

© 1993 г. В. В. КУЗНЕЦОВ, И. Ф. ОБРАЗЦОВ

## О ТЕХНИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ИНВАРИАНТОВ В МЕХАНИКЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В [1, 2] рассмотрены вопросы представления соотношений механики деформируемых сред в терминах инвариантов. В отличие от тензорной записи, дающей выражения компонент тензоров в любой системе координат, инвариантные (абсолютные) соотношения не зависят от используемой системы координат. В качестве базисных инвариантов тензора деформаций использовались  $I_1^* = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ ,  $I_2^* = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2$ ,  $I_3^* = \varepsilon_1^3 + \varepsilon_2^3 + \varepsilon_3^3$ , где  $\varepsilon_i$  — главные деформации.

В настоящей статье показано, что значение инвариантов тензора деформаций Грина в общем случае может быть связано с разложением квадрата деформируемого объема элемента. Эта связь позволяет вычислить значения инвариантов как при использовании криволинейной системы координат, так и без использования какой-либо системы координат по изменению характерных размеров объема. При этом используются инварианты, обычно применяемые в теории упругости и имеющие в терминах главных деформаций выражения  $I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ ,  $I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3$ ,  $I_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ . Рассмотрены вопросы построения определяющих соотношений в механике тонкостенных конструкций, основанной на технических гипотезах: классическая нелинейная теория оболочек, теория оболочек с учетом поперечного сдвига, обобщенная теория оболочек, теория изгиба пространственных стержней. Получены основные характеристики напряженно-деформированного состояния, не зависящие от используемых криволинейных координат.

**1. Определение инвариантов.** Рассмотрим возможность определения инвариантов конечных деформаций на основе разложения квадрата объема некоторого выделенного элемента. Квадрат объема элемента в деформированном состоянии может быть записан в виде [3]:

$$V^2 = V_0^2 \sum_{n=0}^3 2^n I_n, \quad I_0 = 1 \quad (1.1)$$

где  $I_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) — инварианты тензора Грина, представляющие собой формы  $n$ -й степени относительно его компонент;  $V_0$  — первоначальный объем. Известно, что тензор может быть определен своими ковариантными, контравариантными, либо смешанными компонентами. Однако его можно определить также неявно, путем задания некоторых линейно независимых комбинаций компонент. Число таких комбинаций должно равняться шести в трехмерном случае. Назовем линейные комбинации компонент тензора его обобщенными компонентами. Обобщенных компонент может быть и более шести, но в этом случае они будут линейно зависимы. Разложение квадрата объема элемента относительно обобщенных компонент запишем в виде

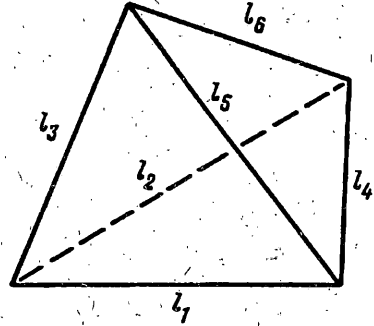
$$V^2 = \sum_{n=0}^3 V_n^2 \quad (1.2)$$

где  $V_n^2$  — форма  $n$ -й степени относительно обобщенных компонент в разложении квадрата объема. Поскольку при линейной замене переменных степень формы сохраняется, то из сравнения (1.1) и (1.2) вытекает следующее определение

$$I_n = 2^{-n} V_n^2 / V_0^2 \quad (1.3)$$

**Предложение.** Инвариант  $n$ -го порядка тензора Грина есть отношение  $V_n^2$  (формы  $n$ -й степени относительно обобщенных компонент в разложении квадрата объема элемента) к квадрату первоначального объема взятое с множителем  $2^{-n}$ .

Если рассматривается двумерный континуум (поверхность, плоскость), то определение инвариантов тензора Грина производится на основе разложения квадрата площади элемента



$$F^2 = \sum_{n=0}^2 F_n^2, \quad I_k = 2^{-k} F_k^2 / F_0^2 \quad (k = 1, 2) \quad (1.4)$$

В этом случае тензор характеризуется тремя обобщенными независимыми компонентами.

Приведем примеры, раскрывающие содержание рассмотренного определения. Выделим в трехмерном континууме объем в виде треугольной пирамиды с ребрами  $l_i$  ( $i=1, \dots, 6$ ), имеющими порядок дифференциалов (фиг). Квадрат объема пирамиды дается формулой

$$V_0^2 = \frac{1}{36} d_{aaa}, \quad d_{abc} = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

$$a_{11} = l_1^2, \quad a_{22} = l_2^2, \quad a_{33} = l_3^2$$

$$a_{12} = a_{21} = 1/2 (l_1^2 + l_2^2 - l_4^2)$$

$$a_{13} = a_{31} = 1/2 (l_1^2 + l_3^2 - l_5^2)$$

$$a_{23} = a_{32} = 1/2 (l_2^2 + l_3^2 - l_6^2)$$

Аналогичным образом определяется квадрат объема деформированной пирамиды  $V^2$  с помощью  $a_{ij}^v$ , где вместо  $l_i$  используются  $l_i^v$  — длины ребер деформированной пирамиды. Принимая за обобщенные компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij} = 1/2 (a_{ij}^v - a_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), получим

$$V^2 = \sum_{n=0}^3 V_n^2$$

$$V_1^2 = 1/18 (d_{aaa} + d_{aav} + d_{ava}), \quad V_2^2 = 1/9 (d_{vaa} + d_{vae} + d_{ave})$$

$$V_3^2 = 2/9 d_{vvv}, \quad I_k = 2^{-k} V_k^2 / V_0^2$$

Рассмотрим еще один пример. Выделим в двумерном континууме элемент площади в виде треугольника со сторонами  $l_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), имеющими порядок дифференциалов. Квадрат площади треугольника определяется формулой

$$F_0^2 = 1/16 [(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^2 - 2(l_1^4 + l_2^4 + l_3^4)]$$

Квадрат площади деформированного треугольника находится заменой  $l_i$  на  $l_i^v$  — длины сторон деформированного треугольника. Принимая за обобщенные компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_i = 1/2 (l_i^{v2} - l_i^2)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), получим

$$F^2 = \sum_{n=0}^2 F_n^2$$

$$F_1^2 = 1/4 [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) - 2(\varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 l_2^2 + \varepsilon_3 l_3^2)]$$

$$F_2^2 = 1/4 [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)], \quad I_k = 2^{-k} F_k^2 / F_0^2$$

Если трехмерное тело отнесено к произвольным криволинейным координатам  $\alpha_i$ , то согласно (1.3):

$$I_E = d_{AAA}^{-1} (d_{EAA} + d_{AEA} + d_{AAE}) \quad (1.6)$$

$$I_{EE} = d_{AAA}^{-1} (d_{EEA} + d_{EAE} + d_{AEE}), \quad I_{EEE} = d_{AAA}^{-1} d_{EEE}$$

$$A_{ij} = R_i R_j, \quad E_{ij} = 1/2 (R_i^V R_j^V - R_i R_j) \quad (1.7)$$

Здесь  $R$  — радиус-вектор точки, индексом после запятой обозначены производные по  $\alpha_i$ , галочкой отмечаются величины в деформированном состоянии. В соответствии с законом состояния [1] могут быть определены инварианты  $I_\sigma, I_{\sigma\sigma}, I_{\sigma\sigma\sigma}$ , тензоры напряжений, соотношение для плотности энергии  $\Pi_V$  в единице объема и другие величины. Например, в случае линейно упругого тела имеют место соотношения

$$I_\sigma = (3\lambda + 2\mu) I_E, \quad I_{\sigma\sigma} = \lambda (3\mu + 4\mu) I_E^2 + 4\mu^2 I_{EE} \\ I_{\sigma\sigma\sigma} = \lambda^2 (\lambda + 2\mu) I_E^3 + 4\lambda\mu^2 I_E I_{EE} + 8\mu^3 I_{EEE} \quad (1.8)$$

$$\Pi_V = 1/2 (\lambda + 2\mu) I_E^2 - 2\mu I_{EE}, \quad \sigma = (I_\sigma^2 - 3I_{\sigma\sigma})^{1/2}$$

Здесь  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные Ламе,  $\sigma$  — интенсивность напряжений, используемая в теориях прочности [4]. Главные напряжения  $\sigma_i^*$  находятся как корни кубического уравнения

$$\sigma^{*3} - I_\sigma \sigma^{*2} + I_{\sigma\sigma} \sigma^* - I_{\sigma\sigma\sigma} = 0 \quad (1.9)$$

Канонический тензор для представления энергии деформации применен в [5].

Рассмотрим применение инвариантов в геометрически нелинейной механике тонкостенных конструкций.

2. Классическая нелинейная теория оболочек. Предполагается, что деформирование трехмерного тела следует кинематической гипотезе Кирхгофа — Лява

$$R = r + zn, \quad R^V = r^V + zn^V \quad (2.1)$$

где  $r, n$  ( $r^V, n^V$ ) — радиус-вектор и орт нормали исходной (деформированной) срединной поверхности оболочки. При этом  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) — произвольные координаты на поверхности,  $\alpha_3 = z$ . Согласно (1.7) в данном случае

$$A_{ij} = a_{ij} + zb_{ij} + z^2 c_{ij}, \quad A_{i3} = A_{3i} = 0, \quad A_{33} = 1 \\ E_{ij} = \varepsilon_{ij} + z\chi_{ij} + \frac{1}{2} z^2 \nu_{ij}, \quad E_{i3} = E_{3i} = 0, \quad E_{33} = 0 \quad (2.2)$$

$$a_{ij} = r_i r_j, \quad b_{ij} = 1/2 (n_i r_j + n_j r_i), \quad c_{ij} = n_i n_j$$

$$a_{ij}^V = r_i^V r_j^V, \quad b_{ij}^V = 1/2 (n_i^V r_j^V + n_j^V r_i^V), \quad c_{ij}^V = n_i^V n_j^V$$

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (a_{ij}^V - a_{ij}), \quad \chi_{ij} = b_{ij}^V - b_{ij}, \quad \nu_{ij} = c_{ij}^V - c_{ij} \quad (i, j = 1, 2)$$

Точные значения инвариантов даются формулами (1.6). Приближенные выражения при допущениях технической теории оболочек  $A_{ij} \approx a_{ij}$ ,  $E_{ij} \approx \varepsilon_{ij} + z\chi_{ij}$  имеют вид [6]:

$$I_E = I_\varepsilon + zI_\chi, \quad I_{EEE} = 0, \quad I_{EE} = I_{\varepsilon\varepsilon} + zI_{\varepsilon\chi} + z^2 I_{\chi\chi} \quad (2.3)$$

$$I_\varepsilon = (d_{\varepsilon\varepsilon} + d_{\varepsilon a})/d_{aa}, \quad I_{\varepsilon\varepsilon} = \omega_{\varepsilon\varepsilon}/d_{aa}, \quad I_\chi = (d_{\chi\chi} + d_{\chi a})/d_{aa}$$

$$I_{\chi\chi} = d_{\chi\chi}/d_{aa}, \quad I_{\varepsilon\chi} = (d_{\varepsilon\chi} + d_{\chi\varepsilon})/d_{aa}$$

$$d_{ab} = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

Принимая гипотезу отсутствия нормальных напряжений на произвольной поверхности  $z = \text{const}$  получаем

$$I_{\sigma} = 2(\lambda + \mu) I_E, \quad I_{\sigma\sigma} = 0 \quad (2.4)$$

$$I_{\sigma\sigma} = \lambda(\lambda + 2\mu) I_E^2 + 4\mu^2 I_{EE}$$

$$P_V = 1/2(\lambda + 2\mu) I_E^2 - 2\mu I_{EE}$$

Здесь  $\lambda, \mu$  — постоянные Ламе для плоского напряженного состояния. С учетом  $\sigma_3^* = 0$  остальные главные напряжения находятся как корни квадратного уравнения

$$\sigma^{*2} - I_{\sigma}\sigma^* + I_{\sigma\sigma} = 0 \quad (2.5)$$

Полная энергия деформации  $\Pi$  определяется интегралом по объему от плотности энергии. Используя (2.4) получаем

$$\Pi = \int_F P_F dF, \quad dF = d_{aa}^2 d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$P_F = 1/2 B [I_{\epsilon}^2 - 2(1 - \nu) I_{E\epsilon}] + 1/2 D [I_x^2 - 2(1 - \nu) I_{xx}] \quad (2.6)$$

Полагая  $r^{\nu} = r + u$ ,  $n^{\nu} = n + v$ ,  $d_{aa}^{\nu} \approx d_{aa}$ , имеем геометрически нелинейные соотношения

$$v = d_{aa}^{-1/2} (u_{,1} \times r_{,2} + r_{,1} \times u_{,2} + u_{,1} \times u_{,2}) \quad (2.7)$$

$$\epsilon_{ij} = 1/2 (r_{,i} u_{,j} + r_{,j} u_{,i} + u_{,i} u_{,j}), \quad \chi_{ij} = - (v r_{,ij} + n u_{,ij} + v u_{,ij})$$

где  $u, v$  — вектор перемещения срединной поверхности и вектор перемещения нормали. Если вектор  $u$  разложен по локальному базису на поверхности, то производные  $u_{,i}$  вычисляются с использованием деривационных формул для векторов базиса. При разложении вектора  $u$  по ортам общей для всей поверхности декартовой системы координат деривационных формул не требуется, так как вычисление производных от вектора сводится к вычислению обычных производных от его компонентов. Полученные в этом пункте соотношения применимы для тонких оболочек при малых деформациях и произвольных поворотах.

3. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига [7]. В отличие от кинематической гипотезы Кирхгофа — Лява, гипотеза С. П. Тимошенко использует в равенствах (2.1) только условие нерастяжимости  $n^{\nu} n^{\nu} = 1$ , не требуя ортогональности векторов  $n^{\nu}$  и  $r_{,i}^{\nu}$ . Это позволяет учесть деформации поперечного сдвига. При этом имеют место формулы (2.2) со следующим отличием:

$$E_B = E_{3i} = 1/2 n^{\nu} r_{,i}^{\nu}, \quad g_{ij} = E_{3i} E_{3j} \quad (3.1)$$

Из формул (1.6), (2.2), (3.1) могут быть получены приближенные соотношения при допущениях технической теории оболочек  $A_{ij} \approx a_{ij}$ ,  $E_{ij} \approx \epsilon_{ij} + z\chi_{ij}$ , которые имеют вид

$$I_E = I_{\epsilon} + z I_x, \quad I_{EE} = I_{\epsilon\epsilon} - I_g + z I_{\epsilon x} + z^2 I_{xx}$$

$$I_{EEE} = - (I_{g\epsilon} + z I_{g x}) \quad (3.2)$$

$$I_{\epsilon} = (d_{\epsilon a} + d_{a\epsilon}) / d_{aa}, \quad I_x = (d_{xa} + d_{ax}) / d_{aa}$$

$$I_{\epsilon\epsilon} = d_{\epsilon\epsilon} / d_{aa}, \quad I_{xx} = d_{xx} / d_{aa}$$

$$I_{\epsilon x} = (d_{\epsilon x} + d_{x\epsilon}) / d_{aa}, \quad I_g = (d_{ag} + d_{ga}) / d_{aa}$$

$$I_{g_x} = (d_{g_x} + d_{e_g})/d_{aa}, \quad I_{g_x} = (d_{g_x} + d_{x_g})/d_{aa}$$

Принимая гипотезу отсутствия нормальных напряжений в волокне, первоначально ортогональном срединной поверхности, получаем следующие соотношения:

$$I_{\sigma} = 2(\lambda + \mu) I_E, \quad I_{\sigma\sigma} = \lambda(\lambda + 2\mu) I_E^2 + 4\mu^2 I_{EE} \quad (3.3)$$

$$I_{\sigma\sigma\sigma} = 8\mu^3 I_{EEE} - 4\lambda\mu^2 I_E I_{Eg}, \quad \Pi_V = 1/2(\lambda + 2\mu) I_E^2 - 2\mu I_{EE}$$

$$\lambda = \nu E / (1 - \nu^2), \quad 2\mu = E / (1 + \nu)$$

Заметим, что несмотря на гипотезу отсутствия нормальных напряжений в волокне, первоначально ортогональном срединной поверхности, напряженное состояние в общем случае является объемным, т. е. все три главных напряжения, определяемые из уравнения (1.9), отличны от нуля. Это связано с деформациями поперечного сдвига. Если  $E_{3i} = 0$ , то  $g_{ij} = 0$ ,  $I_{EEE} = 0$ ,  $I_{\sigma\sigma\sigma} = 0$ . Формула (1.9) показывает, что при этом одно из главных напряжений равно нулю. Полагая  $\sigma_3^2 = 0$ , для остальных главных напряжений получаем уравнение (2.5). Таким образом при  $g_{ij} = 0$  нелинейная теория оболочек с учетом поперечного сдвига переходит в классическую нелинейную теорию оболочек.

Полная энергия деформации с учетом поперечного сдвига имеет вид

$$\Pi = \int_F \Pi_F dF, \quad dF = d_{aa}^{1/2} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.4)$$

$$\Pi_F = \Pi_{F_e} + \Pi_{F_x} + \Pi_{F_g}, \quad \Pi_{F_g} = GI_g$$

$$\Pi_{F_e} = 1/2 B [I_e^2 - 2(1 - \nu) I_{ee}]$$

$$\Pi_{F_x} = 1/2 D [I_x^2 - 2(1 - \nu) I_{xx}]$$

$$B = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad G = \frac{kEh}{1 - \nu}, \quad k = 1$$

При учете неравномерности распределения касательных напряжений по толщине  $k = 5/6$  [7, 8]. Уравнения равновесия можно получить энергетическим методом. Геометрически нелинейные соотношения имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (r_i^V r_j^V - a_{ij}) \quad (3.5)$$

$$\chi_{ij} = 1/2 (n_i^V r_j^V + n_j^V r_i^V) - b_{ij}, \quad g_{ij} = 1/4 (n_i^V r_j^V)(n_j^V r_i^V)$$

Вектор  $n^V$  должен удовлетворять ограничению  $n^V n^V = 1$ . Удобную форму дает представление  $n^V$  через вектор конечной вариации  $v = \delta n$  [9]:

$$n^V = n \cos v + v \sin v / v, \quad v = |v| \quad (3.6)$$

Если  $v$  — произвольный ортогональный  $n$  вектор, то условие  $n^V n^V = 1$  выполняется тождественно.

4. Обобщенная теория оболочек. Положим, что деформирование трехмерного тела следует обобщенной гипотезе (2.1), причем вектор  $n^V$  (director) [10, 11] в общем случае не единичен и не ортогонален срединной поверхности. Вектор  $r^V$  и присоединенный вектор  $n^V$  как функции криволинейных координат  $\alpha_i$  являются характеристиками оснащенной поверхности [11]. В соответствии с кинематической гипотезой  $A_{ij}$ ,  $E_{ij}$  определяются соотношениями

$$A_{ij} = a_{ij}^k z^{k-1}, \quad a_{ij}^1 = a_{ij} \quad (i, j, m = 1, 2)$$

$$a_{ij}^2 = 2b_{ij}, \quad a_{ij}^3 = c_{ij} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij}^k z^{k-1}, \quad E_{3i} = E_{3i} = \gamma_i^m z^{m-1} \quad (4.1)$$

$$E_{33} = \beta, \quad \varepsilon_{ij}^k = 1/2 (a_{ij}^{\vee k} - a_{ij}^k)$$

$$a_{ij}^{\vee 1} = a_{ij}^{\vee}, \quad a_{ij}^{\vee 2} = 2b_{ij}^{\vee}, \quad a_{ijn}^{\vee 3} = c_{ij}^{\vee}$$

$$\gamma_i^1 = 1/2 n^{\vee} \gamma_i^{\vee}, \quad \gamma_i^2 = 1/2 n^{\vee} n_i^{\vee}, \quad \beta = 1/2 (n^{\vee} n^{\vee} - 1)$$

Здесь  $a_{ij}^{\vee}, b_{ij}^{\vee}, c_{ij}^{\vee}$  — величины, совпадающие по написанию с (2.2), однако отличающиеся от них по смыслу в связи с новым определением  $n^{\vee}$ ; по повторяющемуся целочисленному индексу здесь и далее производится суммирование; верхний индекс у  $z$  означает показатель степени. Используя выражения (4.1) и (1.6), получаем следующие точные формулы:

$$I_E = \frac{(I_{ea}^{km} + \beta I_{aa}^{km}) z^{k+m-2}}{I_{aa}^s z^{r+s-2}} \quad (k, m = 1, 2, 3) \quad (4.2)$$

$$I_{EE} = \frac{(I_{\varepsilon\varepsilon}^{km} + \beta I_{\varepsilon a}^{km}) z^{k+m-2} - I_{ag}^{k(p)} z^{k+p+t-3}}{I_{aa}^s z^{r+s-2}} \quad (r, s = 1, 2, 3)$$

$$I_{EEE} = \frac{\beta I_{\varepsilon\varepsilon}^{km} z^{k+m-2} - I_{eg}^{k(p)} z^{k+p+t-3}}{I_{aa}^s z^{r+s-2}} \quad (i, j = 1, 2)$$

$$I_{ea}^{km} = \frac{d_{ea}^{km} + d_{ae}^{mk}}{d_{aa}^{11}}, \quad I_{aa}^{km} = \frac{1}{2} \frac{d_{aa}^{km} + d_{aa}^{mk}}{d_{aa}^{11}} \quad (4.3)$$

$$I_{\varepsilon\varepsilon}^{km} = \frac{1}{2} \frac{d_{\varepsilon\varepsilon}^{km} + d_{\varepsilon\varepsilon}^{km}}{d_{aa}^{11}}, \quad I_{ag}^{k(p)} = \frac{d_{ag}^{k(p)} + d_{ga}^{(p)k}}{d_{aa}^{11}}$$

$$I_{eg}^{k(p)} = \frac{d_{eg}^{k(p)} + d_{ge}^{(p)k}}{d_{aa}^{11}}, \quad \varepsilon_{ij}^{(p)} = \frac{1}{2} (\gamma_i^p \gamma_j^p + \gamma_j^p \gamma_i^p)$$

$$d_{ab}^{km} = \det \begin{vmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k \\ b_{21}^m & b_{22}^m \end{vmatrix} \quad (p, t = 1, 2) \quad (4.4)$$

Формулы (4.2) выражают инварианты тензора Грина в произвольной точке через инварианты (4.3) оснащенной поверхности. В случае сложного верхнего индекса у компонентов матрицы (4.4), например, двойного, он заключается в скобки. Величина  $\beta$  представляет собой деформацию волокна, первоначально ортогонального срединной поверхности. Отметим, что величины  $\gamma_i^p$ , характеризующие деформации поперечного сдвига, встречаются только во втором и третьем инвариантах тензора Грина, причем исключительно в виде комбинаций  $g_{ij}^{(p)}$ . Для линейно упругого тела инварианты напряжений и плотность энергии в обобщенной теории оболочек определяются соотношениями (1.8). Для полной энергии деформации имеем соотношения

$$\Pi = \int_V \Pi_{\nu} dV, \quad dV = d_{AAA}^{\vee 2} dz d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (4.5)$$

Неизвестными величинами в задаче упругого равновесия оболочки являются три компоненты вектора  $g^{\vee}$  и три компоненты вектора  $n^{\vee}$  в общей для всей оболочки декартовой системе координат. Заметим, что соотношения (4.2) могут быть применены в теории деформации гиперупругих тел. При этом плотность энергии выражается как функция трех инвариантов тензора деформаций [12].

5. Теория деформируемых криволинейных стержней [13]. Примем, что деформирование трехмерного тела следует кинематической гипотезе сохранения нормальных сечений к базовой кривой

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \alpha \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{R}^V = \mathbf{r}^V + \alpha_i \mathbf{e}_i^V$$

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{e}_i^V \mathbf{e}_j^V = \delta_{ij} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{e}_{i,\alpha} = 0, \quad \mathbf{e}_i^V \mathbf{r}_{,\alpha}^V = 0 \quad (i, j = 1, 2)$$

Здесь  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{e}_i$  — радиус вектор и орты нормали к базовой кривой, в качестве которой принимается линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений;  $\alpha_3 = \alpha$  — параметр кривой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha)$ .

Согласно (1.7) для  $A_{ij}$ ,  $E_{ij}$  имеет следующие выражения:

$$A_{11} = A_{22} = 1, \quad A_{13} = -\alpha_2 f, \quad A_{23} = \alpha_1 f, \quad f = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_{1,\alpha}$$

$$A_{33} = a + 2\alpha_i b_i + \alpha_i \alpha_j c_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \quad (5.2)$$

$$a = r_{,\alpha}^2, \quad b_i = \mathbf{e}_{i,\alpha} \mathbf{r}_{,\alpha}, \quad c_{ij} = \mathbf{e}_{i,\alpha} \mathbf{e}_{j,\alpha}$$

$$E_{13} = -1/2 \alpha_2 a^{1/2} \chi, \quad E_{23} = 1/2 \alpha_1 a^{1/2} \chi, \quad \chi = (\mathbf{e}_2^V \mathbf{e}_{1,\alpha}^V - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{2,\alpha}) a^{-1/2}$$

$$E_{33} = (\varepsilon + \alpha_i \kappa_i + 1/2 \alpha_i \alpha_j \nu_{ij}) a, \quad \varepsilon = 1/2 (r_{,\alpha}^{V2} - r_{,\alpha}^2) a^{-1}$$

$$\kappa_i = (\mathbf{e}_{i,\alpha}^V \mathbf{r}_{,\alpha}^V - \mathbf{e}_{i,\alpha} \mathbf{r}_{,\alpha}) a^{-1}, \quad \nu_{ij} = (\mathbf{e}_{i,\alpha}^V \mathbf{e}_{j,\alpha}^V - \mathbf{e}_{i,\alpha} \mathbf{e}_{j,\alpha}) a^{-1}$$

Формулы (1.6) принимают вид

$$I_{EEE} = 0, \quad d_{AAA} = A_{33}^2 - A_{13}^2 - A_{23}^2 \quad (5.3)$$

$$I_E = d_{AAA}^{-1} (E_{33} - 2A_{13}E_{13} - 2A_{23}E_{23}), \quad I_{EE} = -d_{AAA}^{-1} (E_{13}^2 + E_{23}^2)$$

Из этих формул могут быть получены приближенные соотношения для криволинейных стержней с малым поперечным сечением. Простейший вариант таких соотношений основан на допущениях теории стержней Кирхгофа при малых осевых деформациях [13]. Пренебрегая зависимостью метрических коэффициентов от координат точек сечения и членами порядка  $\alpha_i \alpha_j$  в (5.2) будем иметь

$$A_{33} \simeq a, \quad A_{13} \simeq A_{23} \simeq 0, \quad E_{33} \simeq (\varepsilon + \alpha_i \kappa_i) a \quad (5.4)$$

При этом соотношения (5.3) принимают вид

$$I_E = \varepsilon + \alpha_i \kappa_i, \quad I_{EE} = 1/4 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \chi^2 \quad (5.5)$$

Таким образом в приближении теории тонких стержней первый инвариант тензора Грина связан с продольными деформациями волокон, а второй — с деформациями сдвига, обусловленными кручением поперечных сечений.

Известно [13, 14], что при пространственном деформировании гипотеза сохранения нормальных сечений применима для стержней кругового поперечного сечения. При других формах сечений происходит депланация, существенно влияющая на жесткость при кручении и распределение касательных напряжений. С учетом депланации выражение для радиуса вектора  $\mathbf{R}^V$  (5.1) должно быть принято в виде

$$\mathbf{R}^V = \mathbf{r}^V + \alpha_i \mathbf{e}_i^V + w \mathbf{e}_3^V \quad (5.6)$$

где  $\mathbf{e}_3^V$  — орт касательной к деформированной базовой кривой. При условии

малости деформации и сохранении остальных допущений Кирхгофа, выражение для компонентов  $E_{13}$ ,  $E_{23}$  может быть записано в форме

$$E_{13} \approx 1/2 a^{1/2} (w_{,1} - \alpha_2 \chi), \quad E_{23} \approx 1/2 a^{1/2} (w_{,2} + \alpha_1 \chi) \quad (5.7)$$

Принимая зависимость деформации согласно теории кручения Сен-Венана [13, 14], получаем

$$w = \psi \chi, \quad \psi = \psi(\alpha_1, \alpha_2) \quad (5.8)$$

$$E_{13} = 1/2 a^{1/2} (\psi_{,1} - \alpha_2) \chi, \quad E_{23} = 1/2 a^{1/2} (\psi_{,2} + \alpha_1) \chi$$

$$I_{EE} = -1/4 I \chi^2, \quad I(\alpha_1, \alpha_2) = (\psi_{,1} - \alpha_2)^2 + (\psi_{,2} + \alpha_1)^2$$

Здесь  $\psi$  — функция кручения Сен-Венана. Принимая гипотезу отсутствия нормальных напряжений в волокнах, ортогональных базовой кривой и обобщенный закон Гука, будем иметь

$$I_{\sigma} = 2\mu(1 + \nu) I_E, \quad I_{\sigma\sigma} = 4\mu^2 I_{EE}, \quad I_{\sigma\sigma\sigma} = 0$$

$$P_V = \mu(1 + \nu) I_E^2 - 2\mu I_{EE} \quad (5.9)$$

С учетом  $I_{\sigma\sigma\sigma} = 0$  получаем, что в рамках принятых гипотез в каждой точке трехмерного тела реализуется плоское напряженное состояние. Для тонких стержней выражение энергии принимает вид

$$P = \int_s P_s ds, \quad ds = a^{1/2} d\alpha \quad (5.10)$$

$$P_s = \mu(1 + \nu)(F\epsilon^2 + L_{ij}\chi_i\chi_j) + 1/2 \mu L \chi^2$$

$$L_{ij} = \int_F \alpha_i \alpha_j dF, \quad L = \int_F l dF$$

где  $F$ ,  $L_{ij}$ ,  $L$  — площадь и геометрические характеристики сечения. Для кругового поперечного сечения  $\psi = 0$  и  $L$  есть полярный момент инерции.

Рассмотренные соотношения обобщаются на случай учета поперечного сдвига. В этом случае векторы  $e_i^V$  удовлетворяют равенствам  $e_i^V e_j^V = \delta_{ij}$ , но условия  $e_i^V \Gamma_{,\alpha}^V = 0$  не используются. При этом имеют место формулы (5.2) со следующими отличиями:

$$E_{13} = 1/2 a^{1/2} (\gamma_{11} - \alpha_2 \chi), \quad E_{23} = 1/2 a^{1/2} (\gamma_{22} + \alpha_1 \chi), \quad \gamma_i = e_i^V \Gamma_{,\alpha}^V a^{-1/2}$$

С учетом деформации (5.8) будем иметь

$$E_{13} = 1/2 a^{1/2} (\gamma_{11} + w_{,1} - \alpha_2 \chi), \quad E_{23} = 1/2 a^{1/2} (\gamma_{22} + w_{,2} + \alpha_1 \chi) \quad (5.11)$$

$$I_{EE} = -1/4 (\gamma_{11}^2 + I \chi^2) - 1/2 [(\psi_{,2} + \alpha_1) \gamma_{22} + (\psi_{,1} - \alpha_2) \gamma_{11}] \chi$$

Инварианты  $I_{\sigma}$ ,  $I_{\sigma\sigma}$ ,  $P_V$  определяются соотношениями (5.9). Замечая, что согласно теории кручения Сен-Венана [13] функция  $\psi$  удовлетворяет равенствам  $\int_F (\psi_{,2} + \alpha_1) dF = 0$ ,  $\int_P (\psi_{,1} - \alpha_2) dF = 0$  получим следующее выражение энергии для стержня с малым поперечным сечением:

$$P = \int_s P_s ds, \quad ds = a^{1/2} d\alpha \quad (5.12)$$

$$P_s = \mu(1 + \nu)(F\epsilon^2 + L_{ij}\chi_i\chi_j) + 1/2 (\mu F \gamma_{11}^2 + L \chi^2)$$



Здесь использовано соотношение  $\int_F \alpha_i dF = 0$  для центральных осей сечения.

Характерной особенностью модели стержня, основанной на гипотезе С. П. Тимошенко, является отсутствие кинематической связанности ортов  $e_i^v$  и радиуса вектора  $r^v$ . Это значит, что при использовании вариационных методов вариации  $r^v$  и  $e_i^v$  будут независимыми. Перемещение единичного вектора из положения  $e_i$  в положение  $e_i^*$  может быть записано в терминах вариаций следующим образом [9]:

$$e_i^* = a_k \delta^k e_i \quad (k = 0, 1, 2) \quad (5.13)$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \sin \delta\omega / \delta\omega, \quad a_2 = (1 - \cos \delta\omega) / \delta\omega^2$$

Здесь  $\delta^k e_i$  — вариация  $k$ -го порядка единичного вектора,  $\delta\omega$  — модуль вектора поворота.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольденблат И. И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. М.: Гостехиздат, 1955. 271 с.
2. Гольденблат И. И. Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969. 336 с.
3. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
4. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
5. Кузнецов В. В. Канонический тензор в теории упругости//ПМТФ. 1987. № 5. С. 144—146.
6. Кузнецов В. В. Геометрические инварианты нелинейной теории оболочек//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 168—171.
7. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига/Под ред. Галимова К. З. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. 211 с.
8. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
9. Кузнецов В. В. К определению вращений в трехмерном пространстве на основе понятия вариации вектора//Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 59—60.
10. Каюк Я. Ф., Жуковский А. П. К теории пластин и оболочек на основе концепции поверхностей Коссера//Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 10. С. 80—85.
11. Шкутин Л. И. Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Наука, 1988. 127 с.
12. Черных К. Ф. О нелинейности теории тонких упругих оболочек из эластомеров//Деформация сплошных сред и управление движением. Л.: Изд-во Ленинградск. ун-та, 1984. С. 3—25.
13. Ляв А. Математическая теория упругости. М.—Л.: Гостехиздат. 1935. 674 с.
14. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.

Москва

Поступила в редакцию  
14.IV.1993