

УДК 539.375

© 1993 г. А. В. БАЛУЕВА

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ КИНЕТИКИ ТРЕЩИН С УЧЕТОМ ДИФФУЗИИ В НИХ ГАЗА

В самых разнообразных ситуациях наблюдается медленное кинетическое развитие отрывных трещин квазихрупкого разрушения. Эксперименты показывают, что трещиностойкость материала в таких случаях не является константой материала, а характеризуется некоторой функцией — зависимостью скорости роста трещины от величины коэффициента интенсивности напряжений [1, 2]. В данной работе предложен метод расчета и выполнен анализ особенностей кинетики трещин отрыва, когда условия нагружения среды с трещиной контролируются процессом диффузии в нее газа. Подобные постановки задач моделируют явления разрушения элементов конструкций, эксплуатируемых при воздействии агрессивных сред, в частности при наводораживании, а также процессы роста трещин в газонаполненных средах, например, трещин разгрузки в горных массивах, содержащих сорбированный газ.

В рассматриваемых задачах необходимо рассчитывать как изменение давления в полости трещины в результате диффузии газа, так и кинетику трещины под действием этого давления. По существу речь идет о решении задач теории диффузии и теории упругости для среды с трещиной при некоторых дополнительных условиях, обеспечивающих связь между указанными задачами.

Изложение ведется для случая безграничной среды, содержащей трещину, занимающую плоскую область произвольного очертания в плане. Чтобы избежать трудностей, связанных с трехмерностью задач используются двумерные интегральные и интегродифференциальные уравнения, записанные по области трещины, к которым сводятся задачи диффузии и теории упругости.

Решение интегродифференциального уравнения задачи теории упругости о трещине проводится на основе вариационно-разностного метода [3] и метода уточняющих граничных сеток [4], расчет кинетики трещины по схеме [4]. Для решения интегрального уравнения задачи диффузии в трещину, как и в аналогичной задаче фильтрации жидкости в трещину [5], используется метод [5].

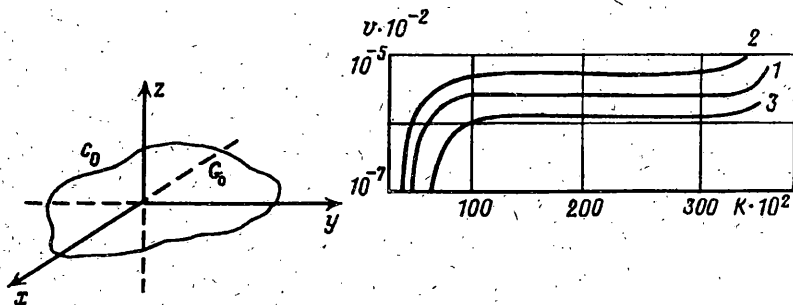
Отметим, что ранее кинетика пространственных трещин при постоянных нагрузках с учётом зависимости скорости роста трещины от коэффициента интенсивности напряжений изучалась в [4, 6]. Кинетический рост трещины, в предположении о постоянстве трещиностойкости, за счет падения давления газа в трещине при увеличении ее размеров рассмотрен в [7, 8].

1. Постановка задачи. Рассматривается задача о медленном квазистационарном росте трещины нормального отрыва, занимающей в плоскости $z=0$ область G_0 , и появившейся в момент времени $t=0$ (фиг. 1). Считаем, что при распространении скорость в каждой точке контура трещины v зависит от коэффициента интенсивности напряжений N (фиг. 2). Трещина рассматривается в безграничной упругой среде, насыщенной газом с концентрацией c_0 , и моделируется идеальным стоком (вдали от равновесного состояния). Полагаем также, что скорость распространения трещины мала по сравнению со скоростью установления переходных процессов, и поток в трещину находим из решения стационарной задачи диффузии в каждый момент времени t . В силу симметрии задачи относительно плоскости трещины, рассматриваем задачу в полупространстве $z \geq 0$.

Имеем для концентрации водорода $c(x, y, z)$ следующую граничную задачу:

$$\Delta c = 0, \quad c|_{z=0} = 0 \quad (x, y) \in G \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (x, y) \in G, \quad c|_{z=\infty} = c_0$$



Фиг. 1, 2

Требуется найти плотность диффузионного потока $q(x, y) = \partial c / \partial z|_{z=0}(x, y) \in G$. Вычитая равновесное состояние, приходим к граничной задаче

$$\Delta c = 0, \quad c|_{z=0} = -c_0(x, y) \in G \quad (1.2)$$

$$\partial c / \partial z|_{z=0} = 0(x, y) \in G, \quad c|_{z=\infty} = 0$$

Задача теории упругости представляет собой задачу о трещине нормального отрыва G , к берегам которой приложена нагрузка p , где p — давление газа, которое изменяется в зависимости от объема растущей трещины и массы поступившего газа. Газ считаем идеальным, все процессы изотермическими.

После сведения задачи теории упругости [9] и диффузии к граничным интегральным уравнениям (ГИУ) стандартными методами, получаем, что на каждом шаге по t нам нужно решить следующую систему уравнений:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \iint_{G(t)} \frac{q(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (1.3)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \Delta_{x,y} \iint_{G(t)} \frac{u(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (1.4)$$

$$pV = nRT \quad (1.5)$$

$$V(t) = \iint_{G(t)} u(x, y) dx dy \quad (1.6)$$

$$Q = -D \iint_{G(t)} \dot{q}(x, y) dx dy \quad (1.7)$$

$$n(t + \Delta t) = n(t) + Q\Delta t \quad (1.8)$$

$$u(\xi, s, t) = \frac{4(1-\nu^2)}{E} N(s, t) \sqrt{\xi} \quad (1.9)$$

$$v(s, t) = f(N(s, t)) \quad (1.10)$$

$$R(t + \Delta t, s) = R(t, s) + v(s, t) \Delta t \quad (1.11)$$

где уравнение (1.3) — интегральное уравнение для нахождения плотности диффузионного потока $q(x, y)$, (1.4) — интегродифференциальное уравнение для определения вертикального раскрытия трещины $u(x, y)$, n — количество молей газа в трещине, $Q = dn/dt$ — расход газа через трещину, D — коэффициент диффузии, R — универсальная газовая постоянная, T — абсолютная температура

газа, V — объем трещины, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона среды; уравнения (1.9) — (1.11) — используются для расчета коэффициента интенсивности напряжений N и нового контура трещины (см. [4]).

2. Численный метод решения. Расчет кинетического роста трещины осуществляется пошагово (см. [3]). На каждом шаге по t строится решение интегродифференциального уравнения (1.4) для трещины нормального отрыва, методом [3], и интегрального уравнения (1.3) для диффузионной задачи, методом [5]. А именно, осуществляется дискретизация задачи. Для этого область G помещается в прямоугольник, две стороны которого совпадают с осями координат x и y . Далее прямоугольник разбивается на квадраты со сторонами h , а исходная область G аппроксимируется сеточной областью $G(h)$. При этом считается, что если хотя бы одна из вершин квадрата принадлежит области $G(h)$, то данный квадрат принадлежит области $G(h)$. Значения смещений u и плотности диффузионного потока q в узлах сетки отыскиваются в виде разложения по системе координатных функций $\psi_{p_1 p_2}$:

$$u(x, y) = \sum_{p_1 p_2} u_{p_1 p_2} \psi_{p_1 p_2}(x, y, h) \quad (2.1)$$

$$q(x, y) = \sum_{p_1 p_2} c_{p_1 p_2} \psi_{p_1 p_2}(x, y, h) \quad (2.2)$$

$$\psi_{p_1 p_2}(x, y, h) = \begin{cases} \left(1 - \left|\frac{x}{h} - p_1\right|\right) \left(1 - \left|\frac{y}{h} - p_2\right|\right), & x \in g_{p_1 p_2}^{2h}, \\ 0, & x \notin g_{p_1 p_2}^{2h} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$g_{p_1 p_2}^{2h} = \left\{x : \left|\frac{x}{h} - p_1\right|, \left|\frac{y}{h} - p_2\right| \leq 1\right\}$$

Коэффициенты $u_{p_1 p_2}$ и $c_{p_1 p_2}$ совпадают со значениями $u(x, y)$ и $q(x, y)$ в узлах сетки соответственно и находятся: $u_{p_1 p_2}$ — из решения соответствующей линейной системы

$$\sum_{p_1 p_2} a_{p_1 - p_1, p_2 - p_2} u_{p_1 p_2} = f_{p_1 p_2} \quad (2.4)$$

и $c_{p_1 p_2}$ — из минимизации соответствующего квадратичного функционала

$$\min \left\{ I(h) = \sum_{p_1 p_2} \sum_{q_1 q_2} a'_{p_1 - q_1, p_2 - q_2} c_{p_1 p_2} c_{q_1 q_2} + 2 \sum_{p_1 p_2} c_{p_1 p_2} b_{p_1 p_2} \right\} \quad (2.5)$$

$$(p_1, p_2) : (x_{p_1}, y_{p_2}) \in G, (q_1, q_2) : (x_{q_1}, y_{q_2}) \in G$$

$$a_{p_1 p_2 q_1 q_2} = a_{p_1 - q_1, p_2 - q_2} = \frac{1}{k(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi| \psi_{p_1 p_2}(\xi, h) \overline{\psi_{q_1 q_2}(\xi, h)} d\xi \quad (2.6)$$

$$a'_{p_1 p_2 q_1 q_2} = a_{p_1 - q_1, p_2 - q_2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\xi|} \psi_{p_1 p_2}(\xi, h) \overline{\psi_{q_1 q_2}(\xi, h)} d\xi \quad (2.7)$$

$$\psi_{p_1 p_2}(\xi, h) = h^2 \exp[ih(p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2)] \frac{\sin^2(h\xi_1/2)}{(h\xi_1/2)^2} \frac{\sin^2(h\xi_2/2)}{(h\xi_2/2)^2} \quad (2.8)$$

Подчеркнем, что $a_{p_1 p_2 q_1 q_2}$, $a'_{p_1 p_2 q_1 q_2}$ являются теплицевыми матрицами, то есть их элементы зависят только от разности аргументов (это обусловлено типом ядер данных уравнений, равномерностью сетки и выбором одинаковых базисных функций, зависящих лишь от разностей $(x - x_p)$, $(y - y_p)$), что значительно со-

крашает время вычислений. Процедура расчета матриц $a_{r_1 r_2}$ и $a'_{r_1 r_2}$ описана в [3, 5]. Система (2.4) решается методом сверхрелаксации [10]. Минимизация квадратичного функционала (2.5) осуществляется методом проекции градиента с автоматическим выбором шага [11].

3. Нахождение периода инкубации и времени роста. Решение совместной упругодиффузионной задачи (1.3)—(1.11) состоит из двух этапов. Первый этап — нахождение периода инкубации t_i , т. е. времени, в течение которого раскрытие трещины в результате диффузии в нее газа достигнет такой величины, при которой максимальный коэффициент интенсивности напряжения (КИН) по контуру превысит величину K_{sc} — нижнее пороговое значение трещиностойкости, после чего начинается рост трещины (см. фиг. 2). Второй этап — пошаговый расчет времени роста трещины t_m .

Нахождение периода инкубации осуществляется следующим образом. В момент времени $t = 0$ считаем трещину незаполненной, давление газа p равным 0. Пусть в трещину притекает газ. Решая чисто диффузионную задачу в области G , можно найти расход Q_0 и по нему количество поступившего газа $n_0 = Q_0 dt$ через промежуток времени dt . Давление газа в трещине уже будет не нулевым. Его можно вычислить, пользуясь следующими рассуждениями. Так как раскрытие трещины пропорционально приложенной нагрузке, то имеем

$$u(x, y) = pu_1(x, y) \quad (3.1)$$

где u_1 — раскрытие при единичной нагрузке $p = 1$. Тогда для объема трещины аналогично запишем

$$V = pV_1 \quad (3.2)$$

где V_1 — объем трещины при $p = 1$. Для давления $p(t)$ на данном контуре G имеем выражение из (1.5), (3.2):

$$p^2(t) = n(t) RT / V_1(t) \quad (3.3)$$

В частности, давление газа в период инкубации через промежуток времени dt будет равно

$$p^2(dt) = Q_0 dt RT / V_{10} \quad (3.4)$$

где V_{10} — объем трещины, занимающей начальную область G , при $p = 1$ (который рассчитывается из решения упругой задачи (1.4)). Так как V_{10} и Q_0 зависят только от формы трещины G , а она в период инкубации не изменяется, то $p^2(t)$ линейно зависит от времени

$$p^2(t) = t(Q_0/V_{10}) RT \quad (3.5)$$

Таким образом, период инкубации можно найти по формуле

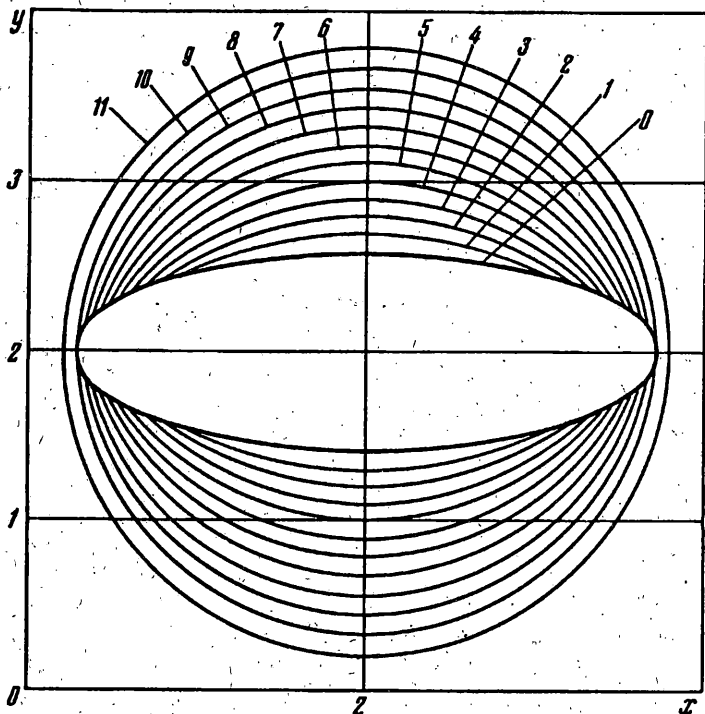
$$t_i = p_{sc}^2 V_{10} / (Q_0 RT) \quad (3.6)$$

где p_{sc} — давление, при котором максимальное на контуре значение коэффициента интенсивности напряжений $N(s)$ достигает величины N_{sc} . Так как $N(s)$ пропорционально смещению u , а u в свою очередь пропорционально давлению p , то достаточно рассчитать $N_1(s)$ при единичной нагрузке $p = 1$ для данного контура, после чего p_{sc} находится как

$$p_{sc} = N_{sc} / N_{1\max} \quad (3.7)$$

где $N_{1\max}$ — максимальный коэффициент $N_1(s)$ по контуру.

Далее рассмотрим второй этап — пошаговый процесс распространения тре-

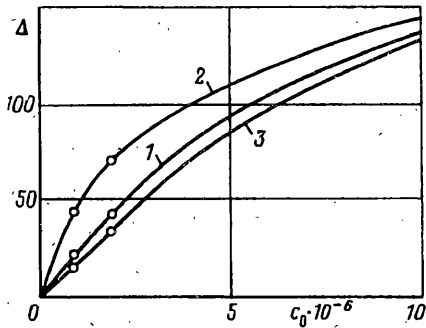


Фиг. 3

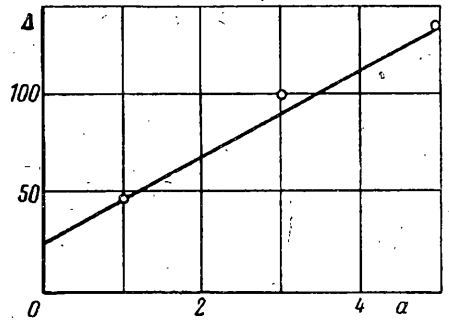
щины. Для каждого момента t и нового контура $G(t)$ требуется решить совместно уравнения (1.4)—(1.6), в которых не определены $p(t)$, $u(t)$, $V(t)$, а $n(t)$ — количество молей поступившего газа — вычислено на предыдущем шаге. Для расчета давления $p(t)$ на данном контуре $G(t)$ имеем выражение (3.3) $p^2(t) = (n(t)/V_1(t)) RT$, где $V_1(t)$ — объем трещины, занимающей новую область $G(t)$, при единичной нагрузке $p = 1$ — находится из решения упругой задачи (1.4) (на первом шаге давление известно и равно p_{acc}).

По полученной нагрузке находим реальные раскрытия u по формуле (3.1) и из решения уточняющей задачи методом граничных сеток (см. [4]) рассчитываем $K(s)$ и $v(s)$. Далее определяем плотность диффузионного потока из (1.3) на области $G(t)$ и полный расход газа из (1.7). После выбора шага по времени Δt (см. [4]) находим полное количество газа в трещине $n(t + \Delta t)$ из (1.8) и делается расчет нового контура $G(t + \Delta t)$. Затем рассчитывается следующий шаг продвижения трещины; опять вычисляется $p(t + \Delta t)$ по формуле (3.3), раскрытия $u(t + \Delta t)$, расход $Q(t + \Delta t)$ и так далее. Процесс продолжается до тех пор, пока трещина не достигнет заданного размера (радиуса или площади).

4. Исследование сходимости и точности метода. В предложенном методе основную погрешность в определении времени инкубации t_i и времени роста t_m вносят погрешности методов решения интегрального уравнения (1.3) и интегродифференциального уравнения (1.4), вычисления коэффициента интенсивности напряжений, и при определении t_m — выбор шага по радиусу Δr при расчете кинетики. Исследование сходимости и точности решения уравнения теории упругости (1.4) дано в [3, 4], диффузионного уравнения (1.3) — в [5]. Относительная погрешность вычисления объема трещины $\Delta_v \approx 3\%$. В приграничных областях за счет уточняющего решения методом граничных сеток удается понизить относительную погрешность решения (или расчета коэффициента интенсивности напряжений (КИН)) до 5—7% (в ранее предлагавшихся методах ввиду наличия



Фиг. 4



Фиг. 5

корневой особенности решения на границе погрешность равнялась 15—20%). Относительная ошибка расчета полного расхода газа $\Delta_Q \approx 2\%$.

Таким образом, исходя из формулы (3.6), получаем, что относительное превышение времени инкубации t_i над точным будет приблизительно равно $\Delta_{t_i} = \Delta_k + \Delta_v + \Delta_Q \approx 10\%$. При вычислении времени роста t_m кроме вышеперечисленных ошибок (при вычислении объема, массы газа, КИН) появляется погрешность, связанная с выбором максимального шага продвижения по радиусу Δr при расчете кинетики на каждом шаге по t (см. [4]). Проведены исследования сходимости по этому параметру [12], которые показали наличие оптимального режима плавного увеличения шага Δt ($\Delta r = 0,15 h, 0,3 h, 0,6 h$, где h — шаг сетки) до установления стационарного режима роста. Далее, при распространении трещины с постоянной скоростью v_0 , расчеты осуществлялись с постоянным шагом $\Delta t = 0,6 h$.

5. Результаты методических расчетов. Проведена серия методических расчетов [12] роста круговых и эллиптических трещин в плане при различных внешних условиях: концентрации газа c_0 , кинетических кривых $v(K)$ (фиг. 2). Цель их состояла в изучении процесса кинетики внутренней трещины, как такового, при учете взаимодействия двух эффектов — изменения характеристик трещиностойкости материала и изменения нагрузки (давления газа), обусловленного развитием трещины; в определении и сопоставлении параметров долговечности и кинетики при расчете с полной кинетической кривой и с одним критическим значением K_{sc} (см. [7]); в исследовании отклонения долговечности тел с трещинами сложной геометрии от долговечности тел с равновеликими круговыми дефектами на примере расчета роста эллиптических трещин равновеликих с круговой. На фиг. 3 в качестве примера приведены машинные графики контура эллиптической трещины в плане с начальным отношением полуосей равным 3 в зависимости от времени наблюдения t : кривые 0—11 соответствуют $t = 0; 4,98; 7,68; 8,78; 9,85; 11,05; 12,43; 13,51; 14,98; 16,39; 18,83; 20,76$ дням соответственно.

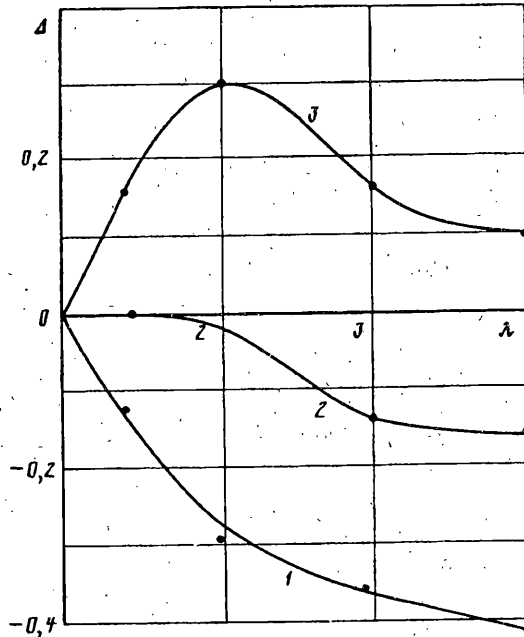
Численные результаты выявили установление стационарного режима роста трещин после их роста с постепенно увеличивающейся скоростью, что подтверждается экспериментально. Аналитическое доказательство этого факта дано в [13] для круговых трещин (так как ввиду равномерной нагрузки трещины любой формы дорастут до круговой, то доказательство справедливо для трещин любой формы).

При расчете долговечности без учета зависимости скорости роста от КИН $v(K)$ с одним критическим значением K_{sc} [7] время роста круговой трещины от начального радиуса a до $a + \Delta r$ равно

$$t_{0_m} = 4/3 \Delta r \theta^{-2} D^{-1} K_{sc}^2 \quad (5.1)$$

$$\theta^2 = c_0 R T E / (1 - \nu^2) \quad (5.2)$$

Проводились сравнительные расчеты для круговых трещин с учетом кинети-



Фиг. 6

ческой кривой $v(K)$: в зависимости от концентрации c_0 ; с кинетическими кривыми 1, 2, 3 (фиг. 2), кривая 1 — экспериментальная, 2, 3 — модельные; для трещин разного начального радиуса.

Цель расчетов в определении завышения долговечности при использовании одного порогового значения K_{sc} (формула (5.1)) или определении относительной погрешности $\Delta = (t_m - t_{0m})/t_{0m}$, где t_m — время увеличения радиуса трещины на Δr с учетом полной кинетической кривой $v(K)$, и определении зависимости Δ от внешних параметров: концентрации газа c_0 , вида кинетической кривой, начального размера дефекта.

Выяснилось, что относительное отклонение Δ долговечности, рассчитанное с использованием полной кинетической кривой и только критического значения K_{sc} , возрастает с увеличением концентрации газа c_0 (фиг. 4). Объяснение этому факту дано в [13]. На фиг. 4 представлены кривые 1, 2, 3 зависимости Δ [%] от концентрации c_0 [моль/см³], соответствующие различным кинетическим кривым 1, 2, 3 на фиг. 2. Они показывают, что, чем левее кинетическая зависимость $v(K)$ (кривая 2 на фиг. 2), тем больше отклонение Δ (кривая 2 лежит над кривой 1 на фиг. 4). Расчеты с трещинами различного радиуса показали, что с учетом полной кинетической кривой, долговечность существенно зависит от начального размера дефекта (тогда как без учета кинетической кривой с одним пороговым значением K_{sc} долговечность, или время роста, не зависит от начального радиуса трещины, см. (5.1)). Чем больше начальный радиус a трещин (при одной концентрации c_0), тем медленнее растут трещины и тем больше относительное отклонение $\Delta = (t_m - t_{0m})/t_{0m}$ (фиг. 5) (объяснение см. в [13]).

Следующая серия расчетов проводилась при одних и тех же внешних условиях (концентрации c_0 , кинетической кривой) для эллиптических трещин, по площади равных круговой трещине радиуса 1 см, с разным отношением полуосей $k' = b/a$. Рассчитывался период инкубации трещин t_i и время их роста до удвоенной площади t_m . Цель расчетов заключалась в сопоставлении долговечности

тела с круговой трещиной и долговечности тел с равновеликими эллиптическими трещинами. Для этого рассчитывались поправки $\Delta_i = (t_i - t_0)/t_0$, $\Delta_m = (t_m - t_{m0})/t_{m0}$, $\Delta = (t - t_0)/t$, где t_0 , t_{m0} , t — соответственно период инкубации, время роста, суммарное время $t_0 = t_0 + t_{m0}$ для круговой трещины. На фиг. 6 построены зависимости этих поправок от параметра $\lambda = a/b$, где кривые 1, 2, 3 соответствуют поправкам Δ_i , Δ_{i+t_m} , Δ_m ($\Delta = (t - t_0)/t_0$).

Обнаружена немонотонная зависимость времени роста t_m эллиптических трещин, соответственно поправки Δ_m , от соотношения полуосей эллипсов λ : медленнее всего растут трещины с $\lambda \approx 2$ (кривая 3 на фиг. 6). Период инкубации t_i у эллиптических трещин меньше, чем у круговой трещины (поскольку максимальным коэффициентом интенсивности напряжений в точке пересечения меньше оси с контуром достигается быстрее пороговое значение K_{acc} , чем на всем контуре круговой трещины), и период монотонно убывает с увеличением λ , соответственно поправка Δ_i монотонно убывает (кривая 1 на фиг. 6). Общее суммарное время $t = t_i + t_m$ (или долговечность) для эллиптических трещин в результате меньше, чем для круговой трещины, и оно монотонно убывает с ростом трещины, правда практически не отличаясь от суммарного времени t_0 , рассчитанного для круговой трещины (кривая 2 на фиг. 6) на отрезке $1 \leq \lambda \leq 2$ из-за немонотонности t_m по λ .

6. Нелинейные эффекты кинетики эллиптических трещин. Для объяснения немонотонной зависимости времени роста эллиптических трещин t_m от параметра $k' = b/a$, рассмотрим аналитические выражения для объема эллиптической трещины [14], расхода газа [15] и максимального КИН [16]:

$$V = \frac{8(1 - k'^2) p S b}{3 E E(k^2)}, \quad Q = \frac{2 \pi c_0 a}{K(k^2)}, \quad K_{\max} = p \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{b}}{E(k^2)} \quad (6.1)$$

где $K(k^2)$ и $E(k^2)$ — полные эллиптические интегралы I и II рода, $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2$, S — площадь эллипса.

Так как в рассматриваемых расчетах выбирались эллиптические трещины равновеликие с круговой единичного радиуса, то $ab = 1$ для любого эллипса, откуда $k' = b/a = b^2$ или

$$b = \sqrt{k'} = (1 - k^2)^{1/4}, \quad a = 1/(1 - k^2)^{1/4} \quad (6.2)$$

Тогда V , Q , K_{\max} можно переписать

$$V \sim \frac{(1 - k^2)^{1/4}}{E(k^2)}, \quad Q \sim \frac{1}{(1 - k^2)^{1/4} K(k^2)}, \quad K_{\max} \sim \frac{(1 - k^2)^{1/8}}{E(k^2)} \quad (6.3)$$

Из свойств эллиптических интегралов [17] следует [13], что функция $V(k^2)$ является монотонно убывающей по k^2 (как известно, объем равновеликой с эллиптической круговой трещины больше [14]; функция $Q(k^2)$ — монотонно возрастающей по k^2 : расход жидкости наименьший для круговой равновеликой трещины (аналог полной вдавливающей силы в задаче о штампе [15]), и, наконец, функция $K_{\max}(k^2)$ является сначала монотонно возрастающей по k^2 , имеет максимум при $k^2 \approx 0,75$ ($k \approx 0,5$ или $\lambda \approx 2$), потом убывает, стремясь к 0 при $k^2 \rightarrow 1$ ($\lambda \rightarrow \infty$, случай плоской задачи).

С немонотонностью функции $K_{\max}(k^2)$ связана немонотонность давления сраживания p_{acc} от k^2 (см. (3.7)): оно минимально при $\lambda = 2$ (когда K_{\max} максимален). Это приводит к тому, что скорость роста эллиптических трещин с $\lambda = 2$ на начальной нестационарной стадии минимальна (см. [12]) и как следствие ми-

нимально увеличение площади. Поскольку нельзя выписать аналитические выражения для площади растущих эллиптических трещин (на самом деле на начальной стадии они развиваются не в виде эллипсов, см. фиг. 3), вопрос о немонотонности времени роста эллиптических трещин требует качественных оценок и дальнейшего рассмотрения.

Для времени инкубации t_i эллиптических трещин, исходя из формул (3.6) и (6.3) можно выписать выражение $t_i \sim (1 - k^2)^{1/4} K(k^2) E(k^2)$, которое из поведения эллиптических интегралов [17] монотонно убывает как $\lambda^{-1/2} \ln 4\lambda$ при $\lambda \rightarrow \infty$, что и показали численные расчеты (см. кривую 1 на фиг. 6).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93—013—16481).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Салганик Р. Л. О кинетике распространения трещин. Условие разрушения и длительная прочность//Инж. ж. МТТ. 1966. № 6. С. 76—80.
2. Романич О. Н., Никифорчин Г. Н. Механика коррозионного разрушения конструкционных сплавов. М.: Металлургия, 1986. 292 с.
3. Гольдштейн Р. В., Клейн И. С., Эскин Г. И. Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегродифференциальных уравнений трехмерных задач теории упругости: Препринт 33. М.: ИПМ АН СССР, 1973. 55 с.
4. Гольдштейн Р. В., Отрощенко И. В., Федоренко Р. П. Метод уточняющих граничных сеток в пространственных задачах о трещинах в упругих телах: Препринт № 230. М.: ИПМ АН СССР, 1974. 70 с.
5. Балуева А. В., Зазовский А. Ф. Упругогидродинамическая задача о притоке жидкости к трещине в пористой среде//Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 157—166.
6. Гольдштейн Р. В., Кестенбойм Х. С., Сагова Л. Н. О расчете роста некоторых видов плоских трещин в трехмерных хрупких телах//Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 6. С. 98—95.
7. Гольдштейн Р. В., Ентов В. М., Павловский Б. Р. Модель развития водородных трещин в металле//Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 4. С. 828—831.
8. Гольдштейн Р. В., Зазовский А. Ф., Павловский Б. Р. Развитие дискообразного расслоения в стальном листе под действием растяжения и наводороживания//Физ.-хим. механика материалов. 1985. № 5. С. 100—105.
9. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
10. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. М.: Наука, 1973. 631 с.
11. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 487 с.
12. Балуева А. В., Гольдштейн Р. В., Федоренко Р. П. Кинетика газонаполненных трещин: постановка задачи, численный метод и основные результаты расчетов. М., 1989. 27 с. Препринт Ин-та прикл. математики АН СССР им. М. В. Келдыша № 39.
13. Балуева А. В. Кинетика газонаполненных трещин: качественные оценки и приложения: Препринт № 380. М.: ИПМ АН СССР, 1989. 34 с.
14. Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И. Пространственная задача теории упругости для тел с трещинами: Препринт № 187. М.: ИПМ АН СССР, 1981. 66 с.
15. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
16. Shah R. C., Kobayashi A. S. Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading//Eng. Fract. Mech. 1971. V. 3. No. 1. P. 71—96.
17. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.