

УДК 539.3

© 1993 г. С. В. КУЗНЕЦОВ

ПОРИСТЫЕ СРЕДЫ С ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

Пористые среды находят широкое применение в качестве конструкционных и изолирующих материалов, причем внутреннее давление, действующее на поверхности пор, способно в значительной степени изменять физико-механические свойства таких материалов. Традиционно используемые в механике дисперсных композитов методы самосогласования, вариационные и статистические в случае пористых сред, в особенности при высоких значениях коэффициента пористости, приводят к существенным погрешностям в оценке эффективных упругих характеристик. Кроме того, эти методы неприменимы при определении уровня и характера распределения микроструктурных напряжений.

Наиболее строгие результаты в механике периодических сред получены с помощью метода двухмасштабных асимптотических разложений. Этот метод находит широкое применение при анализе эффективных характеристик дисперсных композитов, частным случаем которых являются пористые среды [1—6]. Правда, полученные в [1—6] выражения для эффективных тензоров не являются окончательными в том смысле, что для их применения требуется дополнительно решить так называемую ячейечную проблему, т. е. построить периодическое решение уравнений теории упругости.

Решение двумерных ячейечных задач теории упругости относительно просто осуществляется с помощью разложения потенциалов Колосова — Мусхелишвили в ряды по эллиптическим и родственным мероморфным функциям [5, 7]. При переходе к большему числу измерений трудности существенно возрастают. Известно несколько различных подходов для решения ячейечных проблем в R^3 . В [8] граничные условия на поверхности пор и периодические условия на внешней поверхности ячейки удовлетворяются путем решения системы интегральных уравнений первого рода с ядром — фундаментальным решением Кельвина. В [9, 10] ячейечная проблема дисперсных пористых сред сводится к численному определению периодических полей трансформирующих деформаций Эшелби. Периодические фундаментальные решения для начально изотропных (т. е. до введения включений) дисперсных композиционных сред в сочетании с численным методом решения граничных интегральных уравнений применяются в [11].

Ниже на основе периодических фундаментальных решений уравнений равновесия анизотропных сред [12] и метода двухмасштабных асимптотических разложений получены аналитические формулы для эффективных тензоров упругости пористых сред с внутренним давлением, исследованы свойства корректирующих тензоров, рассмотрен пример расчета.

1. Основные операторы и символы. Рассматривается первоначально анизотропная однородная упругая среда, уравнения равновесия которой в R^3 имеют вид

$$A(\partial_x)u \equiv -\operatorname{div} C \cdot (\nabla u) \quad (1.1)$$

где u — вектор перемещений; C — четырехвалентный строго эллиптический тензор упругости. Предполагается, что исследуемая среда является гиперупругой, что обеспечивает симметрию C по крайним парам индексов ($C^{ijmn} = C^{mni j}$).

Преобразование Фурье

$$f^\vee(\xi) = \int_{R^3} f(x) \exp(-2\pi i x \cdot \xi) dx$$

примененное к оператору A , дает соответствующий символ

$$A^\vee(\xi) = 4\pi^2 \xi \cdot C \cdot \xi \quad (1.2)$$

Аналогичным образом определяется символ оператора напряжений на граничном многообразии с полем нормалей ν :

$$T^\nu(\nu, \xi) = 2\pi \cdot \nu \cdot C \cdot \xi \quad (1.3)$$

Используя символ A^ν и определение фундаментального решения E уравнений (1.1), символ E^ν может быть представлен в виде

$$E^\nu(\xi) = A_0^\nu(\xi) / \det A^\nu(\xi) \quad (1.4)$$

где A_0^ν — матрица алгебраических дополнений символа A^ν . Формула (1.4) показывает, что символ E^ν строго эллиптивен и положительно однороден по ξ степени -2 . В общем случае анизотропии известны лишь численные способы восстановления E по его символу [13], однако периодическое фундаментальное решение удается построить непосредственно по символу E^ν .

Для построения периодического фундаментального решения E_p рассмотрим среду с силовыми особенностями, периодически расположенными в узлах некоторой пространственной решетки Λ . Пусть $a_i, i=1, 2, 3$ — линейно независимые векторы главных периодов Λ , так что любой из узлов $m \in \Lambda$ представим в виде $m = \sum m_i a_i$, где $m_i \in Z$ — целочисленные координаты узла m в периодическом базисе (a_i) .

Введем в рассмотрение сопряженный базис (a_i^*) такой, что $a_i^* \cdot m = m_i$. Ясно, что при взаимно ортогональных векторах основного базиса векторы сопряженного базиса ориентированы вдоль соответствующих векторов основного базиса. Решетка сопряженного базиса далее будет обозначаться Λ^* . С учетом принятых обозначений периодическая дельта-функция (δ_p) , размещенная в узлах решетки Λ , может быть разложена в ряд

$$\delta_p(x) = 1/V_Q \sum_{m^* \in \Lambda^*} \exp(-2\pi i m^* \cdot x) \quad (1.5)$$

где V_Q — объем фундаментальной области (ячейки периодичности), образованной векторами основного периодического базиса $V_Q = |a_1 \wedge a_2 \wedge a_3|$.

Подстановка периодического фундаментального решения E_p в уравнение (1.1) должна давать

$$A(\partial_x) E_p = \delta_p I \quad (1.6)$$

где I — единичная диагональная матрица. Разыскивая E_p также в виде тригонометрического ряда, из (1.5), (1.6) получаем следующую формулу, по которой E_p вычисляется с точностью до постоянного тензора:

$$E_p'(x) = (1/V_Q) \sum_{m^* \in \Lambda_0^*} E^\nu(m^*) \exp(-2\pi i m^* \cdot x) \quad (1.7)$$

где Λ_0^* — решетка сопряженного базиса без нулевого узла. Имеет место следующий результат [12]:

Лемма 1. Ряд (1.7) сходится в L^1 -топологии, определяя собой периодическое фундаментальное решение класса $L^1(Q, R^3 \otimes R^3)$, где L^1 — пространство интегрируемых функций с нулевым средним значением в Q . Кроме того

$$E_p'(x) = E(x) + G(x), \quad G \in C^\infty(Q, R^3 \otimes R^3) \quad (1.8)$$

Заметим, что ряд (1.7) не является абсолютно сходящимся ни при каких $x \in R^3$ [14].

2. Асимптотические разложения. Представим поле перемещений в периодической среде в виде асимптотического ряда

$$u(x, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(x, Y), \quad Y = x/\lambda \quad (2.1)$$

переменные Y — это так называемые быстрые переменные, характеризующие осцилляции поля u . Переход к переменным x, Y в (1.1) дает [15]:

$$A(\partial_x, \partial_Y) \equiv \lambda^{-2} A_1(\partial_Y) + \lambda^{-1} A_2(\partial_x, \partial_Y) + \lambda^0 A_3(\partial_x) \quad (2.2)$$

$$A_1(\partial_Y) \equiv -\nabla_Y \cdot C(Y) \cdot \nabla_Y, \quad A_2(\partial_x, \partial_Y) \equiv -\nabla_x \cdot C(Y) \cdot \nabla_Y - \nabla_Y \cdot C(Y) \cdot \nabla_x$$

$$A_3(\partial_x) \equiv -\nabla_x \cdot C(Y) \cdot \nabla_x, \quad C(Y) = \begin{cases} C, & Y \in Q \setminus \Omega \\ 0, & Y \in \Omega \end{cases}$$

в выражениях (2.2) и далее переменные x и Y считаются независимыми; Ω — это собственно регулярная область, занятая порами в Q . Подстановка асимптотического ряда (2.1) в (2.2) дает

$$A_1(\partial_Y) u_0 = 0$$

$$A_1(\partial_Y) u_1 = -A_2(\partial_x, \partial_Y) u_0 \quad (2.3)$$

$$A_1(\partial_Y) u_2 = -A_2(\partial_x, \partial_Y) u_1 - A_3(\partial_x) u_0$$

Первые три уравнения (2.3), соответствующие $\lambda^{-2}, \lambda^{-1}, \lambda^0$, представляют наибольший интерес в связи с отысканием эффективных характеристик пористой среды. Необходимость в остальных уравнениях возникает лишь при анализе поведения микроструктурных полей вблизи границ или же в областях больших градиентов (то x).

Обозначим через W подпространство в $H^1(Q \setminus \Omega, R^3 \otimes R^3)$ такое, что $\Phi \in W$ эквивалентно Φ , периодически и $T(v_y, \partial_y) \Phi dY|_{\partial\Omega} = 0$; где T — оператор напряжений на $\partial\Omega$ с вектором единичной внешней нормали v , направленным из $Q \setminus \Omega$.

Лемма 2. Для разрешимости (mod R^3) уравнения $A_1(\partial_Y) \Phi = F$, $\Phi \in W$; $F \in H^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы среднее значение F в $Q \setminus \Omega$ равнялось нулю.

Доказательство. Второе неравенство Корна, доказательство которого в силу (1.8) методами интегральных уравнений сводится к непериодическому случаю, обеспечивает коэрцитивность билинейной формы

$$a_1(\Phi, \Psi) = \int_{Q \setminus \Omega} \nabla_Y \Phi \cdot C \cdot \nabla_Y \Psi dY$$

в W/R^3 . Необходимость рассмотрения фактор-пространства W/R^3 обусловлена существованием нетривиальных периодических решений уравнения $\text{sum}(\nabla \Phi) = 0$. Причем, в отличие от непериодического случая, такими решениями являются только аффинные смещения. Далее остается заметить, что при $\Phi \in W$:

$$\int_{Q \setminus \Omega} A_1(\partial_Y) \Phi dY = 0$$

Следствие 1. Единственным периодическим решением первого уравнения (2.3) в $Q \setminus \Omega$ является решение вида $u_0(x, Y) = u_0(x)$.

Следствие 2. Общее решение второго уравнения (2.3) в $Q \setminus \Omega$ имеет вид

$$u_1(x, Y) = H(Y) \cdot \varepsilon_0(x) + u_1^*(x) \quad (2.4)$$

где H — тензорное поле третьего ранга, представляющее собой решение уравнения

$A_1 H = 0$ в $Q \setminus \Omega$ и $\text{TH} \Big|_{\partial\Omega} = -\nu \cdot C + k\nu \otimes I$, k — коэффициент изменения давления в порах при внешнем силовом нагружении. В случае баротропных жидкостей или газов этот коэффициент может вычисляться по формуле $k = c^2 \rho V_\Omega^{-1}$, где c — скорость звука в среде, ρ — плотность. Тензорное поле деформаций ε_0 в (2.4) имеет вид $\varepsilon_0 = \text{sym}(\nabla u_0)$.

Следствие 3. Для разрешимости третьего уравнения в (2.3) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{Q \setminus \Omega} A_3(\partial_x) u_0 dY + \int_{Q \setminus \Omega} A_2(\partial_x, \partial_Y) u_1 dY = 0 \quad (2.5)$$

Из (2.4) следует

$$\int_{Q \setminus \Omega} A_2(\partial_x, \partial_Y) u_1 dY = -\text{div}_x \int_{Q \setminus \Omega} C \cdot \cdot \nabla_Y H(Y) dV \cdot \cdot \varepsilon_0 \quad (2.6)$$

При получении этого выражения учитывалось, что слагаемое u_1^* не входит в третье уравнение (2.3). Принимая во внимание (2.6), из (2.5) получаем

$$(1-f) \text{div}_x C \cdot \cdot \varepsilon_0(x) + \text{div}_x K \cdot \cdot \varepsilon_0(x) = 0 \quad (2.7)$$

$$K = V_\Omega^{-1} \int_{\partial\Omega} C \cdot \cdot \nu_Y \otimes H(Y) dY$$

где f — объемный коэффициент пористости. Здесь и в дальнейшем $\partial\Omega$ рассматривается как ориентируемое многообразие с ориентацией, индуцированной из области $Q \setminus \Omega$.

Уравнение (2.7) представляет собой искомое уравнение равновесия гомогенизированной среды. Из (2.7) следует, что эффективный тензор упругости C_0 имеет вид

$$C_0 = (1-f)C + K \quad (2.8)$$

Первое слагаемое в правой части (2.8) соответствует гомогенизации Фойхта; K — четырехвалентный тензор, обычно называемый корректирующим тензором, или корректором.

3. Определение корректора. Формула Сомильяны для Q/Ω дает

$$(\frac{1}{2}I + S)H(Y') = - \int_{\partial\Omega} E_p'(Y' - Y'') \otimes \nu_{Y''} \cdot \cdot (C - kI \otimes I) dY'' + H_a$$

$$H_a = V_\Omega^{-1} \int_{Q \setminus \Omega} H(Y) dY \quad (3.1)$$

где S — матричный сингулярный оператор, получаемый сужением потенциала двойного слоя на несущую поверхность $\partial\Omega$. Необходимость введения H_a в правую часть (3.1) связана с тем обстоятельством, что формулой (1.7) E_p' определено с точностью до постоянного тензора. Однако в виду (2.7) H_a не оказывает влияния на значения корректирующего тензора.

Лемма 3. Если область Ω центрально-симметрична относительно начала координат, то

$$\int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} E_p'(Y' - Y'') \otimes \nu_{Y''} \cdot \cdot M dY' dY'' = 0 \quad (3.2)$$

где M — произвольный тензор n -го ранга, $n \geq 2$.

Доказательство. В силу (1.7) условие (3.2) эквивалентно

$$2\pi i V_\Omega^{-1} \sum_{m^* \in \Lambda_0^*} E^\nu(m^*) \otimes m^* \cdot \cdot M \chi_{\partial\Omega}^\nu(m^*) \chi_\Omega^\nu(m^*) = 0 \quad (3.3)$$

где $\chi_{\partial\Omega}^\nu, \chi_\Omega^\nu$ — характеристические функции соответственно $\partial\Omega$ и Ω . Для доказательства (3.3) достаточно заметить, что рассматриваемые характеристические

функции, так же как и их фурье-изображения, четны, четным является и символ E^V .

Определение. Спектром оператора S будем называть множество тех λ , при которых оператор $\lambda I - S$ необратим в классе непрерывных операторов, действующих в подходящем функциональном пространстве.

Это определение совпадает с принятым в спектральной теории и незначительно отличается от определения спектра в теории интегральных уравнений. Анализ периодических решений второй краевой задачи с заданными на $\partial\Omega$ поверхностными напряжениями показывает, что точки $|\lambda| = 1/2$ лежат за пределами спектрального круга оператора S , действующего в соболевских пространствах $H^s(\partial\Omega, R^3)$, $s > 0$ функций с нулевым средним значением на $\partial\Omega$. Однако в пространствах H^s спектральная окружность уже содержит точку $\lambda = 1/2$ с соответствующим спектральным пространством, состоящим из «жестких» смещений контура.

Из формулы Сомильяны, леммы 3 и последующих замечаний вытекает *Лемма 4.* В условиях леммы 3 ряд Неймана

$$(1/2I + S)^{-1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-2S)^n \quad (3.4)$$

абсолютно сходится в операторной топологии $(\overline{H^s}, \overline{H^s})$, $s \geq 0$.

В формулировке этой леммы $(-2S)^n$ — матричный интегральный оператор, представляющий собой композицию n сингулярных интегральных операторов $(-2S)$. Скорость сходимости этого ряда можно оценивать через мажоранту $\rho = \|2S\|$. Если $\rho < 1$, то ряд (3.4) сходится быстрее геометрического ряда со знаменателем ρ .

Подставляя (3.1), (3.4) в выражение для корректора (2.7) и преобразуя поверхностные интегралы по $\partial\Omega$ в объемные, получим

$$K = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^{n+1} (2\pi)^{2n+2} V_0^{-n-2} \left(\sum_{\mu^* \in \Pi_n} \chi_{\Omega}^{\nu}(\mu_0^*) \chi_{\Omega}^{\nu}(\mu_1^* - \mu_0^*) \dots \chi_{\Omega}^{\nu}(\mu_n^* - \mu_{n-1}^*) \chi_{\Omega}^{\nu}(-\mu_n^*) \times \right. \\ \left. \times C \dots \mu_0^* \otimes E^V(\mu_0^*) \otimes \mu_0^* \dots C \dots \dots C \dots \mu_n^* \otimes E^V(\mu_n^*) \otimes \mu_n^* \dots (C - kI \otimes I) \right) \\ \mu_p^* \in \Lambda_0^*, \quad p = 0, \dots, n; \quad \Pi_n = \prod_{p=0}^n \Lambda_0^* \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) представляет собой искомую формулу для корректирующего тензора. Принимая во внимание альтернирующие знаки у членов ряда по n и ограничиваясь первым членом, отвечающим $n=0$, получим следующее приближение для корректора:

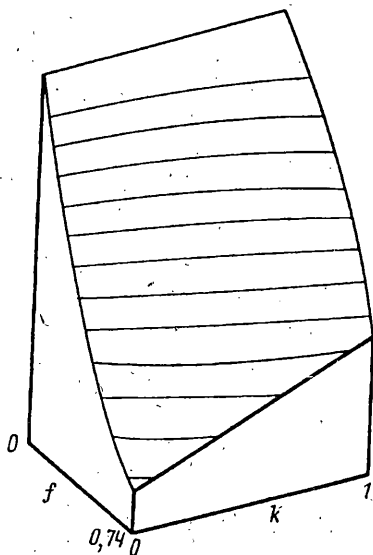
$$K = -8\pi^2 V_0^{-2} \sum_{m^* \in \Lambda_0^*} |\chi_{\Omega}^{\nu}|^2 C \dots m^* \otimes E^V(m^*) \otimes m^* \dots (C - kI \otimes I) \quad (3.6)$$

Нетрудно показать, что при малых k это приближение доставляет нижнюю границу для диагональных компонент тензора K , рассматриваемого как оператор, действующий в пространстве симметричных тензоров второго ранга.

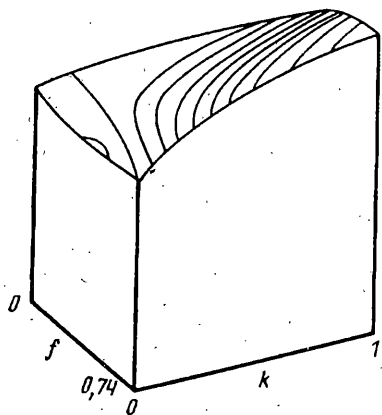
Теорема. Ряд (3.6) абсолютно сходится.

Доказательство. Следует из асимптотической оценки $|\chi_{\Omega}^{\nu}(1\xi)| = o(|\xi|^{-3/2})$, $|\xi| \rightarrow \infty$, выполняющейся, поскольку $\chi_{\Omega} \in L^2(R^3)$. Далее остается заметить, что символ $m^* \otimes E^V(m^*) \otimes m^*$ положительно однороден по m^* степени 0.

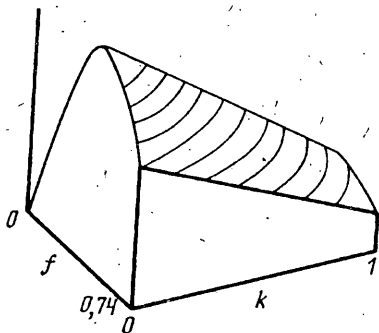
4. Уровень микроструктурных напряжений. Исследуем энергетический уровень микроструктурных напряжений, возникающих при внешнем силовом на-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

гружении рассматриваемых сред. Для определения уровня микроструктурных напряжений рассмотрим тензорное поле напряжений

$$t(x, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n t_n(x, Y) \quad (4.1)$$

получающееся применением оператора напряжений

$$t(\partial_x, \partial_y) u(x, Y) \equiv C \cdot \text{sym}(\nabla_x u) + \lambda^{-1} C \cdot \text{sym}(\nabla_y u) \quad (4.2)$$

к асимптотическому разложению (2.1). Формулы (4.1), (4.2) совместно с (2.1) показывают, что составляющая $t_0(x, Y)$, в отличие от усредненных перемещений u_0 , содержит быстроосциллирующее слагаемое

$$t_0(x, Y) = C \cdot \text{sym}(\nabla_x u_0(x)) + C \cdot \text{sym}(\nabla_y u_1(x, Y)) \quad (4.3)$$

Удельная энергия деформирования пористой среды, находящейся под действием внешнего поля деформаций ϵ_0 , определяется выражением

$$W_0 = (2V_0)^{-1} \int_{Q \cup \Omega} t_0 \cdot [\epsilon_0 + \text{sym}(\nabla_y u_1(Y))] dY \quad (4.4)$$

где слагаемое $\text{sym}(\nabla_y u_1(Y))$ появляется при вычислении градиента от асимптотического разложения (2.1) и последующего перехода к пределу $\lambda \rightarrow 0$. Подстановка в (4.4) выражения (4.3) после несложных преобразований дает

$$W_0 = (1-f) \epsilon_0 \cdot C \cdot \epsilon_0 + \epsilon_0 \cdot K \cdot \epsilon_0 \quad (4.5)$$

Последнее слагаемое в (4.5) связано с действием осциллирующих составляющих

микроструктурных напряжений и деформаций [16]. Из (4.5) вытекает, что корректирующий тензор может быть интерпретирован как тензор, характеризующий энергетический уровень микроструктурных напряжений.

5. Пример. Для пористой начально-изотропной среды, характеризуемой безразмерными упругими параметрами $E = 1$, $\nu = 0,3$, по изложенной выше методике определялись значения эффективного тензора упругости C_0 . Вычисления проводились по приближенной формуле (3.6) для гранецентрированной кубической структурной решетки с шаровыми порами. Предельный для данного случая коэффициент пористости составляет приблизительно 0,74.

На фиг. 1, 2 построены поверхности, показывающие изменение константы Ламе λ_0 и коэффициента Пуассона ν_0 эффективной среды в зависимости от коэффициента пористости f и коэффициента изменения давления k . Отметим, что в средах с наличием давления и при $k \neq 0$ происходит увеличение эффективного коэффициента Пуассона. В случае, когда $k = 0$, зависимости для λ_0 и ν_0 близки к соответствующим зависимостям, определенным другими методами [17—21].

На фиг. 3 построена поверхность, показывающая изменение компоненты корректирующего тензора K^{iiii} при вариациях коэффициентов f и k . В силу результатов предыдущего раздела компонента K^{iiii} определяет собой энергетический уровень микроструктурных напряжений в исследуемой среде при одноосном деформировании. Здесь обращает на себя внимание тот факт, что в исследованном диапазоне с увеличением k при фиксированном значении f происходит снижение энергетического уровня микроструктурных напряжений, определяемых компонентой K^{iiii} . Численные эксперименты показали, что аналогичные зависимости имеют место и для других компонент корректирующего тензора. Это открывает один из путей снижения энергетического уровня микроструктурных напряжений и соответственно повышения прочности пористых сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. Осредненные характеристики тел с периодической структурой//Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 5. С. 1046—1048.
2. Иосифьян Г. А., Олейник О. А., Панасенко Г. П. Асимптотическое разложение решения системы теории упругости с периодическими быстроосциллирующими коэффициентами//Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 1. С. 18—22.
3. Марченко В. А., Хрулов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наук. думка, 1974. 279 с.
4. Олейник О. А. Об усреднении в задачах теории упругости//Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения. Тр. Всесоюз. симпоз. в Тбилиси. 1982 г. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1986. С. 195—201.
5. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
6. Lions J. L. Asymptotic expansions in perforated media with a periodic structure//The Rocky Mountain J. Math. 1980. V. 10. № 1. P. 125—140.
7. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1971. 232 с.
8. Кузнецов С. В. О решении некоторых периодических задач теории упругости//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 39—43.
9. Nemat-Nasser S., Taya M. On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids//Quart. Appl. Math. 1981. V. 39. № 1. P. 43—59.
10. Nemat-Nasser S., Taya M. On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids: Comments and corrections//Quart. Appl. Math. 1985. V. 43. № 2. P. 187—188.
11. Sangani A. S., Lu W. Elastic coefficients of composites containing spherical inclusions in a periodic array//J. Mech. and Phys. Solids. 1987. V. 35. № 1. P. 1—21.
12. Кузнецов С. В. Периодические фундаментальные решения статики в анизотропных средах//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 99—104.

13. Кузнецов С. В. Фундаментальные решения уравнений Ламе для анизотропных сред//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 50—54.
14. Ильин В. А. Достаточные условия разложимости функции в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям//Матем. сб. 1958. Т. 46. № 1. С. 3—26.
15. Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amstredam: North-Holland Publ. Co., 1978. 700p.
16. Кузнецов С. В. Микроструктурные напряжения в пористых средах//Прикл. механика. 1991. Т. 27. № 8. С. 23—28.
17. MacKenzie J. K. The elastic constants of a solid containing spherical holes//Proc. Phys. Soc. Sec. B. 1950. V. 63. Pt. 1. № 361. P. 2—11.
18. Walpole L. J. The elastic behaviour of a suspension of spherical particles//Quart. J. Mech. Appl. Math. 1972. V. 25. Pt. 2. P. 153—160.
19. Willis J. R., Acton J. R. The overall elastic moduli of a dilute suspension of spheres//Quart. J. Mech. Appl. Math. 1976. V. 29. Pt. 2. P. 163—177.
20. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials//J. Mech. and Phys. Solids. 1965. V. 13. № 4. P. 213—222.
21. Budiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials//J. Mech. and Phys. Solids. 1965. V. 13. № 4. P. 223—227.

Москва

Поступила в редакцию
13.XI.1991