МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1993

УДК 539.3

© 1993 г. В. С. САРКИСЯН

МАГНИТОУПРУГОСТЬ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Гипотеза магнитоупругости тонких тел [1] в [2] применена в задачах о колебании анизотропных пластин и оболочек при наличии внешнего магнитного поля. Задача колебания анизотропной электропроводной пластинки в поперечном магнитном поле на основе уточненной теории изгиба пластин с учетом поперечных сдвиговых деформаций рассмотрена в [3]. Основываясь на гипотезах магнитоупругости, в [4] выводится полная система уравнений магнитоупругости неортотропной пластинки с анизотропной электропроводностью. В настоящей работе получена система уравнений неоднородной анизотропной пластинки в магнитном поле с учетом поперечных сдвиговых деформаций.

Рассматривается анизотропная электропроводная пластинка постоянной толщины $2h$ во внешнем постоянном магнитном поле B_0 (B_{0x}, B_{0y}, B_{0z}). Предполагается, что материал пластинки неоднородный и в каждой точке имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, совпадающую со срединной плоскостью пластинки (xoy). Анизотропия и неоднородность материала сказываются и в упругих, и в электропроводных свойствах ее. Материал пластинки имеет конечную электропроводность $\sigma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и не обладает свойствами самопроизвольной поляризации и намагничиваемости. Коэффициент магнитной проницаемости как внешней (вакуум), так и внутренней (пластинка) сред в принятой системе единиц измерения считаем равным единице. Поверхностные токи и сторонние заряды отсутствуют, токами смещения пренебрегаем. Принимаем, что коэффициенты электропроводности σ_i и упругости a_{ij} являются функциями координат x, y. Исходные соотношения, на основании которых выводятся уравнения для сопряженных механических и электромагнитных полей в пластинке, базируются на гипотезах магнитоупругости тонких тел [1], согласно которым

$$e_1 = \varphi(x, y, t), \quad e_2 = \psi(x, y, t), \quad h_3 = f(x, y, t), \quad u_3 = w(x, y, t)$$

$$u_1 = u(x, y, t) - z\partial w/\partial x + J_0 (a_{45}(x, y)\,\Psi(x, y, t) + a_{55}(x, y)\,\Phi(x, y, t))$$

$$u_2 = v(x, y, t) - z\partial w/\partial y + J_0 (a_{44}(x, y)\,\Psi(x, y, t) + a_{45}(x, y)\,\Phi(x, y, t)) \qquad (1)$$

где (u_1, u_2, u_3) — вектор перемещения точек пластинки, (u, v, w) — вектор перемещения точек срединной плоскости пластинки; e_1, e_2 и h_3 — тангенциальные и нормальные компоненты индуцированного в пластинке электромагнитного поля; Φ, Ψ — искомые функции, характеризующие поперечные сдвиговые деформации пластинки; $J_0 = z/2\,(h^2 - z^2/3)$.

Нормальная компонента индуцированного электрического и тангенциальные компоненты магнитного поля находятся из системы уравнений электродинамики для среды с использованием граничных условий на поверхности $z = \pm h$ пластинки. Имеем

$$h_1 = \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} + z\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma_2}{c}\psi\right) - \frac{4\pi\sigma_2}{c^2}\left[b_1\frac{\partial u}{\partial t} - b_2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + b_3\left(a_{45}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) - b_4\frac{\partial w}{\partial t}\right]$$

$$h_2 = \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} + z\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{4\pi\sigma_1}{c}\varphi\right) - \frac{4\pi\sigma_1}{c^2}\left[b_1\frac{\partial v}{\partial t} - b_2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t} + b_3\left(a_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + a_{45}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) - b_5\frac{\partial w}{\partial t}\right]$$

$$e_2 = \frac{c}{4\pi\sigma_3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_2^+}{\partial x} + \frac{\partial h_2^-}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_1^+}{\partial y} + \frac{\partial h_1^-}{\partial y}\right)\right] - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}\left[z\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \right.$$

$$- \frac{b_5}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \frac{b_1}{c}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t} - \frac{b_2}{c}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y\partial t} + \frac{b_3}{c}\left(a_{44}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial a_{44}}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \right.$$

$$\left.\left. + a_{45}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial a_{45}}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\right] + \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\left[-z\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{b_4}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t} + \frac{b_1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial t} - \right.$$

$$\left. - \frac{b_2}{c}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y\partial t} + \frac{b_3}{c}\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{45}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\right] - \frac{1}{\sigma_3}\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\left[z\varphi - \frac{b_5}{c}\frac{\partial w}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{b_1}{c}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{b_2}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t} + \frac{b_3}{c}\left(a_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\right] + \frac{1}{\sigma_3}\frac{\partial\sigma_2}{\partial y}\left[-z\varphi - \frac{b_4}{c}\frac{\partial w}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{b_1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{b_2}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \frac{b_3}{c}\left(a_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\right] + \frac{1}{\sigma_3}\frac{\partial\sigma_2}{\partial y}\left[-z\psi - \frac{b_4}{c}\frac{\partial w}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{b_1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{b_2}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \frac{b_3}{c}\left(a_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\right] - \frac{B_{0y}}{c}\left[\frac{\partial u}{\partial t} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \right.$$

$$\left. + J_0\left(a_{45}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\right] + \frac{B_{0x}}{c}\left[\frac{\partial v}{\partial t} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t} + J_0\left(a_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + a_{45}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\right] \qquad (2)$$

$$b_1 = zB_{0z}, \quad b_2 = \frac{B_{0z}}{2}(z^2 - h^2), \quad b_3 = \frac{B_{0z}}{4}\left(z^2h^2 - \frac{z^4}{6} - \frac{5h^4}{6}\right)$$

$$b_4 = zB_{0x}, \quad b_5 = zB_{0y}, \quad h_i^{\pm} = h_i(x, y, \pm h, t)$$

Таким образом, принимая гипотезу (1), все компоненты возбуждаемого в пластинке электромагнитного поля с помощью формул (1)—(2) можно определить восемью искомыми функциями u, v, w, φ, ψ, Φ, Ψ и значениями компонент индуцированного магнитного поля h_1 и h_2 на поверхностях пластинки. Отметим также, что все расчетные величины (напряжения, деформации) выражаются через искомые функции u, v, w, φ, ψ, Φ и Ψ.

Из оставшейся части системы уравнений электродинамики для среды с учетом (2) следуют уравнения для φ, ψ и f:

$\partial\psi/\partial x - \partial\varphi/\partial y + 1/c\,\partial f/\partial t = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{4\pi\sigma_2}{c}\left[\psi + \frac{1}{c}\left(B_{0x}\frac{\partial w}{\partial t} - B_{0z}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] = \frac{h_1^+ - h_1^-}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma_1}{c}\left[\varphi + \frac{1}{c}\left(B_{0z}\frac{\partial v}{\partial t} - B_{0y}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right] = \frac{h_2^+ - h_2^-}{2h} \qquad (3)$$

h/a	B_{0z}	0	10^4	$6\cdot10^4$	10^5	$2{,}5\cdot10^5$	$4\cdot10^5$
0,008	$J_m\Omega_0\cdot10^{-3}$ (однородный)	2,45	2,45	2,45	2,44	1,97	0
	$J_m\Omega\cdot10^{-3}$ (неоднородный)	1,83	1,83	1,83	1,82	1,47	0
0,1	$J_m\Omega_0\cdot10^{-3}$ (однородный)	25,7	25,7	26,3	40,7	48,5	48,7
	$J_m\Omega\cdot10^{-3}$ (неоднородный)	19,2	19,2	20,1	35,1	42,3	42,5

Исходя из уравнений движения пластинки, применяя обычную процедуру осреднения по толщине [1] и используя соотношения (1) и (3), с учетом обобщенного закона Гука [5] получим пять уравнений движения неоднородной анизотропной пластинки во внешнем магнитном поле (ввиду громоздкости этих уравнений здесь они не приводятся). Как и следовало ожидать, в этих уравнениях появляются новые члены [4]: например, производные высшего порядка.

Таким образом, уравнения (3) совместно с уравнениями движения и с уравнениями электродинамики для внешней среды составляют полную систему уравнений магнитоупругости неоднородных анизотропных тонких пластин с учетом поперечных сдвиговых деформаций. К этой системе необходимо добавить граничные условия на торцах и поверхностях пластинки.

В заключение рассматривается задача поперечных колебаний ортотропной неоднородной пластинки — полосы во внешнем постоянном магнитном поле $\mathbf{B}_0(0, 0, B_{0z})$.

Предполагается, что материал пластинки слабонеоднородный [5]. Представляя искомые величины в виде рядов по степеням малого физического параметра и ограничиваясь первым приближением, получим в нулевом приближении

$$L_{11}\,[\Phi_0] + L_{12}\,[w_0] = 0, \quad L_{21}\,[\Phi_0] + L_{22}\,[w_0] = 0 \tag{4}$$

А в первом приближении имеем

$$L_{11}\,[\Phi_1] + L_{12}\,[w_1] = q_1(x); \quad L_{21}\,[\Phi_1] + L_{22}\,[w_1] = q_2(x)$$

с соответствующими граничными условиями.

Здесь искомые величины с индексом 0 и 1 соответствуют величинам в нулевом и первом приближениях

$$L_{11} = \frac{h^2}{3}\frac{d}{dx}, \quad L_{12} = -\rho_0\Omega_0^2, \quad L_{21} = -\frac{2h^2}{5}B_{11}^0 a_{55}^0\frac{d^2}{dx^2} + 1 +$$

$$+\frac{2h^2}{5}\frac{B_{0z}^2}{c^2}a_{55}^0\sigma_2^0\Omega_0, \quad L_{22} = B_{11}^0\frac{d^3}{dx^3} - \frac{\sigma_2^0 B_{0z}^2}{c^2}\Omega_0\frac{d}{dx} - \rho_0\Omega_0^2\frac{d}{dx}$$

а $q_i(x)$ — функция, зависящая от решения системы (4). Из системы (4) определяются Ω_0, w_0 и Φ_0, затем из условия ортогональности нулевого и первого приближения определяются Ω_1 и следовательно, относительная частота колебаний ортотропной неоднородной пластинки $\Omega = \Omega_0 + \delta\Omega_1$.

Проведено численное исследование при заданных функциях неоднородности, определены значения частоты неоднородной пластинки в зависимости от напряжения внешнего магнитного поля. Показано, что учет неоднородности материала пластинки приводит к значительному уменьшению частоты колебаний (см. таблицу).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. В., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. В., Белубекян М. В.* К задаче о магнитоупругих колебаниях анизотропных пластин и оболочек//Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение. 1975. С. 26—31.
3. *Ambartsumian S. A.* On the problem of oscillations of the anisotropic electroconductive plates in the magnetic fields//Colloq. Intern. der CNRS, N 295: Comportement mécanique des solides unisotropes, 1982— P. 663—673.
4. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1976. 534 с.
5. *Саркисян В. С., Минасян М. М.* К магнитоупругости неортотропной пластинки с анизотропной электропроводностью//Механика. Изд-во Ереван. ун-та, 1982. Вып. 2. С. 97—101.

Ереван

Поступила в редакцию
26.XI.1992