

УДК 531.391

© 1993 г. В. Г. ВИЛЬКЕ

## О КАЧЕНИИ ВЯЗКОУПРУГОГО КОЛЕСА

Исследуемая в работе задача рассматривалась многими авторами в различных постановках [1—6]. Ниже предлагается модель пневматика с бесконечным числом степеней свободы, позволяющая в аналитическом виде получить ряд характеристик движения в стационарных режимах (качение колеса с постоянной скоростью в вертикальной плоскости).

**1. Постановка задачи.** В качестве модели колеса возьмем гибкое нерастяжимое кольцо радиуса  $r$ , каждая точка которого связана с диском вязкоупругими связями, массой которых будем пренебрегать. На диск действует вертикальная нагрузка  $P$ , которая приводит к деформации кольца, находящегося в контакте без проскальзывания с горизонтальной твердой поверхностью. Центр колеса перемещается вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $V$ , оставаясь в вертикальной плоскости  $Oxy$  (фигура).

Предположим вначале, что диссипативных сил нет. Деформации кольца будем рассматривать в переменных Эйлера в полярной системе координат. Положение точки кольца задается вектором  $\mathbf{R}(\varphi) = (r + u(\varphi)) \mathbf{e}_r + v(\varphi) \mathbf{e}_\varphi$ , где  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  — единичные векторы полярной системы координат. Условие нерастяжимости кольца запишем в виде

$$(d\mathbf{R})^2 = [(u' - v)^2 + (r + u + v')^2] d\varphi^2 = r^2 d\varphi^2$$

и с точностью до малых второго порядка по  $u$ ,  $v$ ,  $u'$ ,  $v'$  получим

$$u + v' = 0 \quad (1.1)$$

где штрих означает дифференцирование по  $\varphi$ . В стационарном режиме перемещения  $u$  и  $v$  не зависят от времени. Единичный вектор касательной деформированного кольца и его производная определяются выражениями

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{R}}{rd\varphi} = \frac{1}{r} (u' - v) \mathbf{e}_r + \left(1 + \frac{u + v'}{r}\right) \mathbf{e}_\varphi \approx \frac{u' - v}{r} \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi \quad (1.2)$$

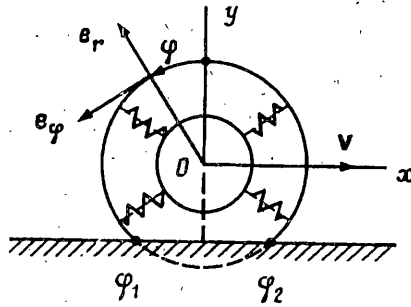
$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k\mathbf{n} = \frac{d^2\mathbf{R}}{r^2 d\varphi^2} &= \left(\frac{u'' - v'}{r^2} - \frac{1}{r} - \frac{u + v'}{r^2}\right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{u' - v}{r^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{u' + v'}{r^2}\right) \mathbf{e}_\varphi \approx \left(\frac{u'' - v'}{r^2} - \frac{1}{r}\right) \mathbf{e}_r + \frac{u' - v}{r^2} \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

Здесь  $s$  — длина дуги кривой,  $k$  — ее кривизна,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали. При движении колеса со скоростью  $V$  частицы кольца перемещаются вдоль стационарной формы кольца с постоянной скоростью  $V$  и их ускорение  $\mathbf{W}$  равно

$$\mathbf{W}(\varphi) = kV^2\mathbf{n} = \frac{V^2}{r} \left[ \left(\frac{u'' - v'}{r} - 1\right) \mathbf{e}_r + \frac{u' - v}{r} \mathbf{e}_\varphi \right] \quad (1.3)$$

Упругое взаимодействие кольца с диском будем моделировать силой

$$\mathbf{F}(\varphi) = -c_1 v \mathbf{e}_\varphi + c_2 (a - u) \mathbf{e}_r \quad (1.4)$$



где  $c_1, c_2, a$  — постоянные. Сила  $c_2 a e$ , определяется давлением в пневматике. Если через  $T(\varphi) \tau$  обозначить силу натяжения в кольце, то второй закон Ньютона для элементарной частицы кольца запишется в виде

$$\rho W = F + \frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} (T(\varphi) \tau(\varphi)) \quad (1.5)$$

где  $\rho$  — линейная плотность материала кольца. Учитывая соотношения (1.2) — (1.4), получим уравнения движения в проекциях на оси полярной системы координат

$$\begin{aligned} \rho \frac{V^2}{r} \left( \frac{u'' - v'}{r} - 1 \right) &= c_2 (a - u) + \frac{T}{r} \left( \frac{u'' - v'}{r} - 1 \right) + T' \frac{u' - v}{r^2} \\ \rho \frac{V^2}{r^2} (u' - v) &= -c_1 v + T \frac{u' - v}{r^2} + \frac{T'}{r} \end{aligned} \quad (1.6)$$

которые совместно с уравнением (1.1) образуют замкнутую систему уравнений относительно неизвестных  $u, v, T$ . Уравнения (1.6) справедливы вне зоны контакта кольца с плоскостью качения.

В зоне контакта кольцо имеет прямолинейную форму, ускорения точек равны нулю и имеются еще дополнительные силы, действующие на кольцо со стороны плоскости качения. Эти силы (поле реакций связи) идеальны, так как их работа на возможных перемещениях равна нулю: для точек контакта возможные перемещения отсутствуют. Поле реакций связи в общем случае имеет составляющие по нормали (вдоль оси  $y$ ) и по касательной (вдоль оси  $x$ ). Поскольку в зоне контакта участок кольца рассматривается как твердое тело, то определение поля касательных сил невозможно: наложение любого дополнительного поля касательных сил с результирующей равной нулю не влияет на условия равновесия. Покажем, что проекция результирующей силы поля реакций связи в зоне контакта на ось  $x$  равна нулю [7]. Заметим, что стационарный режим (качение колеса с постоянной скоростью) возможен только при условии, когда на диск не действует внешняя сила по оси  $x$ . Если предположить, что эта сила не равна нулю, например, сила  $F_1 e_x$ , то мощность этой силы  $F_1 V \neq 0$ , а из условия стационарности движения следует, что полная механическая энергия системы сохраняется. Но, если  $F_1 e_x = 0$ , то, вводя поле реакций в зоне контакта и рассматривая движение центра масс системы вдоль оси  $x$ , получим равенство нулю результирующей поля реакций связи в проекции на ось  $x$ .

На границе зоны контакта при  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi = \varphi_2$  выполняются условия сопряжения

$$R(\varphi_2) - R(\varphi_1) = (2\pi - \varphi_1 + \varphi_2) r e_x, \quad \tau(\varphi_1) = \tau(\varphi_2) = e_x \quad (1.7)$$

2. Деформация кольца в стационарном режиме. Линеаризуем уравнения (1.6), предполагая перемещения  $u, v$  их производные малыми, а также полагая

$T = T_0 + r q$ , где  $q(\varphi)$  мало вместе со своей производной. В результате получим  $T_0 = c_2 a r + \rho V^2$  и уравнения

$$\rho V^2 r^{-2} (u'' - v') = -c_2 u + T_0 r^{-2} (u'' - v') - q \quad (2.1)$$

$$\rho V^2 r^{-2} (u' - v) = -c_1 v + T_0 r^{-2} (u' - v) + q'$$

Слагаемое  $c_2 a$  в выражении  $T_0$  пропорционально давлению в пневматике. Кроме того, предположим, что продольная жесткость  $c_1 \gg c_2$  ( $c_2$  — радиальная жесткость пневматика). Дифференцируя первое уравнение (2.1) по  $\varphi$  и складывая со вторым, найдем

$$c_2 a r^{-1} (u''' - v'' + u' - v) = c_2 u' + c_1 v$$

Используя соотношение (1.1), получим

$$v'' + 2(1 + 1/2r/a)v' + [1 + c_1 r / (c_2 a)]v = 0 \quad (2.2)$$

Линейное уравнение с постоянными коэффициентами (2.2) имеют общее решение

$$v(\varphi) = (A_1 + iA_2) \operatorname{sh}(\alpha + i\beta)\varphi + (A_1 - iA_2) \operatorname{sh}(\alpha - i\beta)\varphi + (A_3 + iA_4) \operatorname{ch}(\alpha + i\beta)\varphi + (A_3 - iA_4) \operatorname{ch}(\alpha - i\beta)\varphi \quad (2.3)$$

где  $A_k$  ( $k = \overline{1,4}$ ) — произвольные действительные постоянные,  $\pm\alpha \pm i\beta$  — корни характеристического уравнения

$$\lambda^4 + 2(1 + 1/2r/a)\lambda^2 + [1 + c_1 r / (c_2 a)] = 0$$

при условии выполнения неравенства  $c_1/c_2 > 1 + 1/4r/a$ .

Функция  $u(\varphi)$  согласно (1.1) отыскивается простым дифференцированием  $u(\varphi) = -v'(\varphi)$ . Рассматриваемая задача допускает решение симметричное относительно оси  $y$ , когда  $v(\varphi) = -v(-\varphi)$ ,  $u(\varphi) = u(-\varphi)$ ,  $\varphi_2 = -\varphi_1$ . При этом поле реакций связи в зоне контакта будет иметь нулевой момент относительно точки  $O$ . Пусть внешняя нагрузка  $P$  такова, что угол  $\delta = \pi - \varphi_1$  мал. Тогда в зоне контакта  $\varphi \in [\pi - \varphi_1, \pi]$ :

$$F_{e_y} = -c_1 v(\varphi) \sin \varphi + c_2 (a - u(\varphi)) \cos \varphi = -c_1 v(\varphi) \sin \gamma - c_2 (a - u(\varphi)) \cos \gamma, \quad \gamma = \pi - \varphi < \delta$$

В первом приближении (отбрасываются члены первого порядка малости и выше) силу  $F_{e_y}$  можно считать постоянной и равной  $-c_2 a$ . Тогда  $r\delta c_2 a = 1/2 P \Rightarrow \delta = 1/2 P / (c_2 a r)$ .

В случае симметричного решения краевые условия (1.7) представляются в виде  $R(\varphi_1) e_x = -r\delta$ ,  $\tau(\varphi_1) = e_x$  или

$$(r + u(\varphi_1)) \sin \delta - v(\varphi_1) \cos \delta = r\delta \quad (2.4)$$

$$r^{-1} (u'(\varphi_1) - v(\varphi_1)) \sin \delta - \cos \delta = -1$$

$$r^{-1} (u'(\varphi_1) - v(\varphi_1)) \cos \delta + \sin \delta = 0$$

Второе условие (2.4) выполняется с точностью до членов второго порядка малости всегда, а первое и третье соотношения с учетом членов первого порядка малости приводятся к виду  $v(\varphi_1) = 0$ ,  $u'(\varphi_1) = -r\delta$ . Полагая в общем решении (2.3) коэффициенты  $A_3 = A_4 = 0$ , запишем краевые условия в виде ( $\varphi_1 = \pi - \delta$ ):

$$(A_1 + iA_2) \operatorname{sh}(\alpha + i\beta)\varphi_1 + (A_1 - iA_2) \operatorname{sh}(\alpha - i\beta)\varphi_1 = 0 \quad (2.5)$$

$$(A_1 + iA_2)(\alpha + i\beta)^2 \operatorname{sh}(\alpha + i\beta)\varphi_1 + (A_1 - iA_2)(\alpha - i\beta)^2 \operatorname{sh}(\alpha - i\beta)\varphi_1 = r\delta$$

Решение системы (2.5) имеет вид

$$A_1 \pm iA_2 = \pm r\delta \operatorname{sh}(\alpha \mp i\beta) \varphi_1 / (i\Delta) \quad (2.6)$$

$$\Delta = 4\alpha\beta (\operatorname{sh}^2 \alpha \varphi_1 \cos^2 \beta \varphi_1 + \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_1 \sin^2 \beta \varphi_1)$$

Учитывая принятую точность определения перемещений и малость  $\delta$ , угол  $\varphi_1$  в формулах (2.6) можно заменить на  $\pi$  и найти

$$A_1 \pm iA_2 \approx - \frac{r\delta (\operatorname{ch} \alpha \pi \sin \beta \pi \pm i \operatorname{sh} \alpha \pi \cos \beta \pi)}{4\alpha\beta (\operatorname{sh}^2 \alpha \pi \cos^2 \beta \pi + \operatorname{ch}^2 \alpha \pi \sin^2 \beta \pi)} \quad (2.7)$$

Таким образом, согласно (1.1), (2.3) и (2.7) определяются функции

$$\dot{v}(\varphi) = (A_1 + iA_2) \operatorname{sh}(\alpha + i\beta) \varphi + (A_1 - iA_2) \operatorname{sh}(\alpha - i\beta) \varphi \quad (2.8)$$

$$u(\varphi) = - (A_1 + iA_2) (\alpha + i\beta) \operatorname{ch}(\alpha + i\beta) \varphi - (A_1 - iA_2) (\alpha - i\beta) \operatorname{ch}(\alpha - i\beta) \varphi$$

3. Диссипация энергии. Сопротивление качению. Дополним рассматриваемую модель малыми диссипативными силами, приняв функционал диссипативных сил  $D[\dot{u}, \dot{v}]$  равным

$$D[\dot{u}, \dot{v}] = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (d_1 \dot{v}^2 + d_2 \dot{u}^2) d\varphi$$

где коэффициенты  $d_1$  и  $d_2$  будем считать малыми, так что возникающие вязкие силы малы по сравнению с упругими. Скорости  $\dot{u}$  и  $\dot{v}$  в стационарном режиме вычисляются согласно формулам  $\dot{u} = -Vu'r^{-1}$ ,  $\dot{v} = -Vv'r^{-1}$ , где штрих означает дифференцирование по  $\varphi$ . Стационарный режим при наличии диссипативных сил возможен, если по оси  $x$  на диск действует постоянная сила  $F_1 e_x$ . Малость диссипативных сил означает выполнение неравенств  $d_1 V |v'| \ll rc_1 |v|$ ,  $d_2 V |u'| \ll rc_2 |u|$ . Диссипативные силы исказят стационарную форму деформированного кольца, но, учитывая их малость, это искажение будет незначительным и при подсчете мощности диссипативных сил в первом приближении можно воспользоваться найденной в консервативном случае формой кольца. Равенство нулю суммы мощностей диссипативных сил и внешней активной силы  $F_1 e_x$  принимает вид

$$F_1 V = \frac{2V^2}{r^2} \int_0^{\pi} (d_1 v^2 + d_2 u^2) d\varphi \quad (3.1)$$

Вычислим интеграл в правой части (3.1) и найдем силу сопротивления качению  $F_c = -F_1$ . Прежде всего заметим, что на интервале  $[\varphi_1, \pi]$  (зона контакта)  $u(\varphi) = u(\varphi_1)$  и согласно (1.1)  $v'(\varphi) = -u(\varphi_1)$ . Таким образом, сила сопротивления определяется формулой

$$\begin{aligned} F_c = \frac{2V\delta^2}{\Delta^2} \{ & d_1 \int_0^{\varphi_1} [(\alpha + i\beta) \operatorname{sh}(\alpha - i\beta) \varphi_1 \operatorname{ch}(\alpha + i\beta) \varphi - \\ & - (\alpha - i\beta) \operatorname{sh}(\alpha + i\beta) \varphi_1 \operatorname{ch}(\alpha - i\beta) \varphi]^2 d\varphi + \delta d_1 [(\alpha + i\beta) \times \\ & \times \operatorname{sh}(\alpha - i\beta) \varphi_1 \operatorname{ch}(\alpha + i\beta) \varphi_1 - (\alpha - i\beta) \operatorname{sh}(\alpha + i\beta) \varphi_1 \operatorname{ch}(\alpha - i\beta) \varphi_1]^2 + \\ & + d_2 \int_0^{\varphi_1} [(\alpha + i\beta)^2 \operatorname{sh}(\alpha - i\beta) \varphi_1 \operatorname{sh}(\alpha + i\beta) \varphi - \\ & - (\alpha - i\beta)^2 \operatorname{sh}(\alpha + i\beta) \varphi_1 \operatorname{sh}(\alpha - i\beta) \varphi]^2 d\varphi \} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Учитывая малость угла  $\delta$ , заменим в выражении (3.2) угол  $\varphi_1$  на  $\pi$ , пренебрежем

членом пропорциональным  $\delta^3$  и получим приближенное выражение для силы сопротивления

$$F_c \approx \frac{VP^2}{\Delta^2 c_2^2 a^2 r^2} (d_1 J_1 + d_2 J_2)$$

$$J_1 = \int_0^\pi [(\alpha + i\beta) \operatorname{sh}(\alpha - i\beta) \pi \operatorname{ch}(\alpha + i\beta) \varphi - (\alpha - i\beta) \operatorname{sh}(\alpha + i\beta) \pi \times \\ \times \operatorname{ch}(\alpha - i\beta) \varphi]^2 d\varphi \quad (3.3)$$

$$J_2 = \int_0^\pi [(\alpha + i\beta)^2 \operatorname{sh}(\alpha - i\beta) \pi \operatorname{sh}(\alpha + i\beta) \varphi - (\alpha - i\beta)^2 \operatorname{sh}(\alpha + i\beta) \pi \times \\ \times \operatorname{sh}(\alpha - i\beta) \varphi]^2 d\varphi$$

Вычисление интегралов  $J_1$  и  $J_2$  представляет собой не сложную, хотя и громоздкую задачу. Заметим, что  $J_1 < 0$  и  $J_2 < 0$ . Из формулы (3.3) следует, что сила сопротивления качению прямо пропорциональна скорости, квадрату нагрузки и обратно пропорциональна квадрату давления в пневматике и квадрату радиуса колеса, хотя зависимость от двух последних параметров более сложная, так как от них зависят величины  $\Delta$ ,  $J_1$  и  $J_2$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иллинский А. Ю. Трение качения/ПММ. 1938. Т. 2. Вып. 2. С. 245—260.
2. Келдыш М. В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси//Тр. ЦАГИ. № 564. 1945. 32 с.
3. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили, самолеты, висячие мосты. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959. 287 с.
4. Чудаков Е. А. Качение автомобильного колеса. М.: 1947.
5. Немарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
6. Smily R. F. Correlation, evaluation and extension of linearized theories for motion and wheel shimmy//National Advisory Committee for Aeronautics. No. 1299. 1957. 48 p.
7. Левин М. А., Фуфаев Н. А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989.

Москва

Поступила в редакцию  
20.XII.1991