МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1993

УДК 539.375

© 1993 г. С. М. МХИТАРЯН

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОЛОСОВОЙ ТРЕЩИНЫ В БЕСКОНЕЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Многие результаты по исследованию обширного класса смешанных задач о распространении в деформируемых телах трещин различных геометрических форм изложены в [1—4]. Аналитическое решение ряда таких задач для сред со сложными механическими характеристиками, основанное на эффективном методе обобщенных интегральных преобразований, приведено в монографии [5].

В публикуемой работе рассматривается напряженно-деформированное состояние бесконечного пространства с разрезом в виде полосы и обуждается вопрос его распространения. Эта задача трактуется как в рамках нелинейной теории установившейся ползучести при степенной зависимости между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций в первом приближении сообразно обобщенному принципу суперпозиции перемещений [6, 7], так и в рамках линейной теории упругости, когда модуль упругости пространства по вертикальной координате изменяется по степенному закону [5, 8, 9]. Отдельно рассматривается случай линейно-упругого однородного пространства.

Получены асимптотические формулы для нормальных разрушающих напряжений и перемещений вблизи краев трещин. На их основе, при помощи известного приема Ирвина, сформулировано энергетическое условие распространения трещины в линейно упругой неоднородной по степенному закону или однородной сплошной среде.

1. Пусть бесконечное пространство, отнесенное к правой системе прямоугольных координат $Oxyz$, содержит разрез в виде полосы $\omega = \{z = 0;\ -\infty < x < \infty,\ |y| \le a\}$, берега (верхняя и нижняя поверхности) которого нагружены одинаковыми по величине и противоположными по направлению нормальными силами интенсивности $p(x, y)$, причем $p(-x, y) = p(x, y)$. Будем предполагать, что материал пространства подчиняется степенной физической зависимости $\sigma_i = K\varepsilon_i^{\mu}$ $(0 < \mu \le 1)$, где σ_i и ε_i, соответственно, интенсивности напряжений и скоростей деформаций, а K и μ — физические константы [6, 7]. Требуется определить раскрытие разреза и нормальные разнушающие напряжения вне разреза.

Запишем основные уравнения задачи. Считая пространство состоящим из двух полупространств из несжимаемых материалов и используя результаты [10], согласно обобщенному принципу суперпозиции перемещений для вертикальных перемещений $u_z^{\pm}(x, y)$ ($u_z^{\pm}(x, y)$ фактически будут скорости, а не перемещения; однако для единообразия в дальнейшем будем употреблять термин «перемещения» граничных точек верхнего и нижнего полупространств, соотвественно, от нормальных напряжений будем иметь

$$\left[\frac{u_z^{\pm}(x, y)}{\pm A}\right]^{\mu} = w(x, y) = \iint\limits_{\Pi} \frac{q(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1-\mu/2}} \tag{1.1}$$

$$q(x, y) = \begin{cases} p(x, y) & ((x, y) \in \omega) \\ \sigma(x, y) & ((x, y) \in \Pi/\omega), \end{cases} \quad \{\Pi = z = 0;\ -\infty < x,\ y < \infty\}$$

где $\sigma(x, y)$ — нормальные напряжения вне разреза ω, взятые с обратным знаком. Здесь $A = C(\mu) K^{-h}$ $(h = 1/\mu)$, а $C(\mu)$ — определенная константа [10], причем

$C(^2/_3)=0$, $C(1)={}^1/_4\pi$ и $C(\mu)>0$ при $^2/_3<\mu\le 1$. Последнее ограничение на μ в дальнейшем будем считать соблюденным.

В случае линейно-упругого пространства, когда его модуль упругости по вертикальной координате z изменяется по степенному закону $E(z)=E_\nu|z|^\nu$ $(0\le\nu<1)$, в левой части (1.1) обобщенные перемещения $[\pm u_z^\pm(x,y)]^\mu$ следует формально заменить истинным перемещениями $\pm u_z^\pm(x,y)$, постоянную $(2A)^\mu$ — постоянной $A_\nu=\sqrt{\pi}\,\Theta_\nu\{\cos(\pi\nu/2)\cdot\Gamma[(1-\nu)/2]\,\Gamma(1+\nu/2)\}^{-1}$, а в правой части показатель μ следует заменить на $1-\nu$. Здесь Θ_ν — определенная константа [8]. Это замечание позволяет одновременно рассматривать поставленную задачу для линейно-упругого неоднородного пространства указанного типа.

Далее, как обычно, введем функцию скачка вертикальных перемещений на разрезе

$$u_z^+(x,y)-u_z^-(x,y)=\begin{cases}\chi(x,y), & (x,y)\in\omega\\ 0, & (x,y)\in\Pi/\omega\end{cases}$$

Тогда при помощи двукратного интегрального преобразования Фурье получим следующие основные уравнения задачи [11]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\iint_\omega\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\mu/2}}=-A_\nu p(x,y)\ ((x,y)\in\omega)\tag{1.2}$$

$$\sigma(x,y)=-A_\mu^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y}-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\iint_\omega\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+i\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\mu/2}}\ ((x,y)\in\Pi/\omega)\tag{1.3}$$

$$\varphi(x,y)=[\chi(x,y)]^\mu\quad((x,y)\in\omega,\ A_\mu=4\pi^2(2A)^\mu)$$

После перехода к трансформантам Фурье

$$\{\varphi_\lambda(y),p_\lambda(y),\sigma_\lambda(y)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\{\varphi(x,y),p(x,y),\sigma(x,y)\}\,e^{i\lambda x}dx$$

уравнения (1.2) и (1.3) примут соответственно вид ($K_\gamma(y)$ — функция Макдональда, $\Gamma(y)$ — гамма-функция Эйлера):

$$\left(\frac{d}{dy}-\lambda\right)\int_{-a}^{a}\frac{K_\gamma(|\lambda|\,|y-\eta|)}{|y-\eta|^\gamma}\left[\frac{d\varphi_\lambda(\eta)}{d\eta}+\lambda\varphi_\lambda(\eta)\right]d\eta=$$
$$=-g_\gamma(\lambda)\,p_\lambda(y)\ (|y|<a)\tag{1.4}$$

$$\sigma_\lambda(y)=-[g_\lambda(\lambda)]^{-1}\left(\frac{d}{dy}-\lambda\right)\int_{-a}^{a}\frac{K_\gamma(|\lambda|\,|y-\eta|)}{|y-\eta|^\gamma}\times$$
$$\times\left[\frac{d\varphi_\lambda(\eta)}{d\eta}+\lambda\varphi_\lambda(\eta)\right]d\eta\ (|y|>a)\tag{1.5}$$

$$g_\gamma(\lambda)=\pi\sqrt{\pi}\,(2A)^\mu 2^{\gamma+1}\Gamma(\gamma+1/2)\,|\lambda|^{-\gamma},\quad \gamma=(\mu-1)/2$$

Поскольку в (1.2)—(1.3) можно перейти к сопряженным величинам, что эквивалентно честности по координате x входящих в них функций, то в уравнениях (1.4)—(1.5) λ можно заменить на $-\lambda$.

Отметим, что интегро-дифференциальное уравнение (1.4) должно рассматриваться при граничных условиях

$$\varphi_\lambda(-a)=0,\ \varphi_\lambda(a)=0\tag{1.6}$$

выражающих условия непрерывности вертикальных перемещений на краях разреза.

2. Решение уравнения (1.4) и последующее нахождение $\sigma_\lambda(y)$ из (1.5) основывается на соотношениях

$$\int_{-a}^{a} \frac{K_\gamma(|\lambda|\,|y-\eta|)}{|y-\eta|^\gamma}(a^2-\eta^2)^{-\varkappa/2} P^\varkappa_{sn-\varkappa}(\eta/a,\Theta)\,d\eta =$$

$$= \lambda_n (a^2-y^2)^{\varkappa/2} P^\varkappa_{sn-\varkappa}(y/a,\Theta)\ (|y|<a) \tag{2.1}$$

$$\int_{-a}^{a} \frac{K_\gamma(|\lambda|\,|y-\eta|)}{|y-\eta|^\gamma}(a^2-\eta^2)^{-\varkappa/2} P^\varkappa_{sn-\varkappa}(\eta/a,\Theta)\,d\eta =$$

$$= \nu_n \operatorname{sgn} y\,(y^2-a^2)^{\varkappa/2} S^{\varkappa(3)}_{n-\varkappa}(|y|/a,\Theta)\ (|y|>a,\ n=0,1,2,\ldots) \tag{2.2}$$

$$P^\varkappa_{sn-\varkappa}(y/a,\Theta) = 2^\varkappa\Gamma(1-2\varkappa)\,[\Gamma(1-\varkappa)]^{-1}(1-y^2/a^2)^{-\varkappa/2}\times$$

$$\times\sum_{k=-[n/2]}^{\infty}\frac{(-1)^k(n+2k)!}{\Gamma(n+2k+1-2\varkappa)}a^\varkappa_{n-\varkappa,k}(\Theta)\,G^{1/2-\varkappa}_{n+2k}(y/a)\quad(|y|<a)$$

$$S^{\varkappa(3)}_{n-\varkappa}(y/a,\Theta) = l^\varkappa_n(\Theta)(y/a)^{\varkappa-1/2}(y^2/a^2-1)^{-\varkappa/2}(-1)^{[n/2]}\times$$

$$\times\sum_{k=-[n/2]}^{\infty}(-1)^k a^\varkappa_{n-\varkappa,k}(\Theta)\,K_{\gamma+n+2k}(2\sqrt{q}\,y/a)\ (|y|>a)$$

$$l^\varkappa_n(\Theta) = (-1)^n(\pi^2 q)^{-1/4}\exp[-i\pi(1-\varkappa/2)]\,s^\varkappa_{n-\varkappa}(\Theta),\quad \Theta=-q;\quad q=a^2\lambda^2/4$$

$$s^\varkappa_{n-\varkappa}(\Theta) = (-1)^{[n/2]}\Big\{\sum_{k=-[n/2]}^{\infty}(-1)^k a^\varkappa_{n-\varkappa,k}(\Theta)\Big\}^{-1};\quad \varkappa = 1/2-\gamma$$

$$\lambda_n = (-1)^{[n/2]}\alpha_n\sin(\pi\gamma)\,q^{(n+\gamma)/2}\,|2\lambda|^{-\gamma}2^{1-n}A^\varkappa_n(\Theta)\,B^\varkappa_n(\Theta)\,[E^\varkappa_n(\Theta)]^{-1}$$

$$A^\varkappa_n(\Theta) = \sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k a^\varkappa_{n-\varkappa,-k}(\Theta)}{k!\Gamma(n+\gamma+1-k)}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^\varkappa_{n-\varkappa,k}(\Theta)}{k!\Gamma(\Gamma-n-\Gamma-k)}\Big]^{-1}$$

$$B^\varkappa_n(\Theta) = (-1)^{[n/2]}\sum_{k=-[n/2]}^{\infty}(-1)^k a^\varkappa_{n-\varkappa,k}(\Theta)\,K_{\gamma+n+2k}(2\sqrt{q})$$

$$E^\varkappa_n(\Theta) = (n!)^{-1}\sum_{k=-[n/2]}(-1)^k\frac{(n+2k)!}{\Gamma(n+2\gamma+2k)}a^\varkappa_{n-\varkappa,k}(\Theta) + [\Gamma(n+2\gamma)]^{-1}\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{-[n/2]-1}(-1)^k a^{-\varkappa}_{n-\varkappa,k}(\Theta);\quad \nu_n = (-1)^{1+[n/2]}\beta_n\sin(\pi\gamma)\times$$

$$\times\, q^{(n+\gamma/2)}\,|2\lambda|^{-\gamma}2^{1-n}A^\varkappa_n(\Theta)\,[E^\varkappa_n(\Theta)]^{-1}$$

$$\alpha_n = \begin{cases}1, & n=2m\\ -1, & n=1m+1\end{cases};\qquad \beta_n = \sqrt{\pi^2 q}\begin{cases}e^{-i\pi\varkappa/2}, & n=1m\\ -e^{i\pi(1-\varkappa)/2}, & n=2m+1\end{cases}$$

$(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$

Здесь $C^\varkappa_n(y)$ — полиномы Гегенбауэра, $S^{\varkappa(3)}_\nu(y,\Theta)$ ($\nu=n-\varkappa$) — сфероидальные волновые функции третьего рода [12, 13], а $P^\varkappa_{s\nu}(y,\Theta)$ — также сфероидальные волновые функции, составляющие полную ортогональную систему функций в $L_2(-1, 1)$, причем

$$\int_{-1}^{1} P^{\varkappa}_{sn-\varkappa}(y, \Theta)\, P^{\varkappa}_{sm-\varkappa}(y, \Theta)\, dy = \delta_{m,n} h_n \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.3}$$

$$h_n = \begin{cases} [\Gamma(2 - 2\varkappa)]^{-1}, & n = 0; \\ n!\, [\Gamma(n + 1 - 2\varkappa)(n + 1/2 - \varkappa)]^{-1}, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Коэффициенты $a^{\varkappa}_{\nu, k}(\Theta)$ $\nu = n - \varkappa$) определяются из трехчленных рекуррентных однородных соотношений [12] (с. 171), нормированных определенным условием [13].

Соотношение (2.1)—(2.2) можно получить методами теории обобщенного потенциала при помощи результатов [14—16]. Некоторые результаты в этом направлении получены в [17][1].

Теперь интегро-дифференциальное уравнение (1.4) представив в виде

$$\int_{-a}^{a} \frac{K_\gamma(|\lambda|\,|y - \eta|)}{|y - \eta|^\gamma} \left[\frac{d\varphi_\lambda(\eta)}{d\eta} + \lambda\varphi_\lambda(\eta)\right] d\eta = -q_\gamma(\lambda)\, q_\lambda(y) \quad (|y| < a) \tag{2.4}$$

$$q_\lambda(y) = 2^{-1} \int_{-a}^{a} \operatorname{sgn}(y - \eta) \exp(y - \eta)]\, p_\lambda(\eta)\, d\eta + C \exp(\lambda y)$$

где C — неизвестная пока постоянная, и положим

$$\frac{d\varphi_\lambda(y)}{dy} + \lambda\varphi_\lambda(y) = (a^2 - y^2)^{-\varkappa/2} \sum_{n=0}^{\infty} X_n P^{\varkappa}_{sn-\varkappa}(y/a, \Theta), \quad (|y| < a) \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.4) и пользуясь соотношением (2.1), а также условием ортогональности (2.3), после некоторых преобразований находим

$$X_n = -q_\gamma(\lambda)\, (a\lambda_n b_n)^{-1}\, [p^{\varkappa}_n(\lambda) + C r^{\varkappa}_n(\lambda)] \tag{2.6}$$

$$p^{\varkappa}_n(\lambda) = 2^{-1} \int_{-a}^{a} p_\lambda(\eta)\, d\eta \int_{-a}^{a} \operatorname{sgn}(y - \eta) \exp[\lambda(y - \eta)]\, (a^2 - y^2)^{-\varkappa/2} \cdot$$

$$\cdot\, P^{\varkappa}_{sn-\varkappa}(y/a, \Theta)\, dy$$

$$r^{\varkappa}_n(\lambda) = \int_{-a}^{a} \exp(\lambda y)\, (a^2 - y^2)^{-\varkappa/2}\, P^{\varkappa}_{sn-\varkappa}(y/a, \Theta)\, dy \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Далее обращаем входящий в (2.5) дифференциальный оператор и принимаем во внимание граничные условия (1.6). В результате, при помощи (2.6), получим

$$C = -p_\varkappa(a, \lambda)\, [Q_\varkappa(a, \lambda)]^{-1}; \quad p_\varkappa(a, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n h_n)^{-1}\, p^{\varkappa}_n(\lambda)\, r^{\varkappa}_n(\lambda)$$

$$Q_\varkappa(a, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n h_n)^{-1}\, [r^{\varkappa}_n(\lambda)]^2; \quad \varkappa = 1/2 - \gamma = 1 - \mu/2 \tag{2.7}$$

$$\varphi_\lambda(y) = -(2a)^{-1} g_\gamma(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} q^{\varkappa}_n(a, \lambda)\, \Phi^{\varkappa}_n(y, \lambda)$$

$$q^{\varkappa}_n(a, \lambda) = (\lambda_n h_n)^{-1}\, [p^{\varkappa}_n(\lambda) + C r^{\varkappa}_n(\lambda)] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

---

[1] На эту работу автору любезно указал Г. Я. Попов.

$$\Phi_n^{\varkappa}(y, \lambda) = \int_{-a}^{a} \operatorname{sgn}(y - \eta) \exp[-\lambda(y - \eta)] (a^2 - \eta^2)^{-\varkappa/2} P_{sn-\varkappa}^{\varkappa}(\eta/a, \Theta)\, d\eta$$

Чтобы трансформанту Фурье раскрытия разреза $\varphi_\lambda(y)$ представить в симметрической форме, в (2.7) заменим λ на $-\lambda$ и возьмем полусумму $1/2\,[\varphi_\lambda(y) + \varphi_{-\lambda}(y)]$, так как $\varphi_{-\lambda}(y) = \varphi_\lambda(y)$. Затем отдельно рассмотрим случаи симметрического и кососимметрического нагружения берегов разреза, когда $p_\lambda(-y) = \pm p_\lambda(y)$ соответственно. Тогда для соответствующих функций $\varphi_\lambda^{\pm}(y)$ получим следующие выражения:

$$\varphi_\lambda^{+}(y) = (2a)^{-1} g_\gamma(\lambda) \Big[\sum_{m=0}^{\infty} q_{2m}^{\varkappa}(a, \lambda) G_{2m}^{\varkappa}(y, \lambda) -$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} q_{2m+1}^{\varkappa}(a, \lambda) H_{2m+1}^{\varkappa}(y, \lambda) \Big]$$

$$\varphi_\lambda^{-}(y) = -(2a)^{-1} q_\gamma(\lambda) \Big[\sum_{m=0}^{\infty} q_{2m}^{\varkappa}(a, \lambda) H_{2m}^{\varkappa}(y, \lambda) -$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} q_{2m+1}^{\varkappa}(a, \lambda) G_{2m+1}^{\varkappa}(y, \lambda) \Big] \quad (|y| \le a)$$

$$G_n^{\varkappa}(y, \lambda) = \int_{-a}^{a} \operatorname{sh}(\lambda |y - \eta|) (a^2 - \eta^2)^{-\varkappa/2} P_{sn-\varkappa}^{\varkappa}(\eta/a, \Theta)\, d\eta$$

$$H_n^{\varkappa}(y, \lambda) = \int_{-a}^{a} \operatorname{sgn}(y - \eta) \operatorname{ch}[\lambda(y - \eta)] (a^2 - \eta^2)^{-\varkappa/2} P_{sn-\varkappa}^{\varkappa}(\eta/a, \Theta)\, d\eta$$

Перейдем теперь к вопросу определения $\sigma_\lambda(y)$ из (1.5). Пользуясь соотношением (2.2) и формулой (2.5), сразу находим

$$\sigma_\lambda(y) = a^{-1} \left(\frac{d}{dy} - \lambda \right) \Big[\operatorname{sgn} y\, (y^2 - a^2)^{\varkappa/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu_n q_n^{\varkappa}(a, \lambda)}{\lambda_n h_n} \times$$

$$\times S_{n-\varkappa}^{\varkappa(3)}(y/a, \Theta) \Big] \quad (|y| > a) \qquad (2.8)$$

С другой стороны, при помощи известных представлений ([12], с. 173 первая формула (20) и с. 174 формула (28) можно показать, что

$$\frac{d}{dy} [(y^2 - a^2)^{\varkappa/2} S_{n-\varkappa}^{\varkappa(3)}(y/a, \Theta)] \simeq$$

$$\simeq -2\pi F_\gamma \lambda_n^{-1} l_n^{\varkappa}(\Theta) B_n^{\varkappa}(\Theta) a^{\gamma+1/2} (y^2 - a^2)^{-\gamma-1/2} \quad (y \to a + 0)$$

$$F_\gamma = \pi^{-1/2} r 2^{\gamma-1} |\lambda|^{-\gamma} \Gamma(\gamma + 1/2)$$

Следовательно, из (2.8) можно определить коэффициент интенсивности трансформанты Фурье нормальных разрушающих напряжений

$$K_\lambda = -\lim_{y \to a+0} \sigma_\lambda(y) (y - a)^{a+1/2}] =$$

$$= \pi a^{-1} 2^{1/2-\gamma} F_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n^2 h_n)^{-1} \nu q_n^{\varkappa}(a, \lambda) l_n^{\varkappa}(\Theta) B_n^{\varkappa}(\Theta) \qquad (2.9)$$

Отсюда вытекает, что ($H(y)$ — функция Хевисайда):

$$\sigma_\lambda(y) \simeq \sigma_\lambda^{\circ}(y) = -K_\lambda |y - a)^{-\mu/2} H(y - a) \quad (y \to a + 0) \qquad (2.10)$$

Получим также асимптотическую формулу для трансформанты Фурье вертикальных обобщенных перемещений вблизи краев разреза, чего можно достичь известным методом Лайтхилла [18]. Для простоты ограничиваясь случаем симметрического нагружения берегов разреза, к обеим частям (1.1) применим преобразование Фурье по переменной x. В результате будем иметь

$$w_\lambda(y) = \frac{\sqrt{\pi}\,2^{\gamma+1}}{|\lambda|^\gamma \Gamma(1/2-\gamma)} \int_{-\infty}^{\infty} |y-\eta|^{-\gamma} K_\gamma(|\lambda|\,|y-\eta|)\, q_\lambda(\eta)\, d\eta \tag{2.11}$$

$$\{w_\lambda(y), q_\lambda(y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{w(x, y), q(x, y)\}\, e^{i\lambda x} dx, \quad \gamma = (\mu-1)/2$$

Чтобы найти асимптотику $w_\lambda(y)$ при $y \to a$ к обеим частям (2.11) теперь применим преобразование Фурье по переменной y, которое приводит к соотношению

$$\overline{w}_\lambda(\alpha) = \pi w^\mu \Gamma(\mu/2)\, \overline{q}_\lambda(\alpha)\, [\Gamma(1-\mu/2)\,(\lambda^2+\alpha^2)^{\mu/2}]^{-1} \tag{2.12}$$

где $\overline{w}_\lambda(\alpha)$ и $\overline{q}_\lambda(\alpha)$ — трансформанты Фурье по переменной y функций $w_\lambda(y)$ и $q_\lambda(y)$ соответственно.

Далее (2.12) преобразуем следующим образом:

$$\overline{w}_\lambda(\alpha) = \pi 2^\mu \Gamma(\mu/2)\, [\Gamma(1-\mu/2)]^{-1} (\lambda^2+\alpha^2)^{-\mu/2} [\overline{q}_\lambda(\alpha) -$$

$$- \overline{\sigma}_\lambda^\circ(\alpha)] + \pi 2^\mu \Gamma(\mu/2)\, [\Gamma(1-\mu/2)]^{-1} (\lambda^2+\alpha^2)^{-\mu/2}\, \overline{\sigma}_\lambda^\circ(\alpha)$$

Откуда вытекает, что

$$\overline{w}_\lambda(\alpha) \simeq -\pi K_\lambda 2^\mu \Gamma(\mu/2) e^{i\alpha a} |a|^{-\mu/2-1} [\sin(\pi\mu/4) + i\cos(\pi\mu/4)\,\mathrm{sgn}\,\alpha],$$

$$(|\alpha| \to \infty)$$

Здесь учтено выражение трансформанты Фурье $\overline{\sigma}_\lambda^\circ(\alpha)$ функции $\sigma_\lambda^\circ(Y)$ из (2.10) ([18], с. 43). Следовательно, на основе известной теоремы ([18], с. 52):

$$w_\lambda(y) \simeq \begin{cases} \pi\mu^{-1} K_\lambda 2^{1+\mu} |y-a|^{\mu/2}, & y \to a-0 \\ 0, & y \to a+0 \end{cases} \tag{2.13}$$

где K_λ дается формулой (2.9).

Теперь запишем уравнение энергетического баланса [1, 2] для тела с распространяющимся разрезом (трещиной), выражающее условие локального разрушения тела

$$dU = -d\Pi \tag{2.14}$$

Здесь U — потенциальная энергия тела к моменту разрушения, а Π — поверхностная энергия разрушения, причем $d\Pi = 2\Gamma_0 dS$, где Γ_0 — плотность поверхностной энергии. Следовательно, уравнение (2.14) можно представить в виде

$$dU/dS = G = -2\Gamma_0 \tag{2.15}$$

где G — интенсивность освобождающейся энергии тела (приток энергии в край трещины), расходуемой на его разрушение.

Для вычисления G воспользуемся известным приемом Ирвина [1, 2], предполагая, что край трещины $y=a$ мысленно продвигается вправо на величину Δa. Тогда

$$G = -\lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\Delta a} \sigma_z(x, y)\, [u_z^+(x, y)]^\mu\, dx dy =$$

$$= A^{\mu} \lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int\limits_0^{\Delta a} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x, y)\, \sigma(x, y)\, dx$$

так как $\sigma_z(x, y) = -\sigma(x, y)$, $[u_z^+(x, y)]^{\mu} = A^{\mu} w(x, y)$. Приняв во внимание равенство Парсеваля для косинус-интегралов Фурье, отсюда получим

$$G = 4\pi^{-1} A^{\mu} \lim_{\Delta a \to a} \frac{1}{\Delta a} \int\limits_0^{\Delta a} w_\lambda(y)\, \sigma_\lambda(y)\, d\lambda$$

Но согласно асиптотическим формулам (2.10) и (2.13):

$$\sigma_\lambda(y) \simeq -K_\lambda y^{-\mu/2}, \quad w_\lambda(y) \simeq \pi\mu^{-1} K_\lambda 2^{1+\mu} (\Delta a - y)^{\mu/2}$$

$$0 < y < \Delta a, \quad \Delta a \to 0$$

с учетом которых можем записать

$$G = -\mu^{-1} A^{\mu} 2^{3+\mu} \lim_{\Delta a \to 0} \int\limits_0^{\infty} K_\lambda^2 d\lambda \int\limits_0^{\Delta a} \left(\frac{\Delta a - y}{y} \right)^{\mu/2} dy$$

Вычислив входящий сюда внутренний элементарный интеграл, окончательно будем иметь

$$G = -\pi 2^{\mu+2} A^{\mu} [\sin(\pi\mu/2)]^{-1} \int\limits_0^{\infty} K_\lambda^2 d\lambda$$

Следовательно, условие распространения трещины (2.15) принимает вид

$$2\pi (2A)^{\mu} [\sin(\pi\mu/2)]^{-1} \int\limits_0^{\infty} K_\lambda^2 d\lambda = \Gamma_0 \tag{2.16}$$

В условии (2.16), как и в силовом критерии Ирвина, опять главную роль играет коэффициент интенсивности нормальных разрушающих напряжений (точнее, в данном случае имеем коэффициент интенсивности трансформанты Фурье нормальных напряжений).

3. Решение обсуждаемой задачи в частном случае линейно-упругого однородного пространства можно получить из изложенных результатов предельным переходом $\mu \to 1$ или $\gamma \to 0$. Однако, при этом предельном переходе аппарат сфероидальных волновых функций, основанный на соотношениях (2.1)—(2.2), заменяется аппаратом периодических функций Матье. Поэтому целесообразно отдельно рассматривать указанный частный случай, представляющий также самостоятельный интерес, и непосредственно использовать аппарат периодических функций Матье, который быстрее приводит к цели.

Основные уравнения поставленной задачи для линейно упругого однородного пространства получаются из (1.2)—(1.3) или из (1.4)—(1.5), если в них положить $\mu = 1$ $(\gamma = 0)$ и постоянную A заменить постоянной $\vartheta = (1 - \nu^2)/\pi E$, где ν — коэффициент Пуассона, а E — модуль упругости материала пространства.

Вместо соотношений (2.1)—(2.2) воспользуемся следующими соотношениями

$$\int\limits_{-a}^{a} K_0(|\lambda|\,|y - \eta|)\, \mathrm{ce}_n(\arccos(\eta/a), -q)\, (a^2 - \eta^2)^{-1/2} d\eta =$$

$$= \mu_n \mathrm{ce}_n(\arccos(y/a), -q) \quad (|y| < a) \tag{3.1}$$

$$\int\limits_{-a}^{a} K_0(|\lambda|\,|y - \eta|)\, \mathrm{ce}_n(\arccos(\eta/a), -q)\, (a^2 - \eta^2)^{-1/2} d\eta =$$

$$= \rho_n c_n(y)\, \mathrm{Fek}_n(l_n(\sqrt{y^2 - a^2} + |y|)/a, -q) \quad (|y| > a) \tag{3.2}$$

$$\mu_n = -\pi \operatorname{Fek}_n(0, -q)\,[\operatorname{Fek}_n'(0, -q)]^{-1};\quad c_n(y) = \begin{cases} 1, & n = 2m \\ \operatorname{sgn} y, & n = 2m+1 \end{cases}$$

$$\rho_n = -\pi \operatorname{ce}_n(0, -q)\,[\operatorname{Fek}_n'(0, -q)]^{-1};\quad m, n = 0, 1, 2, \ldots,\quad q = a^2\lambda^2/4$$

Здесь $\operatorname{ce}_n(y, -q)$ — периодические косинус-функции Маите, составляющие полную ортогональную систему функций в $L_2(0, \pi)$, а $\operatorname{Fek}(y, -q)$ — модифицированные функции Матье третьего рода. Соотношения (3.1)—(3.2) установлены в [19].

Решение уравнения (1.4) при $\gamma = 0$ представим в виде

$$\frac{d\varphi_\lambda(y)}{dy} + \lambda\varphi_\lambda((y) = (a^2 - y^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} X_n \operatorname{ce}_n(\arccos(y/a), -q),\quad (|y| < a)$$

Используя (3.1) и граничные условия (1.6), находим

$$X_n = -8\pi\vartheta\mu_n^{-1} q_n(\lambda),\quad q_n(\lambda) = p_n(\lambda) + Cr_n(\lambda)\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$p_n(\lambda) = 2^{-1} \int_{-a}^{a} p_\lambda(\eta)\, d\eta \int_{-a}^{a} \exp[\lambda(y - \eta)] \operatorname{sgn}(y - \eta) \operatorname{ce}_n(\arccos(y/a), -q) \times$$

$$\times (a^2 - y^2)^{-1/2}\, dy$$

$$r_n(\lambda) = \int_{-a}^{a} \exp(\lambda y) \operatorname{ce}_n(\arccos(y/a), -q)\,(a^2 - y^2)^{-1/2}\, dy$$

$$C = -P(a, \lambda)\,[Q(a, \lambda)]^{-1},\quad P(a, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\lambda)\, r_n(\lambda)\, \lambda_n^{-1}$$

$$Q(a, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} [r_n(\lambda)]^2 \lambda_n^{-1}$$

Далее, поступив совершенно аналогично изложенному в предыдущем пункте и учитывая (3.2), получим

$$\varphi_\lambda^+(y) = 4\pi\vartheta \left[\sum_{m=0}^{\infty} q_{2m}(\lambda)\, \mu_{2m}^{-1} G_{2m}(y, \lambda) - \sum_{m=0}^{\infty} q_{2m+1}(\lambda)\, \mu_{2m+1}^{-1} H_{2m+1}(y, \lambda)\right]$$

$$\varphi_\lambda^-(y) = -4\pi\vartheta \left[\sum_{m=0}^{\infty} q_{2m}(\lambda)\, \mu_{2m}^{-1} H_{2m}(y, \lambda) - \sum_{m=0}^{\infty} q_{2m+1}(\lambda)\, \mu_{2m+1}^{-1} G_{2m+1}(y, \lambda)\right]$$

$$G_n(y, \lambda) = \int_{-a}^{a} \operatorname{sh}(\lambda |y - \eta|) \operatorname{ce}_n(\arccos(\eta/a), -q)\,(a^2 - \eta^2)^{-1/2}\, d\eta$$

$$H_n(y, \lambda) = \int_{-a}^{a} \operatorname{ch}[\lambda(y - \eta)] \operatorname{sgn}(y - \eta) \operatorname{ce}_n(\arccos(\eta/a), -q)\,(a^2 - \eta^2)^{-1/2}\, d\eta$$

$$\sigma_\lambda(y) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{d}{dy} - \lambda\right) \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\lambda)\, \rho_n \nu_n^{-1} \operatorname{Fek}_n((\sqrt{y^2 - a^2} + |y|)/a, -q),\quad (|y| > a)$$

Если опять ограничиться случаем симметрического нагружения берегов разреза, то в разбираемом случае будем иметь

$$K_\lambda^1 = -\lim_{y \to +a} (\sigma_\lambda(y)\sqrt{y - a}) = -\pi^{-1}(2a^{-1})^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\lambda)\, \rho_n \mu_n^{-1} \operatorname{Fek}'(0, -q)$$

$$w_\lambda(y) \simeq \begin{cases} 4\pi K_\lambda^1 \vartheta\, |y - a|^{1/2}, & y \to a - 0 \\ 0, & y \to a + 0 \end{cases}$$

С учетом этих асимптотических представлений условие распространения трещины запишется в виде

$$8\vartheta (a\Pi)^{-1} \int\limits_0^\infty \Big[\sum_{n=0}^\infty q_n (\lambda)\, \rho_n \mu_n^{-1} \operatorname{Fek}_n' (0, -q) \Big]^2 d\lambda = \Gamma_0$$

Рассмотим частный случай гагружения, когда $P_\lambda (y) \equiv P_0/2 = \text{const}$. Тогда, приняв во внимание выражения рядов Фурье для периодических косинус-функций Матье [12] и известные результаты из [19], после преобразований получим

$$p_{2m} (\lambda) = (-1)^m \frac{\pi a p_0}{4\sqrt{q}} A_0^{(2m)} \left[\operatorname{ch} (2\sqrt{q}) \frac{\operatorname{ce}_{2m} (\pi/2, q)}{\operatorname{ce}_{2m} (0, q)} - 1 \right]$$

$$p_{2m+1} (\lambda) = (-1)^m \frac{\pi a p_0}{4} B_1^{(2m+1)} \operatorname{ch} (2\sqrt{q}) \frac{\operatorname{se}_{2m+1} (\pi/2, q)}{\operatorname{se}_{2m+1}' (0, q)}$$

$$r_{2m} (\lambda) = (-1)^m \pi A_0^{(2m)} \frac{\operatorname{ce}_{2m} (\pi/2, q)}{\operatorname{ce}_{2m} (0, q)}; \; r_{2m+1} (\lambda) = (-1)^m \Pi \sqrt{q}\, B_1^{(2m+1)} \frac{\operatorname{se}_{2m+1} (\pi/2, q)}{\operatorname{se}_{2m+1}' (0, q)}$$

Здесь $\operatorname{se}_{2m+1} (y, q)$ — периодические синус-функции Маите, а $A_0^{(2m)}$ и $B_1^{(2m+1)}$ — коэффициенты периодических функций Матье [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
3. Разрушение. Математические основы теории разрушения. Т. 2. М.: Мир, 1975. 768 с.
4. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев.: Наук. думка, 1976. 443 с.
5. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
6. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести//ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 901—924.
7. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения//ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 5. С. 813—820.
8. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев-Одесса: Вища школа, 1982. 168 с.
9. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев, Наук. думка, 1977. 235 с.
10. *Кузнецов А. Т.* Вдавливание жестких штампов в полупространство при степенном упрочнении и при нелинейной ползучести материала//ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 3. С. 481—491.
11. *Мхитарян С. М.* К напряженному состоянию деформирующегося по степенному закону бесконечного пространства с разрезом в виде полосы или полуплоскости//Докл. АН Арм. ССР. 1982. Т. 74. № 1. С. 30–36.
12. *Бейтмен Н., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967. 300 с.
13. *Meixner J., Schägke F. W.* Mathieusche Funktionen und Sphäroidgunktionen//Berlin-Götingen-Heidelberg: Sptinger-Verlag, 1954. 417 S.
14. *Раков А. Х., Рвачев В. Л.* Контактная задача теории упругости для полупространства, модуль упругости которого есть степенная функция глубины//Докл. АН УССР. 1961. № 3. С. 286—290.
15. *Мхитарян С. М.* О двух спектральных соотношениях для интегральных операторов на полубесконечном интервале и их приложении к смешанным задачам//Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 63—72.

16. *Мхитарян С. М.* Об одном спектральном соотношении в сфероидальных волновых функциях и его приложении к контактным задачам//ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 845—853.
17. *Belward J. A.* On the Relationship of Some Fredholm Integral Equations of the First Kind to a Family of Boundary Value Problems//J. Math. anal. appl. 1974. Vol. 48. No. 1. P. 184—199.
18. *Lighthill M. J.* Introduction to Fourier analysis and generalised functions//Cambridge: Univ. press, 1959. 79 p.
19. *Александров В. М., Коваленко Е. В., Мхитарян С. М.* Об одном методе получения спектральных соотношений для интегральных операторов смешанных задач механики сплошных сред//ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 1028—1036.

Ереван

Поступила в редакцию
17.IV.1992