МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1993

УДК 624.07:534.1

© 1993 г. А. И. ВЕСНИЦКИЙ, А. В. МЕТРИКИН

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ

Известно [1], что при равномерном прямолинейном движении электрического заряда в неоднородной среде, возникает переходное излучение электромагнитных волн, мощность которого возрастает с увеличением скорости движения заряда. Аналогичное излучение упругих волн возникает в неоднородной направляющей, взаимодействующей с равномерно движущимся механическим объектом. Например, в контактной подвеске при равномерном движении токосъемника. В этом случае излучение, обусловленное установленными на контактном проводе зажимами, фиксаторами, воздушными стрелками и т. д. [2], может приводить к увеличению амплитуды колебаний токосъемника и его отрыву от контактного провода. Изучение динамики этих процессов актуально в связи с развитием высокоскоростного наземного транспорта.

В настоящей работе изучается переходное излучение упругих волн в контактной подвеске, имеющей поддерживающую конструкцию дискретной структуры. Подвеска моделируется струной, лежащей на эквидистантных упруговязких инерционных опорах. Полагается, что равномерно движущийся токосъемник действует на подвеску в поперечном движению направлении с постоянной силой. Показано, что при любой скорости движения токосъемника, в подвеске возникает излучение, спектр которого дискретен. Установлено, что амплитуда колебаний токосъемника возрастает при совпадении скорости его движения с групповой скоростью одной из излучаемых гармоник. Получено и проанализировано выражение для средней силы давления волн [3] на движущийся токосъемник.

1. Уравнения движения. Анализ установившегося решения. Согласно [3], вынужденные колебания струны (см. фиг. 1) в линейном приближении описываются следующей системой уравнений:

$$U_{tt} - c^2U_{xx} = 0, \quad c^2 = N/\rho, \quad -\infty < x < +\infty; \quad -\infty < t < +\infty$$

$$[U]_{x=vt} = [U]_{x=nd} = 0, \quad U(nd, t) = U_n^0$$

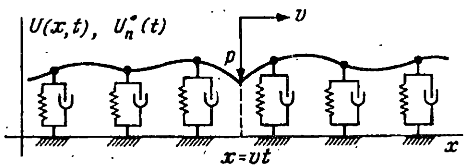
$$[NU_x + \rho v U_t]_{x=vt} = P, \quad N[U_x]_{x=nd} = m\ddot{U}_n^0 + \gamma\dot{U}_n^0 + kU_n^0 \tag{1.1}$$

Здесь $U(x, t)$ — поперечное смещение струны, N и ρ — ее натяжение и погонная плотность, $v=\mathrm{const}$ — скорость движения объекта (в дальнейшем будем полагать $v < c$), d — расстояние между соседними опорами, U_n^0 — амплитуда колебаний n-й опоры, m, k и γ — масса, жесткость и вязкость опоры, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$, P — постоянная сила, с которой токосъемник действует на подвеску. Квадратные скобки означают разность между значениями выражений, стоящих в них, справа и слева от указанного значения x.

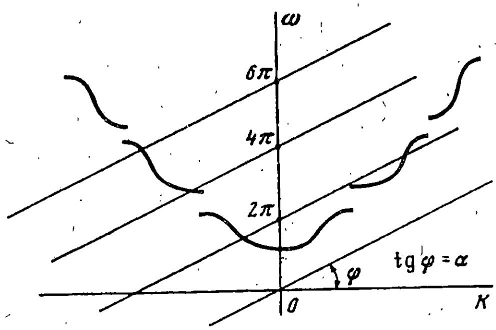
В дальнейшем будем исследовать установившееся решение. Для его нахождения применим к (1.1) интегральное преобразование Фурье по времени

$$W(x, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t)\exp(i\Omega t)\,\mathrm{dt}, \quad W_n^0(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_n^0(t)\exp(i\Omega t)\,\mathrm{dt}$$

Используя операционные равенства



Фиг. 1



Фиг. 2

$$U_{tt} \doteq -\Omega^2 W - \frac{Pv}{\rho(c^2 - v^2)} \exp(i\Omega x/v)$$

$$U_{xx} \doteq W_{xx} - \frac{P}{\rho v(c^2 - v^2)} \exp(i\Omega x/v)$$

и вводя безразмерные переменные и параметры $V = Wc/d^2$, $z = x/d$, $\tau = ct/d$, $F = P/\rho c^2$, $G = m/\rho\alpha$, $h = kd/\rho c^2$, $\delta = \gamma/\rho c$, $\alpha = v/c$, $\omega = \Omega d/c$, $y_n = W_n^0 c/d^2$, получим в изображениях

$$V_{zz} + \omega^2 V = \frac{F}{\alpha} \exp(i\omega z/\alpha)$$

$$V(n, \omega) = y_n, \qquad [V_z]_{z=n} = y_n(h - G\omega^2 - i\delta\omega) \tag{1.2}$$

При $z \in [0; 1]$ общее решение (1.2) имеет вид

$$V = A\exp(i\omega z) + B\exp(-i\omega z) - S\exp(i\omega z/\alpha), \qquad S = F\alpha/\omega^2(1 - \alpha^2)$$

Так как для исходной системы (1.1) справедливо условие периодичности, связанное с равномерностью движения нагрузки

$$U(x, t) = U(x + d, \ t + d/v) \tag{1.3}$$

то $V(z + 1) = V(z)\exp(i\omega/\alpha)$. Следовательно, для $z \in [1; 2]$ имеем

$$V(z) = \exp(i\omega/\alpha)(A\exp(i\omega(z - 1)) + B\exp(-i\omega(z - 1))) - S\exp(i\omega z/\alpha)$$

Кроме того, так как $y_1 = V(1, \omega)$, то $y_1 = C\exp(i\omega/\alpha)$.

Используя граничные условия при $z = 0$ и $z = 1$, получим систему для определения A, B, C:

$$A + B - S = C$$

$$A\exp(i\omega) + B\exp(-i\omega) = (A + B)\exp(i\omega/\alpha)$$

$$i\omega(\exp(i\omega/\alpha)(A - B) - A\exp(i\omega) + B\exp(-i\omega)) =$$

$$= C\exp(i\omega/\alpha)(h - G\omega^2 - i\delta\omega)$$

разрешая которую имеем

$$A = \Delta_1/\Delta, \quad B = \Delta_2/\Delta, \quad C = \Delta_3/\Delta$$

$$\Delta = -2\beta\,(p^2 + 1 - p\,(\gamma^- + \gamma^+)) - Tp\,(\gamma^- - \gamma^+) =$$

$$= -4\beta p\,(\cos(\omega/\alpha) - \cos(\omega) - T\sin(\omega)/2\omega)$$

$$\Delta_1 = STp\,(p - \gamma^-), \quad \Delta_2 = STp\,(\gamma^+ - p)$$

$$\Delta_3 = 2\beta S\,(p^2 + 1 - p\,(\gamma^+ + \gamma^-)), \quad \beta = i\omega$$

$$\gamma^\pm = \exp(\pm i\omega), \quad p = \exp(i\omega/\alpha), \quad T = h - G\omega^2 - i\delta\omega$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получим точное решение (1.1), описывающее установившиеся колебания струны при $z \in [0, 1]$:

$$U(z, \tau) = \frac{d}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\frac{S(\omega)}{\Delta}(Tp\,(\exp(i\omega z)\,(p - \gamma^-) + \exp(-i\omega z)\,(\gamma^+ - p)) -$$

$$- \Delta\exp(i\omega z/\alpha))\exp(-i\omega\tau)\Big\}\,d\omega \qquad (1.4)$$

Амплитуда колебаний струны при $z \notin [0, 1]$ определяется с помощью условия периодичности (1.3).

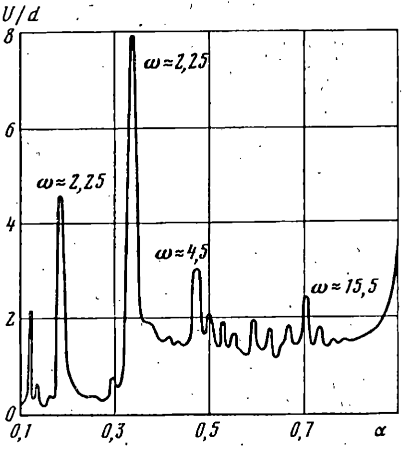
Полюса подынтегральной функции в (1.4), определяющие частоты излучаемых гармоник, являются корнями уравнения

$$\cos(k(\omega)) = \cos(\omega/\alpha) \qquad (1.5)$$

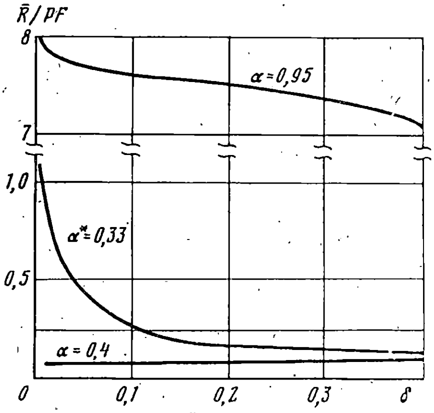
где $\cos(k(\omega)) = \cos(\omega) + T\sin(\omega)/2\omega$ — дисперсионное уравнение струны, лежащей на эквидистантных упруговязких опорах. На фиг. 2 приведен качественный вид графического решения (1.5) при $\delta \to 0$, которое позволяет определить действительные корни этого уравнения. Видно, что равномерно движущийся токосъемник излучает дискретный спектр частот. По аналогии с излучением, возникающим при равномерном движении электрона в неоднородной среде, это излучение естественно называть переходным. Отличительной особенностью переходного излучения в одномерных периодически неоднородных системах является резонанс, возникающий при совпадении групповой скорости одной из излучаемых гармоник со скоростью движения источника возмущений. Действительно, из фиг. 2 видно, что при касании одной из прямых с дисперсионной кривой (случай совпадения групповой скорости $d\omega/dk$ одной из излучаемых гармоник со скоростью α движения токосъемника), в уравнении (1.5) появляется действительный кратный корень, что ведет к расходимости интеграла в (1.4).

В связи с тем, что имеется набор критических скоростей токосъемника, при которых наблюдается резонанс, возникает вопрос о влиянии малой вязкости опор на амплитуду колебаний токосъемника при резонансе. На фиг. 3 для параметров системы $G = 0{,}15$, $h = 10$, $\delta = 0{,}1$ приведена зависимость амплитуды колебаний токосъемника от скорости его движения. Вблизи основных резонансных пиков указаны частоты соответствующих резонансных гармоник, групповая скорость которых при $\delta \to 0$ совпадает с α. Анализ изображенной на фигуре зависимости позволяет сделать следующие выводы: 1) чем ниже частота резонансной гармоники, тем меньше влияние вязкости опор на амплитуду соответствующих резонансных колебаний, резонанс мощнее; 2) если частоты резонансных гармоник приблизительно равны (например, при $\alpha = \alpha_1^* = 0{,}109$ и при $\alpha = \alpha_2^* = 0{,}175$ — $\omega_1^* \approx \omega_2^* \approx 2{,}25$), то резонанс тем мощнее, чем выше скорость токосъемника.

2. Средняя реакция излучения. Вследствие того, что излучаемые волны переносят не только энергию, но и импульс [4], они оказывают давление на движущийся токосъемник. Согласно [5], величина силы давления волн на движущийся токосъемник (продольной составляющей реакции струны) в рассматриваемом случае определяется выражением



Фиг. 3



Фиг. 4

$$R(z) = -Pd^{-1}\left(U_z(z, z/\alpha + 0) + U_z(z, z/\alpha - 0)\right) \tag{2.1}$$

Представляет интерес вычислить среднюю силу давления волн на токосъемник, т. к. она определяет энергозатраты внешнего источника, поддерживающего равномерное движение токосъемника

$$\overline{R} = \int_0^1 R(z)\,dz \tag{2.2}$$

Подставляя (1.4) в (2.1), а затем вычисляя интеграл (2.2), получим

$$\frac{\overline{R}}{PF} = -\frac{\delta\alpha^2}{\pi(1-\alpha^2)}\times$$

$$\times\int_0^\infty \frac{(\cos(\omega/\alpha)-\cos(\omega))^2\,\omega^{-2}d\omega}{(\cos(\omega/\alpha)-\cos(\omega)-\sin(\omega)(h-G\omega^2)/2\omega)^2+(\delta\sin(\omega)/2)^2} \tag{2.3}$$

Из (2.3) видно, что в среднем сила давления волн препятствует движению токосъемника. Следовательно, внешний источник, обеспечивая равномерное движение токосъемника, совершает положительную работу, тем большую, чем дольше движется токосъемник. На фиг. 4 изображена зависимость средней силы давления волн от безразмерной вязкости опор δ при различных скоростях движения токосъемника (параметры $G=0{,}15$, $h=10$ те же, что и на фиг. 3). Видно, что если мощность излучения велика ($\alpha=\alpha^*=0{,}33$ — резонансный случай, $\alpha=0{,}95$ — скорость токосъемника близка к скорости распространения волн в струне), малая вязкость опор приводит к снижению сопротивления движению. В противном случае ($\alpha=0{,}4$), сопротивление движению растет с увеличением вязкости.

Таким образом, при равномерном движении сосредоточенного механического объекта (токосъемника) по периодически неоднородной одномерной направляющей (струне), в ней возникает переходное излучение упругих волн. Это излучение приводит к появлению ряда критических скоростей объекта, при которых амплитуда его колебаний резко возрастает. Кроме того, на излучающий объект действует отличная в среднем от нуля сила сопротивления движению. Необходимо отметить, что в настоящей работе не были учтены упругоинерционные свойства объекта. Однако, при движении со скоростью, близкой к критической, такое допущение становится неоправданным, т. к. в этом случае сила, обусловленная инерционностью объекта, становится сравнима с силой поджатия P, что может приводить, в частности, к разрыву контакта объект—направляющая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.* Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука, 1984. 360 с.
2. *Беляев И. А., Вологин В. А.* Взаимодействие токоприемников и контактной сети. М.: Транспорт, 1983. 191 с.
3. *Весницкий А. И., Крысов С. В., Уткин Г. А.* Постановка краевых задач динамики упругих систем, исходя из вариационного принципа Гамильтона — Остроградского. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1983. 65 с.
4. *Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А.* Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками//ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 863—866.
5. *Крысов С. В.* Вынужденные колебания и резонанс в упругих системах с движущимися нагрузками. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1985. 69 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
17.VI.1991