МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1993

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. С. А. САЗОНОВА

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СЕТЧАТЫХ ПЛАСТИН С УПРУГИМ КОНТУРОМ

Рассматриваются свободные колебания пластины, образованной двумя ортогональными семействами стержней, направления осей которых совпадают с направлениями сторон прямоугольного контура. Считается, что сетка стержней достаточно густая и поэтому при исследовании задачи может быть использована континуальная расчетная модель.

Сформулирована задача на собственные значения, когда имеются упруго проседающие и упруго вращающиеся по нормали к контуру опоры. Для отыскания приближенного аналитического решения рассматриваемой задачи используется метод декомпозиции. Сопоставление полученного и точного решений в случае шарнирного опирания показывает высокую точность приближенных результатов.

1. Использование континуальной расчетной модели приводит к следующему дифференциальному уравнению поперечного изгиба рассматриваемой сетчатой пластины [1]:

$$I_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (C_1 + C_2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \qquad (1)$$

$$I_1 = E_1 J_1 / a_1,\ I_2 = E_2 J_2 / a_2,\ C_1 = G_1 J_{1*} / a_1,\ C_2 = G_2 J_{2*} / a_2$$

где $E_1 J_1$, $G_1 J_{1*}$ — жесткости при изгибе и кручении продольных стержней (вдоль оси x); $E_2 J_2$, $G_2 J_{2*}$ — жесткости при изгибе и кручении поперечных стержней (вдоль оси y); a_1, a_2 — расстояния между осями соседних стержней продольного и поперечного направлений; w — поперечный прогиб пластины; q — интенсивность поперечной нагрузки.

В дальнейшем будем рассматривать свободные установившиеся колебания сетчатой пластины. Как известно, в этом случае колебания будут гармоническими и чтобы получить уравнение колебаний следует в (1) принять $q = m\omega^2 w$:

$$I_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (C_1 + C_2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - m\omega^2 w = 0 \qquad (2)$$

где m — масса, приходящаяся на единицу площади срединной плоскости пластины; ω — круговая частота свободных колебаний.

Введем следующие обозначения: $\alpha = x/l_1$, $\beta = y/l_2$, $u = w/l_1$, $\lambda = l_1/l_2$, $g_1 = I_2/I_1$, $g_2 = (C_1 + C_2)/I_1$, $\Omega = m a_1 l_1^4 \omega^2/(E_1 J_1)$. В этих обозначениях $2l_1$, $2l_2$ — длины сторон прямоугольной пластины в направлениях осей x и y соответственно.

Тогда уравнение (2) примет следующий безразмерный вид:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^4} + g_2 \lambda^2 \frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + g_1 \lambda^4 \frac{\partial^4 u}{\partial \beta^4} - \Omega u = 0 \qquad (3)$$

Сформулируем краевые условия упругого контура при $\alpha = \pm 1$:

$$K_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \pm (1-K_1)\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0,\ K_2 \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3} \mp (1-K_2)\, u = 0 \tag{4}$$

а также при $\beta = \pm 1$:

$$K_3 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \pm (1-K_3)\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0,\ K_4 \frac{\partial^3 u}{\partial \beta^3} \mp (1-K_4)\, u = 0 \tag{5}$$

Итак, получена задача (3)—(5) на собственные значения, содержащая параметр Ω.

Значения K_i ($i = \overline{1,4}$) изменяются в пределах $0 \le K_i \le 1$. Случаи $K_1 = K_3 = 0$ ($K_1 = K_3 = 1$) соответствуют отсутствию на контуре угла поворота (изгибающего момента), при $K_2 = K_4 = 0$ ($K_2 = K_4 = 1$) на контуре прогиб (поперечная сила) равен нулю.

При решении этой задачи будем использовать метод декомпозиции [2]. Для этого сформулируем три вспомогательные задачи.

Задача 1 (краевая). Найти решение дифференциального уравнения

$$\partial^4 u_1 / \partial \alpha^4 = f_1(\alpha, \beta) \tag{6}$$

при краевых условиях (4), в которых $u = u_1$.

Задача 2 (краевая). Найти решение дифференциального уравнения

$$\partial^4 u_2 / \partial \beta^4 = f_2(\alpha, \beta) \tag{7}$$

при краевых условиях (5), в которых $u = u_2$.

Задача 3 — решение дифференциального уравнения

$$\Phi(\alpha, \beta) = f_1(\alpha, \beta) + g_2 \lambda^2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + g_1 \lambda^4 f_2(\alpha, \beta) - \Omega u_3 = 0 \tag{8}$$

Исходная задача (3)—(5) эквивалентна задаче (6)—(8) при выполнении условия

$$u = u_1 = u_2 = u_3 \tag{9}$$

Найдем приближенное решение, принимая $f_1(\alpha, \beta) = f_1(\beta)$, $f_2(\alpha, \beta) = f_2(\alpha)$. Приравняв в соответствии с (9) решения задач 1, 2, получим

$$u_1 = u_2 = ({}^1/_{24}\alpha^4 + {}^1/_2 B_2 \alpha^2 + B_0)({}^1/_{24}\beta^4 + {}^1/_2 B_6 \beta^2 + B_4)c$$

$$B_0 = {}^1/_{24}(1 + 4K_1) + K_2/(1 - K_2),\ B_2 = -{}^1/_6(1 + 2K_1)$$

где значения B_4 и B_6 получаются из B_0 и B_2 путем замены K_1 и K_2 соответственно на K_3 и K_4 (считается, что $K_2 \ne 1$, $K_4 \ne 1$), c — произвольная постоянная.

Уравнение (8) решим методом Бубнова — Галеркина при условии (9):

$$\int_0^1 \int_0^1 u \Phi \, d\alpha \, d\beta = 0$$

Выполняя интегрирование (f_1 и f_2 в (8) определяются из (6), (7), (9)) и принимая $c \ne 0$, получим

$$\Omega = \frac{1512\,(120R_{12} + 40R_1 + 1)}{181\,440R_{12}^2 + 36\,288R_1^2 + 3024R_{12} + 2160R_1 + 120\,960R_{12}R_1 + 35} +$$

$$+ g_1\lambda^4 \frac{1512\,(120\,R_{34} + 40\,R_3 + 1)}{181\,440\,R_{34}^2 + 36\,288R_3^2 + 3024\,R_{34} + 2160\,R_3 + 120\,960\,R_{34}R_3 + 35} + \tag{10}$$

$$+ g_2\lambda^2 \frac{108\,(1120\,R_1^2 + 280\,R_{12} + 196\,R_1 + 3360\,R_{12}R_1 + 5)}{181\,440\,R_{12}^2 + 36\,288\,R_1^2 + 3024\,R_{12} + 2160\,R_1 + 120\,960\,R_{12}R_1 + 35} \times$$

$$\times \frac{108\,(1120\,R_3^2 + 280\,R_{34} + 196\,R_3 + 3360\,R_{34}R_3 + 5)}{181\,440\,R_{34}^2 + 36\,288\,R_3^2 + 3024\,R_{34} + 2160\,R_3 + 120\,960\,R_{34}R_3 + 35}$$

$$R_{12} = 1/24\,(1 + 4K_1) + K_2/(1 - K_2),\; R_1 = -1/12\,(1 + 2K_1)$$

Формулы для R_{34} и R_3 получаются из формул для R_{12} и R_1 путем замены K_1 и K_2 соответственно на K_3 и K_4.

В общем случае коэффициенты жесткости опор являются функциями Ω ($K_i = K_i(\Omega)$). Тогда уравнение (10) относительно Ω может быть, например, решено методом последовательных приближений.

2. Выполним пример расчета. Рассмотрим случай шарнирного опирания пластины при $g_1 = g_2 = 1$. В этом случае $K_1 = K_3 = 1$, $K_2 = K_4 = 0$. Задача допускает точное решение; для частоты свободных колебаний $\Omega = (\pi/2)^4(1 + g_2\lambda^2 + g_1\lambda^4)$.

Приближенное решение (10) имеет высокую точность: наибольшая погрешность будет соответствовать случаю $\lambda = \infty$ и равна 0,14%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пшеничнов Г. И.* Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. М.: Наука, 1982. 352 с.
2. *Пшеничнов Г. И.* Метод декомпозиции решений уравнений и краевых задач//Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 792—794.

Воронеж

Поступила в редакцию
26.VIII.1991