МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1993

УДК 539.3 : 534.1

© 1993 г. Е. Б. КУЗНЕЦОВ, В. И. ШАЛАШИЛИН

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ КАК ЗАДАЧА ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Задачи статического нелинейного деформирования твердых тел обычно сводятся к построению непрерывного и дифференцируемого однопараметрического множества решений. Поэтому для них естественно применение метода продолжения решения по параметру. Стратегия продолжения решения с выбором оптимального параметра продолжения разработана в монографии [1]. Использованный там подход реализует предложенный в [2] параметр длины дуги кривой множества решений и обеспечивает наилучшую обусловленность пошаговых линеаризованных систем в каждый момент процесса продолжения решения.

Здесь рассматривается развитие этих идей на задачи динамического деформирования.

1. Задачи динамического деформирования систем с конечным числом степеней свободы сводятся обычно к канонической форме задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{y}/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \tag{1}$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T, \quad \mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)^T, \quad \mathbf{y}_0 = (y_{10}, \ldots, y_{n0})^T; \quad \mathbf{y}, \mathbf{f}, \mathbf{y}_0 \in R^n$$

Рассмотрим интегральную кривую, дающую решение задачи (1), как кривую в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве R^{n+1} : $\{\mathbf{y}, t\}$. Тогда процесс построения этой интегральной кривой, т. е. процесс построения решения задачи (1) можно рассматривать как процесс продолжения решения по параметру. С этой точки зрения для традиционных численных методов, таких как методы Рунге — Кутта, Адамса, Милна и других, параметром продолжения является время.

Следуя идее, высказанной в [1, 2], введем параметр λ такой, что

$$d\lambda^2 = dy_i dy_i + dt^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

Здесь и ниже предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до n.

Из представления (2) ясно, что λ является длиной дуги интегральной кривой, а $\mathbf{y}$ и t считаются дифференцируемыми функциями λ, т. е.

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\lambda), \quad t = t(\lambda) \tag{3}$$

Тогда уравнения (1), (2) можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda}\mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \frac{dy_i}{d\lambda}\frac{dy_i}{d\lambda} + \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = 1 \tag{4}$$

Решив эту систему уравнений относительно $d\mathbf{y}/d\lambda$ и $dt/d\lambda$, получим

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\lambda} = \frac{\mathbf{f}(t, \mathbf{y})}{\sqrt{1 + f_i f_i}}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_i f_i}} \tag{5}$$

Так как λ не входит явно в уравнения (5), то начало отсчета λ может быть выбрано произвольно. Выберем его так, чтобы $\lambda = 0$ соответствовало $t = t_0$, т. е. $t(0) = t_0$. Тогда начальные условия, дополняющие (5) и соответствующие условиям (1) представляются в виде

$$y(0) = y_0, \quad t(0) = t_0 \tag{6}$$

Уравнения (5) вместе с условиями (6) составляют задачу Коши по λ. Система уравнений (5) выгодно отличается от системы (1) тем, что при любом λ евклидова норма ее правой части равна единице. Это снимает многие проблемы, связанные с особенностями поведения правых частей, возникающие для (1). В частности, проблемы, характерные для жестких систем [3, 4].

2. В качестве тестового примера рассмотрим решение уравнений, описывающих поведение «орегонатора» с предельным циклом

$$dy_1/dt = 77{,}27\,(y_2 + y_1\,(1 - 8{,}375 \cdot 10^{-6} y_1 - y_2)) \tag{7}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{77{,}27}\,(y_3 - (1 + y_1)\,y_2), \quad \frac{dy_3}{dt} = 0{,}161\,(y_1 - y_3)$$

Эта система является жесткой. Ее решения быстро изменяются по величине на много порядков. В [5] приводятся графики решения этой системы и отмечается, что она «служит серьезным испытанием для программ численного интегрирования» (см. п. 1.16).

Систему (7) будем интегрировать при следующих начальных условиях:

$$y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 2 \tag{8}$$

Так как при интегрировании жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений часто встречаются ситуации, когда шаг интегрирования h должен претерпевать существенные изменения внутри интервала интегрирования, то, очевидно, программа должна иметь возможность осуществлять контроль за точностью вычислений. Вначале было решено воспользоваться простейшей схемой типа прогноза и коррекции, в которой прогноз осуществляется при помощи явной, а коррекция — неявной формулы Эйлера. Причем, например, при решении системы (1), если первый прогноз получается согласно формуле $y^p_{m+1} = y_m + h\mathrm{f}\,(t_m, y_m)$, а корреляция согласно формуле

$$y^c_{m+1} = y_m + h\mathrm{f}\,(t_{m+1}, y^p_{m+1}) \tag{9}$$

то последующие итерации проводятся по формуле (9) как процесс простой итерации, в котором значение, полученное на данном шаге, на следующем рассматривается как прогноз.

В качестве ошибки δ на шаге $m + 1$ рассматривается величина

$$\delta = \left[\sum_{k=1}^{n} (y^c_{m+1,k} - y^p_{m+1,k})^2\right]^{1/2}$$

Если за 10 итераций величина погрешности δ не стала меньше заданной точности ε, то шаг интегрирования делится пополам и вычислительный процесс повторяется от точки (t_m, y_m) с новым шагом, в противном случае интегрирование продолжается уже от точки $(t_{m+1} = t_m + h,\ y_{m+1} = y^c_{m+1})$. Причем, если заданная точность вычислений превосходит величину погрешности δ более чем в 100 раз, а итерационный процесс (9) сошелся на первой же итерации, то шаг интегрирования удваивается.

Отметим, что программа, разработанная в соответствии с вышеописанным алгоритмом, может потребовать слишком много времени счета на тех участках, где шаг интегрирования становится очень мелким, поэтому была применена модификация метода простой итерации. Она заключалась в том, что итерационный процесс строится на основе метода Ньютона — Рафсона, в котором учитываются только элементы, стоящие на главной диагонали матрицы Якоби. В этом случае итерационный процесс описывается формулой

$$y^c_{m+1,k} = y^p_{m+1,k} - \frac{y_{m,k} + hf_k(t_{m+1}, y^p_{m+1}) - y^p_{m+1,k}}{h\partial f_k(t_m, y_m)/\partial y_{m,k} - 1} \tag{10}$$

и алгоритм вычислений будет следующим: если итерационный процесс, задаваемый формулой (9) не достиг заданной точности за 10 итераций, то включается в работу итерационный процесс, описываемый формулой (10), в котором диагональные элементы матрицы Якоби вычисляются не на каждой итерации, а только в случае, если этот итерационный процесс не сходится за 10 итераций. Если же и эта мера не дает результата, то только в этом случае происходит деление шага пополам.

Согласно вышеописанному алгоритму была разработана программа PC1, написанная на алгоритмическом языке ФОРТРАН для ПЭВМ типа IBM.

После преобразования задачи (7), (8) к задаче вида (5), (6), последняя интегрировалась с помощью программы PC1. Один цикл поведения орегонатора (7), (8), соответствующий изменению времени t в пределах от 0 до 303, просчитывался при заданной точности вычислений $\varepsilon = 10^{-4}$ и начальном шаге интегрирования $\Delta\lambda = 0{,}1$ за 90 с. Численные результаты хорошо согласуются с графическими, приведенными в [5].

Кроме того, для решения задачи (7), (8) была использована программа DLSODE, которая является одной из последних версий, программ серии Гир, предназначенных для интегрирования жестких систем уравнений. Эта программа взята из пакета программ ODEPACK, собранных в [6]. С ее помощью задача (7), (8) была решена за 13 с.

Большое отличие во временах счета программ PC1 и DLSODE объясняется тем, что последняя использует формулы интегрирования до шестого порядка точности, тогда как программа PC1 только первого. Поэтому были разработаны еще две программы PC2 и PC3, использующие многошаговые формулы дифференцирования назад [7] второго и третьего порядка точности, соответственно.

Согласно рекомендациям [4], прогноз целесообразно вычислять по экстраполяционным формулам, использующим только значения самого вектора решения в предыдущих точках.

При разработке программы PC2 первый прогноз вычислялся по формуле $y^p_{m+1} = 2y_m - y_{m-1}$, а коррекция по формуле $y^c_{m+1} = 1/3\,(4y_m - y_{m-1} + 2hf(t_{m+1}, y^p_{m+1}))$.

При удвоении шага использовались результаты, вычисленные ранее, а при делении пополам решение в точке $m - 1/2$ вычислялось по формуле $y_{m-1/2} = 1/2\,(y_{m-1} + y_m)$.

В программе же PC3 первый прогноз вычислялся по формуле $y^p_{m+1} = 3y_m - 3y_{m-1} + y_{m-2}$, а коррекция по формуле $y^c_{m+1} = 1/11\,(18y_m - 9y_{m-1} + 2y_{m-2} + 6hf(t_{m+1}, y^p_{m+1}))$. Недостающие значения y при делении шага пополам подсчитывались как $y_{m-1/2} = 1/8\,(3y_m + 6y_{m-1} - y_{m-2})$, а при удвоении шага как $y_{m-3} = y_m - 3y_{m-1} + 3y_{m-2}$.

Стартовой процедурой для программ PC2, PC3 являлся усовершенствованный метод Эйлера. Рассматриваемая задача (7), (8), преобразованная предварительно к виду (5), (6), была проинтегрирована при помощи программы PC2 за 70 с, а при помощи программы PC3 за 20 с. При этом итерационный процесс осуществлялся посредством формул типа (10), причем диагональные элементы матрицы Якоби J_{ii}, стоящие в знаменателях этих формул, вычислялись как

$$J_{ii} = \left(f_{i,i}' \sum_{k=1}^{4} f_k^2 - f_i \sum_{k=1}^{4} f_k f_{k,i}'\right) / \left(\sum_{k=1}^{4} f_k^2\right)^{3/2}$$

Здесь f_k — правые части исходной системы (5), причем полагалось, $f_4 = 1$; $f_{i,j}'$ — производная f_i по y_j.

Анализируя численные результаты, можно сделать выводы: программа PC1, конечно, значительно уступает во времени счета программе DLSODE, но она не требует хранения информации, полученной на предыдущих шагах. Это может оказаться решающим при изучении многомерных задач механики сплошной среды, которые приводятся к системе ОДУ; программа PC3 по времени счета уже незначительно отличается от своего зарубежного аналога, однако, несомненным ее преимуществом является то, что при ее помощи могут быть проинтегрированы уравнения, имеющие замкнутую интегральную кривую или интегральную кривую, содержащую предельные точки, а также могут быть решены некоторые уравнения, правые части которых обращаются в некоторых точках в бесконечность.

В частности программа DLSODE бессильна вычислить полную интегральную кривую дифференциального уравнения (a, l — заданные числа):

$$dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$$

$$P(x, y) = l^2 x - (x^2 + y^2 - ax)(2x - a)$$

$$Q(x, y) = y\,(2(x^2 + y^2 - ax) - l^2)$$

Замкнутая интегральная кривая этого уравнения, называемая улиткой Паскаля, описывается уравнением $(x^2 + y^2 - ax)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0$. Но эту интегральную кривую можно без особого труда получить при помощи предлагаемого подхода, для чего предварительно преобразуем исходное уравнение к виду (5), т. е. запишем его так

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{P(x, y)}{[P^2(x, y) + Q^2(x, y)]^{1/2}}, \quad \frac{dx}{d\lambda} = \frac{Q(x, y)}{[P^2(x, y) + Q^2(x, y)]^{1/2}}$$

Эта система уравнений при начальных условиях $y(0) = l$, $x(0) = 0$ интегрировалась методом Рунге — Кутта четвертого порядка точности с шагом $\Delta\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ при $a = 1$, $l = 1{,}5$. Отличие численного решения от точного не превосходило $0{,}2 \cdot 10^{-4}$. Для того чтобы получить всю интегральную кривую, параметр λ изменялся от 0 до 10,5.

Другое проявление явления жесткости можно изучить на примере сингулярно возмущенного дифференциального уравнения, т. е. уравнения, содержащего малый параметр μ при старшей производной. Простейшим уравнением этого типа является уравнение вида

$$\mu dy/dt = f(t, y), \quad \mu > 0 \tag{11}$$

Рассмотрим случай, когда вырожденное уравнение, соответствующее уравнению (11) $f(t, x) = 0$, имеет единственное решение $x(t)$ и в окрестности этого решения величина $\partial f/\partial y$ отрицательна. Последнее условие является достаточным для устойчивости решения $x(t)$.

Характер поведения решения уравнения (11) будет следующим. Для достаточно малого μ касательные к интегральным кривым даже при небольшом отклонении от функции $x(t)$ почти параллельны оси y. И чем меньше величина μ, тем быстрее осуществляется сближение интегральной кривой и решения $x(t)$ вырожденного уравнения.

Эта ситуация может быть описана следующим образом. У любой интегральной кривой из рассматриваемой области выделяются два участка с существенно различным поведением решения, причем продолжительность первого значительно меньше второго. Первый участок с быстрым изменением искомой функции отражает стремление интегральной кривой к графику функции $x(t)$ и называется пограничным слоем. На втором участке производные решения значительно меньше, а интегральная кривая практически совпадает с графиком $x(t)$. Пограничный слой всегда будет иметь место, кроме случая, когда начальное условие является корнем вырожденного уравнения, т. е. $y_0 = x(t_0)$. Различный характер поведения решения на обоих участках проявляется тем отчетливее, чем меньше величина параметра μ.

Таким образом, вне пограничного слоя для описания решения дифференциального уравнения (11) может быть использовано решение вырожденного уравнения. То что даже при небольшом отклонении начальных условий от графика функции $x(t)$ в любой его точке производная решения dy/dt резко возрастает по сравнению с производной dx/dt и определяет сложность численной реализации задач рассматриваемого типа.

В качестве одной из таких задач рассмотрим так называемую «специальную задачу» Далквиста [8]:

$$\mu dy/dt = (1 - t)\,y - y^2, \quad y(0) = 0{,}5, \quad \mu = 10^{-6} \tag{12}$$

Хотя это нелинейное уравнение является уравнением Бернулли, но оно не имеет аналитического решения, однако вне пограничного слоя, который для данной задачи чрезвычайно мал, численное решение может быть сравнено с решением вырожденного уравнения $x = 1 - t$.

Решение задачи (12) будем отыскивать на отрезке $t \in [0,1]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$. Для этого задача (12) согласно преобразованию (5), (6) записывалась в виде

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{(1 - t)\,y - y^2}{Z}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\mu}{Z}, \quad y(0) = 0{,}5,\ t(0) = 0 \tag{13}$$

$$Z = [\mu^2 + (y(1 - t) - y^2)^2]^{1/2}$$

Решение строилось при помощи формул типа (10), так как простая итерация требовала слишком большого времени счета, поэтому необходимо было вычислять диагональные элементы матрицы Якоби системы уравнений (13).

Время решения задачи (13) составило 5 мин при использовании программы РС1 и 2 мин 20 с при использовании программы РС2, причем использование программы РС3 для решения этой задачи привело к увеличению времени счета до 6 мин. Это, по-видимому, объясняется тем, что линейный прогноз, заложенный в программах РС1 и РС2, более эффективен при получении решения вне пограничного слоя, которое описывается линейной функцией $x = 1 - t$, являющейся решением соответствующего вырожденного уравнения. Полученные численные результаты согласуются с аналитическими, задаваемыми функцией $x = 1 - t$, до четвертого знака.

В качестве еще одного примера проявления жесткости рассмотрим продольное возмущенное движение самолета. Если исследовать прямолинейный установившийся полет без скольжения с небольшим отклонением параметров от начальных в процессе возмущенного движения, то линеаризованные уравнения возмущенного движения самолета могут быть записаны в виде [4]:

$$dy/dt = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T \tag{14}$$

$$A = \begin{Vmatrix} -0{,}104 & 0{,}043 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}57 & -5{,}12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12{,}574 & -43{,}68 & 0 & 9{,}672 \end{Vmatrix}$$

Для того чтобы была возможность сравнить численные результаты с точными получим аналитическое решение системы (14), отыскивая его в виде $\mathbf{y} = \mathbf{a}e^{kt}$. Тогда корни характеристического уравнения этой системы $k_1 = 0{,}1596$, $k_2 = -0{,}265$, $k_{3,4} = -7{,}395 \pm i6{,}21$ можно разделить на две группы $|k_1| < |k_2| \ll |k_3| = |k_4|$, что является типичным при горизонтальном движении самолета и обусловливается физикой процесса. Последние неравенства являются признаком жесткости.

Таким образом, система (4) является жесткой на любом отрезке $[0, T]$, длительность которого значительно превышает ширину пограничного слоя, приблизительно равную 0,1. Общее решение этой системы уравнений может быть записано в виде

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{a}_1 \exp(0{,}1596t) + C_2\mathbf{a}_2 \exp(-0{,}265t) + [(C_3\mathbf{a}_3 +$$

$$+ C_4\mathbf{a}_4)\cos 6{,}21t + (C_3\mathbf{a}_4 - C_4\mathbf{a}_3)\sin 6{,}21t]\exp(-7{,}395t) \tag{15}$$

$$\mathbf{a}_1 = (-0{,}36795;\ 0{,}06996;\ 1;\ 0{,}1596)^T,\quad \mathbf{a}_2 = (0{,}6563;\ -0{,}1316;\ 1;\ -0{,}265)^T$$

$$\mathbf{a}_3 = (0{,}57385\cdot 10^{-2};\ 1{,}2664;\ 1;\ -7{,}395)^T,\quad \mathbf{a}_4 = (-0{,}5971\cdot 10^{-3};\ -0{,}7274;\ 0;\ -6{,}21)^T$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Если начальные условия задать в виде

$$t = 0,\quad y_1 = y_3 = y_4 = 0,\quad y_2 = 1 \tag{16}$$

то произвольные постоянные примут значения $C_1 = -0{,}2969$, $C_2 = -0{,}1711$, $C_3 = 0{,}468$, $C_4 = -0{,}5576$.

Задача (14), (16) преобразовывалась к виду (5), (6) и интегрировалась при помощи программы РС1 без использования элементов матрицы Якоби. Решение на отрезке изменения времени $t \in [0,5]$ при заданной точности вычислений $\varepsilon = 10^{-7}$ было получено за 5 с. Отличие численных результатов от точных (15) находилось в пределах 0,01.

3. Предложенный здесь параметр продолжения решения задачи Коши может быть использован во всех тех задачах, которые сводятся к построению однопараметрических непрерывных и дифференцируемых множеств (кривых) в евклидовом пространстве. Примеры таких задач даны в [1], где рассмотрены системы нелинейных уравнений с параметром и краевые задачи с параметром. В качестве других задач такого типа можно назвать задачи Коши для систем дифференциальных уравнений, решаемых совместно с нелинейными алгебраическими или трансцендентными уравнениями, для систем неявно заданных дифференциальных уравнений, для интегральных уравнений типа Вольтерра и для смешанных систем уравнений, состоящих из перечисленных выше.

Ниже рассмотрим в качестве примера задачу Коши для смешанной системы уравнений, неразрешенных относительно производных, и нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, d\mathbf{y}/dt) = 0$$

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{17}$$

$$dy/dt = (dy_1/dt, \ldots, dy_n/dt)^T, \quad F = (F_1, \ldots, F_m)^T$$

$$x = (x_1, \ldots, x_m)^T, \quad x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{m0})^T$$

Остальные обозначения остались прежними, но вектора x_0 и y_0 должны удовлетворять системе $F(t_0, x_0, y_0) = 0$.

В качестве параметра продолжения λ возьмем длину интегральной кривой системы уравнений (17) в пространстве R^{n+m+1}, тогда дифференциал дуги этой кривой должен удовлетворять равенству

$$d\lambda^2 = dy_i dy_i + dx_j dx_j + dt^2 \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m) \tag{18}$$

После введения обозначений

$$dy/d\lambda = Y, \quad dx/d\lambda = X, \quad dt/d\lambda = T \tag{19}$$

$$Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^T, \quad X = (X_1, \ldots, X_m)^T$$

равенство (18) можно переписать в виде

$$Y_i Y_i + X_j X_j + T^2 = 1 \tag{20}$$

Продифференцируем по λ систему уравнений (17). Учитывая, что $dy/dt = Y/T$, получим

$$f,_{Y_i} Y_i' + f,_T T' + f,_{y_i} Y_i + f,_t T + f,_{x_j} X_j = 0$$

$$F,_{y_i} Y_i + F,_t T + F,_{x_j} X_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m) \tag{21}$$

Здесь в уравнениях после запятой стоит переменная, по которой производится дифференцирование, а штрих означает дифференцирование по параметру продолжения λ.

К системе уравнений (21) следует добавить равенство (20). Если теперь второе уравнение системы (21) и равенство (20) продифференцировать по λ, то приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно Y', X', T':

$$f,_{Y_i} Y_i' + f,_T T' = -(f,_{y_i} Y_i + f,_t T + f,_{x_j} X_j)$$

$$F,_{y_i} Y_i' + F,_t T' + F,_{x_j} X_j' = -(F,_{y_i}' Y_i + F,_t' T + F,_{x_j}' X_j)$$

$$Y_i Y_i' + TT' + X_j X_j' = 0 \tag{22}$$

Заметим, что штрих, стоящий при функции в правой части второго уравнения этой системы, определяет сложную производную по λ от соответствующей функции.

Решая систему уравнений (22) по правилу Крамера, получим

$$Y_i' = \Delta_i/\Delta, \quad T' = \Delta_{n+1}/\Delta, \quad X_j' = \Delta_{n+1+j}/\Delta \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m) \tag{23}$$

Здесь Δ — определитель системы (22), Δ_k — определитель, получающийся из определителя системы Δ после замены в нем k-го столбца столбцом свободных членов ($k = 1, \ldots, n + m + 1$).

Таким образом, с учетом выражений (19), (22), (23) задача Коши (17) преобразуется в задачу Коши для системы уравнений

$$dy/d\lambda = Y, \quad dY_i/d\lambda = \Delta_i/\Delta, \quad dt/d\lambda = T$$

$$dT/d\lambda = \Delta_{n+1}/\Delta, \quad d\mathbf{x}/d\lambda = \mathbf{X}, \quad dX_j/d\lambda = \Delta_{n+1+j}/\Delta$$

$$(i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m)$$

$$\lambda = 0, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_0, \quad t = t_0, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0, \quad T = T_0, \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}_0$$

$$\mathbf{Y}_0 = (Y_{10}, \ldots, Y_{n0})^T, \quad \mathbf{X}_0 = (X_{10}, \ldots, X_{m0})^T$$

причем неизвестные $\mathbf{Y}_0, T_0, \mathbf{X}_0$ определяются из решения следующей системы нелинейных уравнений:

$$\mathbf{f}\,(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{Y}_0/T_0) = 0, \quad \mathbf{F},_{y_i} Y_{i0} + \mathbf{F},_t T_0 + \mathbf{F},_{x_j} X_{j0} = 0 \tag{24}$$

$$Y_{i0} Y_{i0} + T_0^2 + X_{j0} X_{j0} = 1 \quad (i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, m)$$

производные от векторной функции $\mathbf{F}$ вычисляются в точке $(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.

В деформируемых системах решение уравнений (24) обычно соответствует недеформированному состоянию, которое, как правило, легко находится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григолюк Э. И., Шалашилин В. И.* Проблемы нелинейного деформирования. М: Наука, 1988. 231 с.
2. *Ворович И. И., Зипалова В. Ф.* К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши//ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 894—901.
3. *Gear C. W.* Numerical initial value problems in ordinary differential equations. N Y: Prentice Hall. Englewood Cliffs. 1971. 253 p.
4. *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
5. *Hairer E., Norsett S. P., Wanner G.* Solving ordinary differential equations. I. Berlin: Springer — Verlag, 1987. 455 p.
6. *Hindmarsh A. C.* Odepack. A systematized collection of ODE solvers in numerical methods for scientific computation. N Y: R. S. Stepleman. ed. North — Holland. 1983. P. 55—64.
7. *Curtiss C. F., Hirschfelder J. O.* Integration of stiff equations//Proc. of the National Academy of Sciences of U. S. 1952. V. 38. P. 235—243.
8. *Doolan E. P., Miller J. J. H., Schilders W. H. A.* Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers. Dublin. Boole Press. 1980.

Москва

Поступила в редакцию 24.IX.1992