m_i'\,[\omega_1 \times \mathbf{r}_p +$$
$$+ \dot{\mathbf{r}}_p + \omega_2 \times \mathbf{r}_i' + \dot{\mathbf{r}}_i' + \mathbf{v}]^2 + \frac{1}{2}(\omega_2 + \dot\lambda_i')\,J_i'^c\,(\omega_2 + \dot\lambda_i')\Big\} \tag{1.4}$$

Здесь m_i, m_i' $(i = 1, \ldots s)$ – массы, $J_i^c, J_i'^c$ $(i = 1, \ldots, s)$ — центральные тензоры инерции платформ и маховиков, где $i > 1$ отвечает несомым маховикам; $\dot\lambda_i(t)$, $\dot\lambda_i'(t)$, $i = 2, \ldots, s$ – относительные угловые скорости несомых маховиков, при этом $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1' = 0$ и, следовательно, $\dot\lambda_1 = \dot\lambda_1' = 0$; $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\mathbf{r}_i' = (x_i', y_i', z_i')$, $i = 1, \ldots, s$ — радиусы-векторы центров масс соответствующих тел в связанных системах $Oxyz$, $Px'y'z'$ соответственно, при этом учитывается, что $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i'$ — функции времени $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$, $\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i'(t)$, так как маховики имеют возможность перемещаться по платформам; $\mathbf{r}_p$ — радиус-вектор точки P в системе координат $Oxyz$. Рассматриваются малые перемещения НГ, при которых $x_p \ll L$, $y_p \ll L$. В этом случае перемещения нижних тел в направлении оси Oz являются величинами второго порядка малости относительно x_p/L, y_p/L. Поэтому в выражении кинетической энергии энергия системы нижних тел при движении их в направлении оси Oz пренебрегается, т. е. полагаем $z_p = \mathrm{const} \equiv L$. Число маховиков ВГ и НГ считаем одинаковым $s = s'$.

Обозначим $q_1 = \psi$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, $q_4 = \alpha$, $q_5 = x_p$, $q_6 = y_p$, $q = (q_1, \ldots, q_6)$,

$\dot q = (\dot q_1, \ldots, \dot q_6)$. Используя [8] динамически информативную часть кинетической энергии для рассматриваемой системы согласно (1.3), (1.4), именно

$$T = \frac{1}{2}\sum_{m,\,n=1}^{6} a_{mn}\dot q_m \dot q_n + \sum_{i=1}^{6} b_i \dot q_i$$

получаем уравнения движения системы в виде уравнений Лагранжа второго рода [10]:

$$\sum_{j=1}^{6} \frac{d}{dt}(a_{ij}(t)\,\dot q_j) + \dot b_i(t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + R_i(\dot q) \equiv Q_i(t, q, \dot q) \quad (i = 1, \ldots, 6) \tag{1.5}$$

$$\Pi = -\left(\frac{1}{2}\sum_{m,\,n=1}^{6} c_{mn} q_m q_n + \sum_{n=1}^{6} f_n q_n\right)$$

где $R_i(\dot q)$ — обобщенные силы, характеризующие рассеяние энергии в системе: $R_i(\dot q) = R_i(\dot q_i)$, $R_i(0) = 0$; Π – потенциальная энергия системы. В (1.5) обозначено

$$c_{mn} = c_{nm},\ c_{11} = c_{12} = c_{13} = c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{23} = c_{26} = c_{35} = c_{56} = 0,$$

$$c_{22} = g\,[-Mz_c - M'(L - |\Delta'|^2/L)],\quad c_{33} = g\,[-Mz_c - M'(L - |\Delta'|^2/L)], \tag{1.6}$$

$$c_{44} = -gM'R^2/L,\ c_{55} = c_{66} = -gM'/L,\ c_{24} = -gM'\Delta y',\ c_{25} = -gM',$$

$$c_{34} = -gM'\Delta x',\quad c_{36} = gM',\quad c_{45} = -gM'\Delta y'/L,\quad c_{46} = gM'\Delta x'/L,$$

$$f_1 = f_4 = 0,\ f_2 = -g(Mx_c + M'\Delta x'),\ f_3 = g(My_c + M'\Delta y'),$$

$$f_5 = -gM'\Delta x'/L,\ f_6 = -gM'\Delta y'/L,\quad |\Delta'| = [(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2]^{1/2},$$

$$Q_1 = -h_1\dot\psi,\quad Q_2 = g\,\{-Mx_c - M'x_c - M'\Delta x' - [Mz_c - M(L - |\Delta'|^2/L)]\,\theta -$$

$$- M'\Delta y'\alpha - M'x_p\} - h_2\dot\theta,\quad Q_3 = g\,\{My_c + M'\Delta y' - [Mz_c - M'(L - |\Delta'|^2/$$

$$/L)]\,\varphi - M'\Delta x'\alpha + M'y_p\} - h_3\dot\varphi,\quad Q_4 = g\,(-\Delta y'\theta - \Delta x'\varphi + R^2\alpha/L -$$

$$-\Delta y'x_p/L + \Delta x'y_p/L)\,M',\quad Q_5 = g\,(-\Delta x'/L - \theta - \Delta y'\alpha/L - x_p/L)\,M'$$

$$Q_6 = g\,(-\Delta y'/L + \varphi - \Delta x'\alpha/L - y_p/L)\,M'$$

$$a_{mn} = a_{nm},\quad a_{11} = \sum_{i=1}^{s}[J_{i0}^{z} + J_{ip}^{\prime z'} + m_i'(q_5^2 + q_6^2 + 2y_i'q_6 + 2x_i'q_5)],$$

$$a_{22} = \sum_{i=0}^{s}[J_{i0}^{y} + J_{ip}^{\prime y'} + m_i'(L^2 + q_5^2 + 2Lz_i' + 2q_5x_i')] + B$$

$$a_{33} = \sum_{i=1}^{s}[J_{i0}^{x} + J_{ip}^{\prime x'} + m_i'(L^2 + q_6^2 + 2Lz_i' + 2q_6y_i')] + \bar A_1 + \bar A_2$$

$$a_{44} = \sum_{i=1}^{s}[J_{ip}^{\prime z'} + m_i'(2y_i'q_6 + 2x_i'q_5)]$$

$$a_{55} = a_{66} = \sum_{i=1}^{s} m_i',\quad a_{12} = \sum_{i=1}^{s}[-m_iz_iy_i - m_i'(z_i' + L)(y_i' + q_6)],$$

$$a_{13} = \sum_{i=1}^{s}[-m_iz_ix_i - m_i'(z_i' + L)(x_i' + q_5)],\quad a_{14} = \sum_{i=1}^{s}[J_{ip}^{\prime z'} + m_i'(y_i'q_6 + x_i'q_5)],$$

$$a_{15} = \sum_{i=1}^{s} [-m_i'(q_6 - y_i')], \quad a_{16} = \sum_{i=1}^{s} [m_i(q_5 + x_i')],$$

$$a_{23} = \sum_{i=1}^{s} [-m_i y_i x_i - m_i'(y_i' + q_6(x_i' + q_5)], \quad a_{24} = \sum_{i=1}^{s} [-m_i'(L + z_i')y_i'],$$

$$a_{25} = \sum_{i=1}^{s} [m_i'(L + z_i')], \quad a_{26} = 0$$

$$a_{34} = \sum_{i=1}^{s} [-m_i'(L + z_i')x_i'], \quad a_{35} = 0, \quad a_{36} = \sum_{i=1}^{s} [-m_i'(L + z_i')],$$

$$a_{45} = \sum_{i=1}^{s} (-m_i'y_i'), \quad a_{46} = \sum_{i=1}^{s} m_i'x_i', \quad a_{56} = 0, \quad b_1 = \sum_{i=1}^{s} [J_{ip}^{\prime z'}\dot\lambda_i'(t) + J_{i0}^{z}\dot\lambda_i(t)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \{m_i[-y_i(\dot x_i + v_x) + x_i(\dot y_i + v_y)] + m_i'[-y_i'(\dot x_i' + v_x) +$$

$$+ x_i'(\dot y_i' + v_y) - y_p(\dot x_i' + v_x) + x_p(\dot y_i' + v_y)]\}$$

$$b_2 = \sum_{i=1}^{s} \{m_i[z_i(\dot x_i + v_x) - x_i(\dot z_i + v_z)] + m_i'[z_i'(\dot x_i' + v_x) - x_i'(\dot z_i' + v_z) +$$

$$+ L(\dot x_i' + v_x) - x_p(\dot z_i' + v_z)]\}, \quad b_3 = \sum_{i=1}^{s} \{m_i[y_i(\dot z_i + v_z) + z_i(\dot y_i + v_y)] +$$

$$+ m_i'[z_i'(\dot y_i' + v_y) + y_i'(\dot z_i' + v_z) - L(\dot y_i' + v_y) + y_p(\dot z_i' + v_z)]\}$$

$$b_4 = \sum_{i=1}^{s} \{J_{ip}^{\prime z'}\dot\lambda_i + m_i'[-y_i'(\dot x_i + v_x) + x_i'(\dot y_i' + v_y)]\}$$

$$b_5 = \sum_{i=1}^{s} [m_i'(\dot x_i' + v_x)], \quad b_6 = \sum_{i=1}^{s} [m_i'(\dot y_i' + v_z)]$$

В выражениях обобщенных сил радиус-вектор $\mathbf{r}^c = (x_c, y_c, z_c)$ центра масс ВГ в системе координат $Oxyz$ и радиус-вектор $\Delta' = (\Delta x', \Delta y', 0)$ центра масс НГ в системе $Px'y'z'$, проведенный из полюса P, являются зависимыми от времени $\mathbf{r}^c = \mathbf{r}^c(t)$, $\Delta' = \Delta'(t)$; $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — переносная скорость верхней платформы относительно точки пересечения осей вращения рамок карданова подвеса. Так как скорость смещения верхней платформы задается компонентами v_x, v_y, то имеем $\dot x_1(t) = \dot y_1(t) = 0$. Здесь J_{i0}^{v}, $J_{ip}^{\prime v}$, $v = (x, y, z)$, $i = 1, \ldots, s$ — главные моменты инерции тел относительно соответствующих связанных осей; M, M' — суммарные массы ВГ и НГ; g — ускорение свободного падения.

Ставится задача сформулировать условия технической устойчивости динамического состояния рассматриваемой системы, которая описывается системой уравнений (1.5) при заданных соотношениях (1.6).

2. Условия технической устойчивости соединенных нитями платформ, несущих перемещающиеся маховики. Представим систему уравнений (1.5) в виде

$$\sum_{j=1}^{6} a_{ij}\ddot q_j = \bar Q_i(t, q, \dot q, \dot a_i), \quad \bar Q \equiv Q(t, q, \dot q) - \dot b_i(t) - \sum_{j=1}^{6} \dot a_{ij}\dot q_j, \tag{2.1}$$

$$\dot a_i = (\dot a_{i1}, \ldots, \dot a_{i6}) \quad (i = 1, \ldots, 6)$$

Принимая во внимание соотношения (1.6), полагаем, что определитель

$D = \|a_{ij}\|$, составленный из коэффициентов левых частей уравнений (2.1), отличен от нуля [10]. Обозначим через Δ_j определители, полученные из D заменой в нем j-го столбца столбцом из $\overline{Q}_i$, $i = 1, \ldots, 6$. Получаем эквивалентную систему уравнений, разрешенную относительно производных $\ddot{q}_n$; $n = 1, 2, \ldots, 6$ [8, 10]:

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = \frac{\Delta_n}{D}(t, q, \dot{q}, \dot{a}_n) \quad (n = 1, \ldots, 6) \tag{2.2}$$

Из-за громоздкости здесь не приводятся в раскрытом виде выражения для D и Δ_n, $n = 1, \ldots, 6$. Введем замену переменных $dq_i/dt = x_i$, $i = 1, \ldots, 6$. Обозначим D_{i+n} — минор элемента a_{i+n} в определителе D:

$$|\dot{a}_i| = \sum_{n=1}^{6} \max |\dot{a}_{in}|, \quad \frac{\Delta_n}{D} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{6} (-1)^{i+n} D_{i+n} \overline{Q}_i (t, q, \dot{q}, \dot{a}_n) \equiv$$

$$\equiv X_n (t, q_1, \ldots, q_6, x_1, \ldots, x_6, \dot{a}_n) \quad (n = 1, \ldots, 6)$$

Получаем систему уравнений

$$dq_i/dt = x_i \quad (i = 1, \ldots, 6); \tag{2.3}$$

$$dx_n/dt = X_n (t, q_1, \ldots, q_6, x_1, \ldots, x_6, \dot{a}_n) \quad (n = 1, \ldots, 6)$$

Считаем, что динамический процесс исследуемой системы происходит при наперед заданных начальных условиях

$$q_i(t_0) = q_i^0, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad t_0 \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, 6) \tag{2.4}$$

Зададимся некоторой постоянной $N > 0$, зависящей от параметров исходного процесса. Например, пусть N есть абсолютное максимальное значение величины $|Q| = \Sigma |Q_i|$. Поскольку рассматриваются малые движения исследуемой системы, то можем считать, что границы максимально допустимых значений координат и другие параметры системы являются зависимыми от малого параметра $\mu \in (0, 1)$. Задачу Коши (2.3), (2.4) рассматриваем в наперед заданных интервале времени $T = [t_0, N\mu^{-1}]$ и области $\Omega = \{q_i, x_i, \dot{a}_i : |q_i| \leq l_i, |x_i| \leq n_i, |\dot{a}_i| \leq a_i, i = \overline{1, 6}\}$, где положительные постоянные N, l_i, n_i, a_i заранее заданы в соответствии с соотношениями (1.6). Полагаем, что малый положительный параметр μ удовлетворяет условиям

$$\mu \leq M_0^{-1}, \quad M_0 \equiv \max \{\sup [|X_i (t, q_1, \ldots, q_6, x_1, \ldots, x_6, \dot{a}_i)| \tag{2.5}$$

$$(q, x, \dot{a}_i) \in \Omega, \quad t \in T, \quad i = 1, \ldots, 6]\}, \quad T \subset I \equiv [t_0, +\infty), \quad t_0 \geq 0$$

Учитывая (1.6), считаем, что задача Коши (2.3), (2.4) в заданной области $T \times \Omega$ удовлетворяет необходимым условиям существования решения [10]. Свяжем с системой (2.3), (2.4) функцию Ляпунова [11, 12] следующего вида:

$$V(t, q, x) = \exp [\beta(t)] \sum_{i=1}^{6} (q_i^2 + x_i^2) \tag{2.6}$$

где $\beta(t)$ — наперед заданная ограниченная: $|\beta(t)| \leq K$, дифференцируемая функция переменного $t \in T$ и $|d\beta(t)/dt| \leq K_1$; $K, K_1 > 0$ — постоянные. В частности, можно выбрать V таким, чтобы $\beta(t) = \sin^2 [\exp(-t)]$.

Определение 1. Динамический процесс, описываемый системой уравнений (1.5) при начальных условиях (2.4), называется технически устойчивым на конечном промежутке времени T, если вдоль возмущенного решения

$(q_1(t), \ldots, q_6(t), x_1(t), \ldots, x_6(t))$ задачи Коши (2.3), (2.4) для функции Ляпунова $V(t, q, x)$ выполняется условие

$$V(t, q_1(t), \ldots, q_6(t), x_1(t), \ldots, x_6(t)) \leq P(t), \quad t \in T \tag{2.7}$$

лишь только в начальный момент t_0 имеет место неравенство

$$V(t_0, q_1^0, \ldots, q_6^0, x_1^0, \ldots, x_6^0) \leq b_0, \quad t_0 \in T \tag{2.8}$$

где определенная в области T ограниченная функция $P(t)$ удовлетворяет условию

$$0 < P(t) \leq C, \quad C = \mathrm{const} > 0; \quad P(t_0) \geq b_0, \quad b_0 = \mathrm{const} > 0 \tag{2.9}$$

При этом функция $P(t)$, постоянные C, b_0 наперед заданы.

Определение 2. Рассматриваемый динамический процесс (1.5), (2.4) называется технически устойчивым на бесконечном промежутке времени I, когда условия определения 1 справедливы при любых $T \subseteq I$. Если при этом вдоль возмущенного решения задачи (2.3), (2.4):

$$\lim_{t \to +\infty} V(t, q(t), x(t)) = 0$$

то динамический процесс (1.5), (2.4) называется технически асимптотически устойчивым.

Из определений 1,2 следует, что условия технической устойчивости существенно отличаются от свойств устойчивости по Ляпунову не только тем, что система рассматривается на любом конечном наперед заданном промежутке времени, но и тем, что ограничения на начальные состояния процесса не зависят от условий заданной межорации последующих состояний процесса в течение заданного промежутка времени. Необязательность условия отрицательной определенности полной производной функции Ляпунова вдоль решений задачи Коши (2.3), (2.4) (или вдоль решений системы (1.5), (2.4), что все равно), в отличие от устойчивости по Ляпунову, расширяет область значений на параметры исследуемого процесса [9].

Для формулировки достаточных условий технической устойчивости исходного процесса воспользуемся методом сравнения с помощью соответствующего линейного неоднородного дифференциального уравнения сравнения [4, 5].

Найдем полную производную от функции $V(t, q, x)$ в силу системы (2.3), (2.4):

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d\beta(t)}{dt} V(t) + 2\exp[\beta(t)] \sum_{i=1}^{6} x_i(t)\,[q_i(t) + X_i(t, q(t), x(t), \dot{a}_i(t))] \tag{2.10}$$

Пусть производная (2.10) удовлетворяет условию

$$\left| \exp[\beta(t)] \sum_{i=1}^{6} x_i(t) [\, q_i(t) + X_i(t, q(t), x(t), \dot{a}_i(t))] \right| \leq f(t) \tag{2.11}$$

где $f(t)$ — наперед заданная неотрицательная, интегрируемая по $t \in T$ функция. В частности, можем положить

$$f(t) = \exp[\beta(t)] \sum_{i=1}^{6} n_i (l_i + M_0)$$

Рассмотрим функцию $z(t) = V(t, q(t), x(t)) - \sigma(t)$ вдоль решения задачи (2.3), (2.4). Оценки для (2.10) вдоль решения этой задачи приводят к неравенству

$$\frac{dz(t)}{dt} \leq \frac{d\beta(t)}{dt} [z(t) + \sigma(t)], \quad \sigma(t) = 2\int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\varepsilon, \quad t \in T \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует задача Коши сравнения вида

$$dy/dt = \gamma(t)\,[y + \sigma(t)], \quad \gamma(t) \equiv d\beta(t)/dt, \quad t \in T \tag{2.13}$$

$$y(t_0) = y_0 \geq V(t_0,\ q_1^0, \ldots, q_6^0,\ x_1^0, \ldots, x_6^0), \quad t_0 \in T \tag{2.14}$$

При заданных условиях на исходные параметры задача (2.13), (2.14) имеет в области T непрерывное решение вида

$$y(t) = y_0 \exp\left[\int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\,d\tau\right] + 2\exp\left[\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,dt\right]\int_{t_0}^{t} f(\tau) \times \tag{2.15}$$

$$\times \exp\left[-\int_{t_0}^{\tau} \gamma(\nu)\,d\nu\right] d\tau - \sigma(t)$$

По соответствующей теореме [13] о дифференциальных неравенствах находим $z(t) \leq y(t)$, $t \in T$, откуда для $V(t, q, x)$ имеем $V(t,\ q(t),\ x(t)) \leq y(t) + \sigma(t)$, $t \in T$. Вдоль решения задачи (2.3), (2.4) окончательно получаем оценку

$$V(t,\ q(t),\ x(t)) \leq P(t), \quad P(t) \equiv y_0 \exp[\beta(t) - \beta(t_0)] + \tag{2.16}$$

$$+ 2\exp[\beta(t)]\int_{t_0}^{t} f(\tau)\exp[-\beta(\tau)]\,d\tau, \quad t,\ t_0 \in T$$

Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{t_0}^{t} f(\tau)\exp[-\beta(\tau)]\,d\tau \leq M^{\vee}(N\mu^{-1} - t_0)\exp(K) \tag{2.17}$$

где наперед заданная постоянная $M^{\vee}$ вдоль решения задачи (2.3), (2.4) удовлетворяет неравенству $|dV(t)/dt| \leq M^{\vee}$ согласно (2.10). В частности, для $M^{\vee}$ возможно значение:

$$M^{\vee} = K_1 \exp(K)\sum_{i=1}^{6}(l_i^2 + n_i^2) + 2\exp(K)\sum_{i=1}^{6} n_i(l_i + M_0)$$

Отсюда получаем оценку

$$P(t) \leq C, \quad C \equiv y_0 \exp[K - \beta(t_0)] + 2M^{\vee}(N\mu^{-1} - t_0)\exp(2K), \quad t \in T \tag{2.18}$$

Следовательно, в силу (2.14), (2.16) система (2.3), (2.4) технически устойчива в области T, т. е. в области T технически устойчива исходная динамическая система (1.5), (2.4). Когда задача Коши (2.3), (2.4) и система сравнения (2.13), (2.14) определены на любом промежутке $T \subseteq I$ и в каждой области $T \subseteq I$ справедливы оценки (2.14), (2.16) при условии (2.18), тогда исходный динамический процесс технически устойчив на бесконечном промежутке времени. Если дополнительно к технической устойчивости процесса (1.5), (2.4) в области I выполняется условие

$$2\int_{t_0}^{t} f(\tau)\exp[-\beta(\tau)]\,d\tau \to -y_0 \exp[-\beta(t_0)], \quad t \to +\infty \tag{2.19}$$

тогда процесс (1.5), (2.4) технически асимптотически устойчив, ибо при выполнении (2.19) имеем $P(t) \to 0$, $t \to +\infty$ согласно (2.16).

Отметим, что в случае быстрого вращения маховиков динамический процесс системы будет характеризоваться другими уравнениями движения и, следовательно, полученные здесь условия технической устойчивости будут тогда непригодными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карачаров К. А., Пилютик А. Г.* Введение в техническую теорию устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1962. 243 с.
2. *Сиразетдинов Т. К.* Метод функций Ляпунова при исследовании некоторых свойств процессов с последействием//Прямой метод в теории устойчивости и его приложение. Новосибирск: Наука, 1961. С. 64—75.
3. *Кириченко Н. Ф.* Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1972. 212 с.
4. *Матвийчук К. С.* К исследованию технической устойчивости системы связанных тел с элементами демпфирования//Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 5. С. 100—106.
5. *Матвийчук К. С.* Техническая устойчивость нелинейных динамических систем с медленными и быстрыми движениями//Докл. АН УССР. Сер. А. 1986. № 2. С. 12—15.
6. *Закржевский А. Е., Хорошилов В. С.* Программные движения деформируемой конструкции с пространственной гиросиловой системой управления//Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 11. С. 107—112.
7. *Плахтиенко Н. П.* О малых движениях двух связанных платформ, несущих перемещающиеся маховики//Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 7. С. 103—107.
8. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
9. *Skalmierski B., Tylikowski A.* Stabilnośc ukladów dynamicznych. Warszawa: PWN, 1973. 174 p.
10. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961. 311 с.
11. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова. Киев: Наук. думка, 1981. 412 с.
12. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
14. *Szarski J.* Differential Inequalities. Warszawa: PWN, 1967. 256 p.

Киев

Поступила в редакцию
26.XI.1991