

УДК 539.3

© 1993 г. В. И. МАКСИМОВ

## ОБ УСТОЙЧИВОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Рассматриваются некоторые обратные задачи термоупругости в предположении, что на границе тела выполняются субдифференциальные соотношения между температурой и вектором теплового потока. На основе подхода, развитого в [1—3], конструируются регуляризированные динамические алгоритмы устойчивого восстановления неизвестных характеристик по результатам неточных измерений состояний среды. Приводятся оценки скоростей сходимости алгоритмов.

**1. Постановка задачи.** Имеется область  $\Omega \subset R^n$ ,  $n = 2, 3$ , занятая термоупругой средой с постоянной плотностью  $\rho(\eta) = \rho > 0$  (в естественном состоянии) и удельной теплоемкостью  $c(\eta) = c > 0$  (при нулевых деформациях),  $\eta \in \Omega$ . На среду в течение промежутка времени  $T = [t_0, \vartheta]$  оказывают воздействие неизвестные переменная сила  $f(t, \eta) = \{f_p(t, \eta)\}$ ,  $p \in [1: n]$ , а также тепловой поток  $g(t, \eta)$ ,  $t \in T$ ,  $\eta \in \Omega$ . Пусть  $r = r(t, \eta)$  — абсолютная температура среды,  $x = x(t, \eta)$  — перемещение материальной точки  $\eta \in \Omega$  в момент  $t$  по отношению к естественному состоянию среды, которое характеризуется нулевым напряжением и некоторым постоянным значением абсолютной температуры  $r_*(\eta) = r_* > 0$ ,  $\eta \in \Omega$ . Известно [4], что поведение термоупругого тела описывается уравнениями

$$\rho \ddot{x}_p = f_p + (C_{pj} \varepsilon_{hq})_j - (m_{pj}(r - r_*))_j \text{ в } \Omega \times (t_0, \vartheta)$$

$$\rho c \dot{r} - (k_p f_j)_p + m_p r_* \dot{\varepsilon}_{pj} = g, \quad p, j, h, q \in [1: n]$$

Здесь  $\varepsilon = \{\varepsilon_{pj}\}$  — тензор деформаций, связанный с перемещениями соотношениями  $\varepsilon_{pj}(x) = 0,5(x_{p,j} + x_{j,p})$ ,  $C = \{C_{pj}q_h\}$  — тензор коэффициентов упругости, удовлетворяющий условиям симметричности и эллиптичности:  $C_{pj}q_h = C_{jq}q_h = C_{hp}q_h$ ,  $C_{pj}q_h \varepsilon_{pj} \varepsilon_{qh} \geq c \varepsilon_{pj} \varepsilon_{qn}$ ,  $c > 0$ ,  $m_* = \{m_{pj}\}$  и  $k = \{k_p\}$  — симметричные тензоры теплового расширения и теплопроводности,  $k_{pj} z_p z_j \geq k z_p z_p \forall z = \{z_p\} \in R^n$ ,  $k = \text{const} > 0$  (используются обозначения  $x_{p,j} = \partial x_p / \partial \eta_j$ ,  $r_j = \partial r / \partial \eta_j$ , а также правило суммирования по повторяющимся индексам [4, 5]). Предполагается, что выполнены начальные

$$x_p(t_0) = x_{0p}(\eta), \quad \dot{x}_p(t_0) = x_{1p}(\eta), \quad r(t_0) = r_0(\eta) \text{ в } \Omega \quad (1.1)$$

а также граничные условия, определяющие зависимость между температурой на границе  $\Gamma$  и вектором теплового потока

$$-k_p f_j n_p \in \beta(r) \text{ на } \Sigma = \Gamma \times T \quad (1.2)$$

где  $n = \{n_p\}$  — орт внешней нормали к  $\Gamma$ ,  $\beta$  — максимально монотонное отображение [4]. Перемещения на  $\Gamma$  считаются равными нулю:  $x_p = 0$  на  $\Sigma$ . Заметим, что граничные условия (1.2) описывают широкий класс задач о полупроницаемости [4, 5].

Обсуждаемая задача состоит в следующем. В дискретные моменты времени

$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ ,  $\tau_i = \tau_{i-1} + \delta$ ,  $\tau_0 = t_0$ ,  $\tau_m = \vartheta$  с некоторой точностью замеряются перемещения  $x_p(\tau_i, \eta)$ ,  $p \in [1:n]$ , точек среды, а также температура  $r(\tau_i, \eta)$ , т. е. находятся  $\psi_p(\eta)$  и  $\psi^{(1)}(\eta)$ ,  $\eta \in \Omega$ ; — приближения  $x_p(\tau_i, \eta)$ ,  $r(\tau_i, \eta)$ . Требуется указать устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм синхронного с развитием процесса вычисления  $f(t)$  и  $g(t)$  (задача 1). Возможна также ситуация, когда поток тепла  $g(t)$  задан, а вычислению (по замерам  $\psi_p(\eta)$ ) подлежат переменная сила  $f(t)$  и температура среды  $r(t)$  (задача 2).

Следуя [4], введем обозначения

$$a(x, v) = \int_{\Omega} C_{pjhq} \varepsilon_{pj}(x) \varepsilon_{hq}(v) d\Omega, \quad M_1(r, v) = \int_{\Omega} (m_{pj} r)_{,j} v_p d\Omega$$

$$(x, v)_1 = \int_{\Omega} x_p v_p d\Omega, \quad K(r, \varphi) = \int_{\Omega} k_{pj} r_{,j} \varphi_j d\Omega$$

$$M_2(x, \varphi) = \int_{\Omega} m_{pj} x_{p,j} \varphi d\Omega$$

Пусть  $C_{pjhq}$ ,  $k_{pj}$ ,  $m_{pj}$  — элементы из  $L_{\infty}(\Omega)$ ,  $V_1 = [H_0^1(\Omega)]^3$ ,  $\|u\|_{V_1} = (\sum \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2)^{1/2}$ ,  $V_2 = H^1(\Omega)$ ,  $\|\cdot\|$  — норма в  $V_2$ ,  $V_3 = [L_2(\Omega)]^3$ ,  $\|u\|_{V_3} = (\sum \|u_j\|_{L_2(\Omega)}^2)^{1/2}$ ,  $H = L_2(\Omega)$ ,  $\|\cdot\|$  и  $(\cdot, \cdot)$  — норма и скалярное произведение в  $H$  ( $j = 1, 2, 3$ ), выпуклый собственный полунепрерывный снизу функционал  $\Phi$  на  $L_2(\Gamma)$  задается формулой  $\Phi(\varphi) = \int \gamma(\varphi) d\Gamma$ , если  $\gamma(\varphi) \in L_1(\Gamma)$ ,  $\Phi(\varphi) = +\infty$ , в противном случае  $\beta = \partial\gamma$ , символ  $\partial\gamma$  означает субдифференциал выпуклой собственной полунепрерывной снизу функции  $\gamma: R \rightarrow R^+$ ,  $f(t) \in P_1$ ,  $g(t) \in P_2$  при  $t \in T$ ,  $P_1 \in U_1 = [L_3(\Omega)]^3$  и  $P_2 \in U_2 = L_2(\Omega)$  — выпуклые ограниченные и замкнутые множества. Тогда рассматриваемый термоупругий процесс описывается в вариационной форме совокупностью вариационного уравнения

$$(\rho \ddot{x}, v - \dot{x}) + a(x, v - \dot{x}) + M_1(r - r_*, v - \dot{x}) = (f, v - \dot{x}) \quad \forall v \in V_1 \quad (1.3)$$

и вариационного неравенства

$$\begin{aligned} & (\rho c \dot{r}, \varphi - r) + K(r, \varphi - r) + M_2(r_* \dot{x}, \varphi - r) + \\ & + \Phi(\varphi) - \Phi(r) \geq (g, \varphi - r) \quad \forall \varphi \in V_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

с начальными условиями [1.1] [4]. При

$$f, \dot{f} \in L_2(T; V_3), \quad g, \dot{g} \in L_2(T; L_2(\Omega)), \quad x_0 \in H^2(\Omega) \cap V_1, \quad (1.5)$$

$$x_{0i} \in V_1, \quad r_0 \in V_2, \quad \Phi(r_0) < +\infty$$

существует единственное решение  $(x(t), r(t))$  системы (1.3), (1.4), (1.5) со свойствами  $x, \dot{x} \in L_{\infty}(T; V_1)$ ,  $\dot{x} \in L_{\infty}(T; V_3)$ ,  $r, \dot{r} \in L_2(T; V_2)$ ,  $\dot{r} \in L_{\infty}(T; L_2(\Omega))$ . Ниже считаем условия (1.5) выполненными и полагаем для простоты  $\rho = c = 1$ . Задача 1 состоит в построении алгоритма синхронного с развитием процесса вычисления неизвестных силы  $f(t)$  и потока тепла  $g(t)$  по неточным измерениям решений системы (1.3), (1.4):  $\psi_i = \{\psi_{pi}(\eta)\} \in V_1$ ,  $p \in [1:n]$ ,  $\psi_i^{(1)}(\eta) \in V_2$ :

$$|x_p(\eta, \tau_i) - \psi_{pi}(\eta)|_{V_1} \leq \varepsilon \quad (1.6)$$

$$\|r(\eta, \tau_i) - \psi_i^{(1)}\| \leq \varepsilon \quad (1.7)$$

В задаче 2 требуется указать динамическую процедуру вычисления переменной

силы  $f(t)$  и температуры среды  $r(t)$  по поступающим в ходе функционирования системы замерам  $g(\tau_i, \eta)$  и  $\{\psi_{pl}(\eta)\}$ .

2. Алгоритм решения задачи 1. Опишем процедуру вычисления неизвестных переменных силы  $f(t)$  и потока тепла  $g(t)$ , действующих на термоупругую среду (1.3), (1.4), (1.1). При этом будем полагать, что имеется дополнительная информация о перемещениях материальных точек среды. Именно считаем — перемещения  $x(t, \eta)$ ,  $\eta \in \Omega$ , замеряются с ошибкой не только в моменты времени  $\tau_i$ , но и в некоторые близкие к ним моменты  $\tau_i^* = \tau_i - \delta_*$ ,  $i \geq 1$ ,  $\tau_0^* = t_0 + \delta_*$ ,  $\delta_* = \delta^{32}$ . При  $t = \tau_i^*$  становятся известными  $\psi_i^* = \{\psi_{pl}^*(\eta)\} \in V_i$ :

$$|x_p(\tau_i^*, \eta) - \psi_{pl}^*(\eta)|_{V_i} \leq \varepsilon \quad (2.1)$$

Следуя [1—3], введем функционирующую одновременно с реальным процессом вспомогательную систему — модель

$$\begin{aligned} & (\dot{y}, \varphi - y) + K(y, \varphi - y) + M_2(r_* a_i, \varphi - y) + \Phi(\varphi) - \Phi(y) \geq \\ & \geq (u(t), \varphi - y) \text{ при } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \\ & \forall \varphi \in V_2, \quad i \in [1: m-1], \quad a_i = \{(\psi_{pl} - \psi_{pl-1}) \delta^{-1}\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

с начальным состоянием  $y(\tau_i) = \psi_i^*$ , где  $\psi_i^* \in D_d = \{v \in V_2 \mid \Phi_*(v) \leq \Phi_*(\tau_0)\}$ ,  $\Phi_*(v) = 0,5K(v, v) + 0,5k|v|^2 + \Phi(v)$ ,  $\|\psi_i^* - \psi_0^*\| \leq \varepsilon$ . Под решением неравенства (2.2) понимается функция  $y$ , удовлетворяющая (2.2) и такая, что  $y, \dot{y} \in L_2(T; L_2(\Omega))$ ,  $y \in L_2(T; V_2)$ ,  $y(\tau_i) = \psi_i^*$ , и функция  $t \rightarrow \Phi(x(t))$  непрерывна на  $T$ . Как следует из результатов [6], решение  $y$  существует и единственno.

Алгоритм вычисления  $f$  и  $g$ , или, что то же самое, алгоритм позиционного управления моделью, разобьем на  $m = m(\Delta)$  однотипных шагов. Очередной,  $i$ -й шаг, выполняется на промежутке времени  $\delta$ . В течение этого шага происходит следующее. Замеряются (с ошибкой) перемещения материальных точек среды  $x(\tau_i, \eta)$ ,  $x(\tau_i^*, \eta)$  и ее температура  $r(\tau_i, \eta)$ ,  $\eta \in \Omega$ , т. е. находятся  $\psi_i$ ,  $\psi_i^*$  и  $\psi_i^{(1)}$ , удовлетворяющие (1.6), (2.1), и (1.7). Вычисляется пара управлений  $(u_i, v_i)$ :

$$L_\alpha(s_i, u_i) = \min \{L_\alpha(s_i, u) : u \in P_2\}, \quad i \in [1: m(\Delta) - 1] \quad (2.3)$$

$$L_\alpha(s, u) = 2(s, u) + \alpha|u|^2, \quad s_i = y(\tau_i) - \psi_i^{(1)}$$

$v_i$  — минимальное в смысле нормы пространства  $U_1$  управление из множества

$$V_{\delta, i}^\varepsilon = V_{\delta, i}^\varepsilon(\psi_i, \psi_{i-1}, \psi_i^*, \psi_{i-1}^*, \psi_i^{(1)}) = \{v \in P_1 : \sup_{y \in S} \{(u - (w_i - w_{i-1}) \delta^{-1}, y)_1 -$$

$$- a((\psi_i + \psi_{i-1})/2, y) - M_1(\psi_i^{(1)} - r_*, y)\} \leq b\nu(\delta, \varepsilon)\}, \quad i \in [1: m(\Delta) - 1]$$

$$w_i = (\psi_i - \psi_i^*)/\delta_*, \quad i \geq 1, \quad w_0 = (\psi_0^* - \psi_0)/\delta_*$$

Здесь  $S$  — единичный шар в  $V_1$  с центром в нуле,  $\nu(\delta, \varepsilon) = \delta^{1/2} + \varepsilon\delta^{-52}$ ,  $b$  — некоторая постоянная. Затем на вход модели подается управление  $u^e(t) = u_i^e$ ,  $t \in \delta_i$  и в момент  $\tau_{i+1}$  определяется фазовое положение  $y(\tau_{i+1})$ . Указанная процедура осуществляется до момента  $\vartheta$ . В момент  $\vartheta$  вычисляется также  $v_m$ .

Пусть  $U_x$  — совокупность всех  $\bar{u} \in L_2(\hat{T}; U_2)$ , вызывающих  $r$ , т. е. множество таких  $u(t) \in P_2$  при почти всех  $t \in T$ , что при  $g = \bar{u}$  справедливо неравенство (1.4).

Заметим, что это множество выпукло, ограничено и замкнуто в  $L_2(T; U_2)$ . Оно однозначно  $U_x = \{g\}$ , если функция  $\gamma$  дифференцируема. Выберем величины  $\alpha = \alpha(\varepsilon)$  и  $\delta = \delta(\varepsilon)$  со свойствами

$$\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0, \delta(\varepsilon) \rightarrow 0, \varepsilon \delta^{-5/2}(\varepsilon) \rightarrow 0, \varepsilon (\delta(\varepsilon) \alpha(\varepsilon))^{-1} \rightarrow 0$$

$$\delta^{1/2}(\varepsilon) \alpha^{-1}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

**Теорема 2.1.** При  $b \geq b^{(1)}$  для любого  $v > 0$  можно указать такое число  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(b, v) > 0$ , что верны неравенства

$$\|v^* - f\|_{L_2(T; L_2(\Omega))} \leq v, \|u^* - g_*\|_{L_2(T; L_2(\Omega))} \leq v \quad (2.4)$$

если  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_i)$ .

Здесь  $g_*$  — минимальный по  $L_2(T; L_2(\Omega))$  норме элемент множества  $U_x$ ,  $v^*(t) = v_t^*, t \in \delta_{i-1}$ . Число  $b^{(1)}$  указывается в явном виде.

Таким образом, решая задачу 1, необходимо поступать следующим образом. Фиксировать разбиение  $\Delta$  отрезка  $T$  с шагом  $\delta$  и число  $\alpha > 0$ . После этого организовать процедуру вычисления управлений  $v^*$  и  $u^*$  согласно правилу, описанному выше. Если величины  $\varepsilon, \alpha, \delta, \varepsilon \delta^{-5/2}, \varepsilon (\delta \alpha)^{-1}$  и  $\delta^{1/2} \alpha^{-1}$  будут малы, а функция  $\gamma$  дифференцируема, то  $v^*$  будет подходящим приближением переменной силы  $f$ , а  $u^*$  — приближением теплового потока  $g$ .

Имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма  $\|f - v^*\|_{L_2(T; U_2)}^2 \leq k_* (\varepsilon \delta^{-5/2} + \delta^{1/2})$ . Если функция  $\beta$  удовлетворяет условию Липшица,  $g(t) \in V_2$  и является абсолютно непрерывной функцией, то верно также неравенство

$$\|g - u^*\|_{L_2(T; U_2)}^2 \leq k^* (\varepsilon^{1/2} \delta^{-1/2} + \delta^{1/4} + \alpha^{1/2}) + \varepsilon (\delta \alpha)^{-1} + \delta^{1/2} \alpha^{-1}$$

**3. Алгоритм решения задачи 2.** Будем полагать, что начальная температура  $r_0$  известна. Фиксируем три положительных числа  $\varepsilon_0, \delta_0$  и  $v$  таких, что  $1 - \varepsilon_0 - 2k\delta_0(1+v) \in (0, 1)$ ,  $5/8 - k\delta_0 > 0$ . Пусть  $r_0 \in \{y \in V_2 | \Phi(y) < +\infty, Ay + \partial\Phi(y) \cap H \neq \emptyset\}$ ,  $A \in L(V_2; V_2^*)$ :  $K(\varphi, v) = (A\varphi, v)_{V_2 \times V_2} \forall \varphi, v \in V_2$ , элементы  $y_i^* \in V_2$  и  $x_i \in V_2$ ,  $i \in [1:m]$  вычисляются по рекуррентным формулам

$$y_i^* = y_{i-1}^* (\alpha_i, x_{i-1}), x_i = x_{i-1} + \delta u_{i-1}, x_0 = y_0^* = r_0 \quad (3.1)$$

где символ  $y_i^*$  означает приближенное решение эллиптического неравенства

$$\begin{aligned} ((y - y_{i-1}^*)/\delta, v - p_i(y)) + K(p_i(y), v - p_i(y)) + \Phi(v) - \\ - \Phi(p_i(y)) \geq (\alpha_i, v - p_i(y)) \forall v \in V_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$p_i(y) = y - x_{i-1} + y_{i-1}^*, \alpha_i = \delta^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(t) dt - \bar{\alpha}_i$$

$$\bar{\alpha}_i = \delta^{-1} m_{p_i} (\psi_{p_i, i} - \psi_{p_{i-1}, i})$$

т. е. элемент  $y = y_i^* \in V_2$  такой, что

$$|y_i^* - \bar{y}_i| \leq \varepsilon \delta, \bar{y}_i = y^*(y_{i-1}^*; \alpha_i, x_{i-1}), \bar{y}_0 = r_0 \quad (3.3)$$

где  $y^*(y_{i-1}^*; \alpha_i, x_{i-1})$  — точное решение неравенства (3.2). Величина

$u_{i-1} = u(y_i^*, y_{i-1}^*, x_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}) \in V_2$  задается следующим образом: при  $i \in [1:m - 1]$ :

$$u_{i-1} = \begin{cases} d_i, & \text{если } |s_{i-1}| = 0 \\ d_i - \frac{|w_{i-1}^*|}{|s_{i-1}|} s_{i-1}, & \text{если } |s_{i-1}| \neq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$u_{m-1} = \begin{cases} 0, & \text{если } |x_{m-1} - y_{m-1}^*| = 0 \\ -\frac{|w_{m-1}^*|}{|x_{m-1} - y_{m-1}^*|} (x_{m-1} - y_{m-1}^*) & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $s_{i-1} = x_{i-1} - y_{i-1}^* - (w_{i-1}^* + \beta_{i+1} - \beta_i)/\gamma_{\epsilon, \delta, v}$ ,  $\gamma_{\epsilon, \delta, v} = 1 - \epsilon - 2k\delta(1+v)$ ,  $\alpha_i^* \in V_2$  — произвольный элемент из множества

$$\{v \in V_2 \mid |\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} g(t) dt - v| \leq \epsilon\}, \quad w_i^* = \delta^{-1} \{y_{i+1}^* - y_i^*\}, \quad \beta_{i+1} = \alpha_{i+1}^* - \alpha_{i+1}^0, \quad \alpha_i^0 \in V_2, \quad |\alpha_i^0 - \bar{\alpha}_i| \leq h/\delta, \quad d_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}^0.$$

Алгоритм решения задачи 2 так же, как и алгоритм решения задачи 1, разбивается на  $m = m(\Delta)$  шагов. На  $i$ -м шаге (осуществляемом в течение отрезка времени  $\delta$ ) сначала вычисляются элементы  $u_i^*$  согласно (2.3), а также элементы  $y_{i+1}^*, x_{i+1}, i \in [0; m(\Delta) - 1]$  по формулам (3.1). Затем находятся функции (траектории модели):

$$\bar{y}^\delta(t) = y_i^* + (t - \tau_i) w_i^*, \quad x^\delta(t) = x_i + (t - \tau_i) u_i \text{ при } t \in \delta_i \quad (3.6)$$

Вся процедура осуществляется до момента  $\vartheta$ . Пусть взята величина  $\delta = \delta(\epsilon)$  такая, что  $\delta(\epsilon) \rightarrow 0$ ,  $\epsilon \delta^{-5/2}(\epsilon) \rightarrow 0$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\delta(\epsilon) \leq \delta_0 \leq 1$ , когда  $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ .

Обозначим  $z_\delta(t) = y_{i+1}^* - (x_i - y_i^*)$  при  $t \in \delta_i$ ,  $i \in [0: m - 1]$ ,  $e = \|f_0\|_{L_\infty(T; H)}$ ,  $f_0(t) = g(t) - r_* m_p \dot{x}_{p,j}(t)$  при  $t \in T$ ,  $R = \|\dot{r}\|_{L_\infty(T; H)}$ .

*Теорема 3.1.* При  $b \geq b^{(1)}$  для любого  $v > 0$  можно указать такое число  $\epsilon_2 = \epsilon_2(b, v) > 0$ , что верно неравенство (2.4), когда  $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$ . Равномерно по  $t \in T$ ,  $\delta \in (0, \delta_0)$ ,  $\epsilon \leq \delta$ ,  $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ :

$$|r(t) - \bar{y}^\delta(t)|^2 \leq d_1 v_1(\delta, \epsilon), \quad v_1(\delta, \epsilon) = \delta^{1/2} + \epsilon \delta^{-3/2}$$

если элементы  $y_i^*$  близки к  $\hat{y}_i$  в метрике  $V_2$ , т. е.

$$\|y_i^* - \bar{y}_i\| \leq \epsilon \delta \quad (3.7)$$

то справедливо также неравенство  $|r - z_\delta|^2_{L_2(T; V_2)} \leq d_2 v_1(\delta, \epsilon)$ . Здесь  $d_j = d_j(\epsilon_0, \delta_0, R, e)$ ,  $j = 1, 2$ , — постоянные, записываемые в явном виде.

В силу теоремы 3.1, когда величины  $\epsilon$ ,  $\delta$  и  $\epsilon \delta^{-5/2}$  малы, функции  $v^*$  и  $\bar{y}^\delta$  будут подходящими приближениями  $f$  и  $r$ . Если восстановлению подлежит лишь температура среды, то можно также воспользоваться приведенным выше алгоритмом. При этом, однако, вычислять управление  $u^*$  не следует — на  $i$ -м шаге необходимо вычислять лишь элементы  $y_{i+1}^*, x_{i+1}$  и траектории модели (3.6).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе//Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51—60.
2. Осипов Ю. С., Кряжимский А. В. О динамическом решении операторных уравнений//Докл АН СССР. 1983. Т. 269. № 3. С. 552—556.
3. Osipov Yu. S./Control problems under insufficient information./Lecture Notes Control and Inform. Sci. 1987. V. 113. P. 29—51.
4. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. М.: Мир, 1989. 492 с.
5. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Мир, 1980. 383 с.
6. Barbu V. Optimal control of variational inequalities. L.: Pitman. 1984. 306 p.

Екатеринбург

Поступила в редакцию  
13.I.1992