МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1993

УДК 539.375

© 1993 г. Д. А. ПОЖАРСКИЙ

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЕ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕННОМ КЛИНЕ

Получено интегральное уравнение задачи об упругом равновесии пространственного клина, ослабленного плоской трещиной, которая расположена в срединной полуплоскости клина, при разных граничных условиях на гранях клина. К берегам трещины приложена нормальная нагрузка, симметричная относительно плоскости трещины. Ранее подобные задачи в трехмерной постановке для полуограниченных тел рассматривались для упругого полупространства [1—4], четвертьпространства [5] и слоя [1], когда возможно применение двумерного интегрального преобразования Фурье. В случае пространственного клина при помощи интегрального преобразования Фурье — Конторовича — Лебедева в комплексной плоскости [6] удается получить точное решение задачи о действии сосредоточенного нормального усилия на грань клина [7], которое используется в данной работе при выводе интегрального уравнения. Для эллиптической трещины построено асимптотическое решение этого уравнения в простом виде, удобном для практического применения, эффективное при достаточной удаленности области трещины от ребра клина.

1. Постановка задачи и вывод интегральных уравнений. Рассмотрим упругий пространственный клин угла раствора 2α $(0 < \alpha \leq \pi)$ в цилиндрической системе координат r, φ, z, направив ось z по ребру клина. В срединной полуплоскости клина $\varphi = 0$ имеется трещина, занимающая область Ω. Трещина находится в раскрытом состоянии под действием нагрузки $\sigma_\varphi = -q(r, z)$, $\varphi = \pm 0$, $(r, z) \in \Omega$. Предполагается, что грани клина либо свободны от напряжений (задача *а*), либо лежат без трения на жестком основании (скользящая заделка, задача *б*), или жестко защемлены (задача *в*). Требуется найти форму раскрытия трещины $u_\varphi = f(r, z)$, $\varphi = \pm 0$, $(r, z) \in \Omega$, затем может быть определен коэффициент интенсивности нормальных напряжений. В дальнейшем в силу симметрии задачи по φ будем изучать лишь область $0 \leq \varphi \leq \alpha$, граничные условия в которой можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\varphi = 0:\ \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0;\ u_\varphi = 0,\ (r, z) \notin \Omega \\
&\qquad \sigma_\varphi = -q(r, z),\ (r, z) \in \Omega \\
&\varphi = \alpha:\ \sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0 \quad (а) \\
&\qquad u_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0 \quad (б) \\
&\qquad u_r = u_\varphi = u_z = 0 \quad (в)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Для простоты допустим, что $q(r, z) = q(r, -z)$, и область Ω симметрична относительно полуоси $z = 0$ (при $\varphi = 0$). При помощи методики, развитой в [7], получим точные формулы, выражающие перемещение u_φ грани $\varphi = 0$ клина угла раствора α через нормальную нагрузку $\sigma_\varphi = -q(r, z)$, $(r, z) \in \Omega$, действующую

[1] *Сметанин Б. И.* О двух новых методах решения некоторых смешанных задач теории упругости. Ростов н/Д., 1984. 22 с. Деп. в ВИНИТИ 18.04.84 № 2418—84 Деп.

на этой грани. Эти формулы имеют вид интеграла Фурье — Конторовича — Лебедева от операторного ряда Неймана по степеням $(1-2\nu)$, где ν — коэффициент Пуассона, (задачи *б*, *в*) или от суммы двух таких рядов (задача *а*). Там же [7] определены радиусы равномерной в $C_M(0, \infty)$ сходимости этих рядов по ν в зависимости от α и граничного условия при $\varphi = \alpha$, которые охватывают практически все важные значения коэффициента Пуассона $0 \le \nu_* (\alpha) \le \nu \le 1/2$. Применяя обратное интегральное преобразование Фурье — Конторовича — Лебедева и обращая операторные ряды для задач *б*, *в*, придем в итоге к следующим интегральным уравнениям относительно искомого перемещения $f(r, z)$, $(r, z) \in \Omega$ (G — модуль сдвига):

$$-\frac{1}{2\pi} \Delta_{rz} \iint_{\Omega} \frac{f(x, y)}{R} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Omega} f(x, y)\, F_m(x, y, r, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1-\nu}{G} q(r, z) \tag{1.2}$$

$$\Delta_{rz} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad R = [(x-r)^2 + (y-z)^2]^{1/2}, \quad (r, z) \in \Omega$$

$$F_m(x, y, r, z) = \frac{2}{\pi^3 r x} \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{sh} \pi u K_{iu}(\beta r) \cos\beta (z-y) \Big[u^2 (W_m^{-1}(u) - \tag{1.3}$$

$$- \operatorname{cth} \pi u) K_{iu}(\beta x) - \frac{u}{\operatorname{ch} \pi u/2} T_m^u \Big\{ \frac{s}{W_m(s)} \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2} K_{is}(\beta x) \Big\}\Big] \mathrm{d}\beta\, \mathrm{d}u$$

$$W_2(u) = (\operatorname{ch} 2\alpha u - \cos 2\alpha)/(\operatorname{sh} 2\alpha u + u \sin 2\alpha)$$

$$W_3(u) = \frac{\varkappa \operatorname{sh} 2\alpha u - u \sin 2\alpha}{\varkappa \operatorname{ch} 2\alpha u + u^2 (1 - \cos 2\alpha) + (1 + \varkappa^2)/2}, \quad \varkappa = 3 - 4\nu$$

$$T_m^u := (1 - 2\nu) A_m^u \; (m = 2, 3), \quad A_m^u \{f(s)\} = \int_0^\infty L_m(u, s) f(s)\, \mathrm{d}s$$

$$L_m(u, s) = 2 \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi s}{2} W_m(s) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \pi t g_m(t)\, \mathrm{d}t}{(\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi u)(\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi s)}$$

$$g_2(t) = (\sin^2 2\alpha \operatorname{cth} 2\alpha t)/(\operatorname{ch} 2\alpha t - \cos 4\alpha) \tag{1.4}$$

$$g_3(t) = -\frac{\sin^2 2\alpha \operatorname{th} \alpha t}{\operatorname{ch} 2\alpha t + \cos 4\alpha} + \sin^2\alpha \{f_1(t) [2 f_2(t) - t f_3(t)] -$$

$$- f_4(t) [2 f_3(t) + t f_2(t)]\}/f_5(t) - 2(1-\nu) \sin\alpha \{f_1(t) (\sin 3\alpha -$$

$$- \sin\alpha \operatorname{ch} 2\alpha t) - f_4(t) \cos\alpha \operatorname{sh} 2\alpha t\}/f_5(t)$$

$$f_1(t) = \varkappa \operatorname{sh} 2\alpha t \cos 2\alpha - t \sin 2\alpha, \quad f_2(t) = \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha - \operatorname{ch} 2\alpha t$$

$$f_3(t) = \sin 2\alpha \operatorname{th} \alpha t (1 + \cos 2\alpha), \quad f_4(t) = \sin 2\alpha (\varkappa \operatorname{ch} 2\alpha t - 1)$$

$$f_5(t) = [f_1^2(t) + f_4^2(t)] (\operatorname{sh}^2 \alpha t + \cos^2 2\alpha)$$

где $m = 2$ для задачи *б* и $m = 3$ для задачи *в*.

В ядре интегрального уравнения (1.2) учтено значение интеграла [8, 9]:

$$\frac{4}{\pi^2 r x} \int_0^\infty \int_0^\infty u^2 \operatorname{ch} \pi u K_{iu}(\beta r) K_{iu}(\beta x) \cos\beta (z-y)\, d\beta du = -\Delta_{rz} \Big(\frac{1}{R}\Big) \tag{1.5}$$

При выводе интегрального уравнения (1.2) (задачи *б*, *в*) приходится обращать ряд Неймана (I — тождественный оператор):

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}((1-2\nu)A_m^u)^n\right\}^{-1} = I-(1-2\nu)A_m^u \quad (m=2,3) \tag{1.6}$$

В случае задачи *а* используем другой способ вывода интегрального уравнения, поскольку в отличие от (1.6) тут требуется обратить сумму двух рядов Неймана. Именно, рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\varphi=\alpha:\quad \tau_{r\varphi}=\tau_{\varphi z}=0,\ u_\varphi=\delta(r-x)\,\delta(|z|-y) \tag{1.7}$$

$$\varphi=-\alpha:\ \tau_{r\varphi}=\tau_{\varphi z}=\sigma_\varphi=0$$

При помощи интегрального преобразования Фурье — Конторовича — Лебедева в комплексной плоскости получено точное решение задачи (1.7), подобно тому, как это сделано для задач о действии сосредоточенных сил на грань клина (см. [6, 7]). Оказывается, решение задачи (1.7) сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, ядро которого полностью совпадает с ядром интегрального уравнения (2) для задачи *б* из [7]. В [7] доказано, что по крайней мере при $\nu > 0{,}053$ для решения этого уравнения в $C_M(0,\infty)$ применим метод последовательных приближений. Выразив напряжение σ_φ при $\varphi=\alpha$ через решение этого интегрального уравнения Фредгольма второго рода и удовлетворив затем соответствующему граничному условию (1.1), получим интегральное уравнение (1.2) при $m=1$ для задачи *а*, где

$$F_1(x,y,r,z)=\frac{2}{\pi^3}\int_0^\infty\int_0^\infty \operatorname{sh}\pi u K_{iu}(\beta r)\cos\beta(z-y)\left\{\left[\frac{u^2}{rx}(W_1^{-1}(u)-\right.\right.$$

$$\left.-\operatorname{cth}\pi u)-(1-2\nu)\beta^2 g_2(u)\right]K_{iu}(\beta x)+\frac{u}{2rx}W_*(u)\frac{\Phi(u)}{\operatorname{ch}\pi u/2}+ \tag{1.8}$$

$$\left.+\frac{(1-2\nu)\beta}{x}g_*(u)\int_0^\infty\frac{W_*(t)\,t\operatorname{sh}\pi t K_{it}(\beta x)-W_2(t)\operatorname{sh}\pi t/2\Phi(t)}{\operatorname{ch}\pi t+\operatorname{ch}\pi u}dt\right\}d\beta du$$

Здесь функция $\Phi(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\Phi(u)-(1-2\nu)\int_0^\infty L_2(u,s)\Phi(s)\,ds=-2(1-2\nu)\int_0^\infty L_2(u,s)\,s\operatorname{ch}\frac{\pi s}{2}\times \tag{1.9}$$

$$\times\frac{W_*(s)}{W_2(s)}K_{is}(\beta x)\,ds+2(1-2\nu)\beta x\operatorname{ch}\frac{\pi u}{2}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}\pi s g_*(s)}{\operatorname{ch}\pi u+\operatorname{ch}\pi s}K_{is}(\beta x)\,ds\ (0<u<\infty)$$

$$W_1(u)=\frac{\operatorname{sh}2\alpha u+u\sin 2\alpha}{2(\operatorname{sh}^2\alpha u-u^2\sin^2\alpha)},\ W_*(u)=2\frac{\operatorname{sh}\alpha u\cos\alpha+u\operatorname{ch}\alpha u\sin\alpha}{\operatorname{sh}2\alpha u+u\sin 2\alpha}$$

$$g_*(u)=\frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{sh}\alpha u}\ \frac{\operatorname{ch}2\alpha u+1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ch}2\alpha u-\cos 4\alpha} \tag{1.10}$$

С учетом интеграла

$$\int_0^\infty\frac{u\operatorname{sh}\pi u}{\operatorname{ch}\pi u+\operatorname{ch}\pi y}K_{iu}(\beta r)\,du=\beta r K_{iy}(\beta r)$$

упростим выражения (1.3) для функций $F_m(x,y,r,z)$ при $m=2,\ 3$:

$$F_m(x,y,r,z)=\frac{2}{\pi^3}\int_0^\infty\int_0^\infty\operatorname{sh}\pi u\left[\frac{u^2}{rx}(W_m^{-1}(u)-\operatorname{cth}\pi u)-\right. \tag{1.11}$$

$$\left.-(1-2\nu)\beta^2 g_m(u)\right]K_{iu}(\beta x)K_{iu}(\beta r)\cos\beta(z-y)\,d\beta du$$

При $\alpha = \pi$ в случае задачи *б* интегральное уравнение (1.2) переходит в известное интегральное уравнение задачи о трещине в бесконечном упругом теле [10]. Используя интеграл [8, 9]:

$$\frac{4}{\pi^2 rx}\int_0^\infty\int_0^\infty u^2 K_{iu}(\beta x)\, K_{iu}(\beta r)\cos\beta(z-y)\, d\beta du = \frac{1}{R_+^3}$$

$$R_+ = [(x+r)^2 + (y-z)^2]^{1/2} \tag{1.12}$$

найдем, что при $\alpha = \pi/2$ (задача *б*) интегральное уравнение (1.2) принимает вид

$$-\frac{1}{2\pi}\Delta_{rz}\iint_\Omega f(x, y)\left\{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_+}\right\} dxdy = \frac{1-\nu}{G} q(r, z), \ (r, z)\in\Omega \tag{1.13}$$

соответствующий симметричной задаче о двух одинаковых трещинах в упругом пространстве [5].

В случае задачи *а* при $\alpha = \pi/2$ (полупространство) функция $L_2(u, s) \equiv 0$ и ряд Неймана, представляющий при $\nu > 0{,}053$ решение интегрального уравнения (1.9), содержит только одно слагаемое. Следовательно, при $\alpha = \pi/2$:

$$F_1(x, y, r, z) = -\frac{2}{\pi^3 rx}\int_0^\infty\int_0^\infty (u^2 + 2u^4)\, K_{iu}(\beta x)\, K_{iu}(\beta r)\cos\beta(z-y)\, d\beta du +$$

$$+\frac{8(1-2\nu)}{\pi^3}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}{}^1\!/_2\pi u\,\operatorname{ch}{}^1\!/_2\pi y}{\operatorname{ch}\pi u + \operatorname{ch}\pi y}\left(\frac{u^2}{r} + \frac{y^2}{x}\right) K_{iu}(\beta r)\, K_{iy}(\beta x)\,\beta\,\times \tag{1.14}$$

$$\times\cos\beta(z-y)\, d\beta du dy - \frac{16(1-2\nu)^2}{\pi^3}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}{}^1\!/_2\pi u\,\operatorname{ch}{}^1\!/_2\pi y\,\operatorname{ch}^2{}^1\!/_2\pi t}{(\operatorname{ch}\pi t + \operatorname{ch}\pi u)(\operatorname{ch}\pi t + \operatorname{ch}\pi y)}\times$$

$$\times K_{iu}(\beta r)\, K_{iy}(\beta x)\,\beta^2\cos\beta(z-y)\, d\beta dt du dy$$

Все квадратуры в формуле (1.14) могут быть выполнены. Учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}{}^1\!/_2\pi u\,\operatorname{ch}{}^1\!/_2\pi y}{\operatorname{ch}\pi u + \operatorname{ch}\pi y} K_{iy}(\beta x)\, dy = \frac{\beta}{2}\int_x^\infty K_{iu}(\beta x)\, dx$$

окончательно получим при $\alpha = \pi/2$ [8, 9, 11]:

$$F_1(x, y, r, z) = \frac{1}{2\pi}\left\{-\frac{18rx}{R_+^5} + \frac{1-2\nu}{(z-y)^4}\frac{12(r+x)}{R_+^5}\left[R_+^5 - (r+x)^5 -\right.\right.$$

$$\left.-\frac{5}{2}(r+x)^3(z-y)^2\right] + \frac{1-8(1-2\nu)}{R_+^5}(z-y)^2 + \frac{1-20(1-2\nu)}{R_+^5}(r+x)^2 -$$

$$\left.-\frac{3}{2}\frac{(1-2\nu)^2}{R_+^5}(r+x)\left[(r+x) - (z-y)^2\frac{8R_+^2 + 9(r+x)R_+ + 3(r+x)^2}{(R_+ + r + x)^3}\right]\right\} \tag{1.15}$$

Сравним выражение (1.15) с формулой (1.4) для $k_2(\eta, z, \zeta)$ из [1]. Исправляя очевидную опечатку во втором слагаемом в выражении для $k_2(\eta, z, \zeta)$ в знаменателе, где должно быть $\lambda + 2\mu$ вместо $\lambda + \mu$, и учитывая, что (λ, μ — постоянные Ламе):

$$\frac{9(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} = \frac{18}{4(1-\nu)},\ \frac{6\mu}{\lambda+2\mu} = \frac{12(1-2\nu)}{4(1-\nu)},\ \frac{\lambda-7\mu}{2(\lambda+2\mu)} = \frac{1-8(1-2\nu)}{4(1-\nu)}$$

$$\frac{\lambda^2 - 18\lambda\mu - 43\mu^2}{2(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)} = \frac{1 - 20(1 - 2\nu)}{4(1 - \nu)} - \frac{24(1 - 2\nu)^2}{4(1 - \nu)}$$

убедимся в полном совпадении (с поправкой на коэффициент) членов при $(1 - 2\nu)$ в нулевой и в первой степени в (1.15) и в $k_2(\eta, z, \zeta)$ [1]. Отличие же членов при $(1 - 2\nu)^2$ может объясняться неверно выполненной квадратурой в [1].

Отметим также, что если Ω — полоса, границы которой параллельны ребру клина и $q(r, z)$ не зависит от z, то уравнение (1.2) преобразуется к интегральному уравнению соответствующей плоской задачи для клина [12].

Лемма 1. Функция $F_1(x, y, r, z)$ удовлетворяет соотношению

$$F_1(x, y, r, z) = F_1(r, y, x, z) \tag{1.16}$$

Если для задач *б*, *в* соотношения, аналогичные (1.16), очевидны, то для задачи *а* оно устанавливается путем анализа каждого члена ряда Неймана, служащего решением уравнения (1.9), при помощи перестановок интегралов и замен переменных интегрирования.

2. Асимптотический метод решения интегрального уравнения (1.2). Предположим, что область Ω, занимаемая трещиной — эллипс $(r - a)^2/c^2 + z^2/b^2 \le 1$, $a > c$, $b \ge c$. Введем следующие безразмерные величины и обозначения (штрихи далее опускаем):

$$br' = r - a,\ bx' = x - a,\ bz' = z,\ by' = y,\ bR' = R,\ bc' = c$$

$$\lambda = a/b,\ Gq'(x', y') = (1 - \nu)\, q(x, y),\ bf'(x', y') = f(x, y)$$

$$b^3 F_m(x, y, r, z) = F_m'(x', y', r', z'),\ \Omega': r'^2/c'^2 + z'^2 \le 1 \tag{2.1}$$

Безразмерный параметр λ характеризует относительную удаленность эллипса Ω от ребра клина. Запишем интегральное уравнение (1.2) в новых обозначениях (2.1) и применим для его решения асимптотический метод «больших λ» [1, 2, 13], границы эффективности которого по λ в зависимости от α очерчиваются в формулируемой ниже лемме.

Лемма 2. Функция $F_m(x, y, r, z)$ непрерывна со всеми производными при $(x, y), (r, z) \in \Omega$. При $\lambda > 1 + c\ (1 \le \alpha \le \pi)$, $\lambda > \alpha^{-1} + c\ (c/2 \le \alpha \le 1)$, $\lambda > (1 + c^2(1 + \alpha^2))^{1/2}\alpha^{-1}\ (0 < \alpha \le c/2)$ функция $F_m(x, y, r, z)$, $(x, y), (r, z) \in \Omega$ представима абсолютно сходящимся рядом

$$F_m(x, y, r, z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{f_n^m(x, y, r, z)}{\lambda^n} \quad (m = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

где $f_n^m(x, y, r, z)$ — некоторые полиномы.

Разложение (2.2) получается почленным интегрированием функционального ряда Неймана в выражении для $F_1(x, y, r, z)$, а также с использованием при $m = 1, 2, 3$ известных интегралов и представлений [8, 9]:

$$\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) \cos\beta(z - y)\, d\beta = \frac{1}{\sqrt{xr}\,\operatorname{ch}\pi u} P_{iu - 1/2}\left(1 + \frac{R^2}{2rx}\right)$$

$$P_{iu - 1/2}(1 + \theta^2) = F(1/2 - iu, 1/2 + iu, 1; -1/2\theta^2) \tag{2.3}$$

$$x\int_0^\infty K_{iu}(\beta x) K_{iy}(\beta x) \cos\beta(z - y)\, d\beta = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{z - y}{x}\right)^{2n} \frac{\pi^2}{2^{2n+1}} \times$$

$$\times \frac{1}{[(2n)!]^2(\operatorname{ch}\pi u + \operatorname{ch}\pi y)} \times$$

$$\times \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \prod_{k=0}^{n-1}[(1 + 2k)^2 + (u + y)^2][(1 + 2k)^2 + (u - y)^2], & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

и им подобных. В формулах (2.3) $F(a, b, c; x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, разлагающаяся в ряд, $|(z-y)/x| < 2$. Слагаемые, в которых r или x стоят в знаменателе, раскладываются в ряд Тейлора по степеням r/λ или x/λ. Поскольку при указанных в лемме 2 λ все ряды сходятся абсолютно, они сходятся при любом порядке суммирования и их можно перегруппировать к виду (2.2). При этом легко определяется явный вид функций $f_n^m(x, y, r, z)$ $(n=3, 4, \ldots)$.

Разыскивая теперь решение интегрального уравнения (1.2), (2.1) в форме

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x, y)}{\lambda^n} \tag{2.4}$$

подставляя (2.2), (2.4) в (1.2), (2.1) и приравнивая члены при одинаковых степенях λ, получим бесконечную цепочку интегральных уравнений относительно $f_n(x, y)$ $(n=0, 1, \ldots)$. Ограничиваясь в разложении (2.4) членами до $O(\lambda^{-5})$, получим

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2\pi}\Delta_{rz}\iint_{\Omega}\frac{f_0(x, y)}{R}\,dxdy = -q(r, z), \quad \frac{1}{2\pi}\Delta_{rz}\iint_{\Omega}\frac{f_{1,2}(x, y)}{R}\,dxdy = 0 \\
\frac{1}{2\pi}\Delta_{rz}\iint_{\Omega}\frac{f_3(x, y)}{R}\,\mathrm{dxdy} = \frac{a_0-(1-2\nu)\varkappa_1}{2\pi}\iint_{\Omega} f_0(x, y)\,dxdy \\
\frac{1}{2\pi}\Delta_{rz}\iint_{\Omega}\frac{f_4(x, y)}{R}\,\mathrm{dxdy} = \frac{a_0-(1-2\nu)\varkappa_1}{2\pi}\iint_{\Omega} f_1(x, y)\,dxdy - \\
-\frac{3}{4\pi}(a_0-(1-2\nu)\varkappa_1)\iint_{\Omega} f_0(x, y)(x+r)\,dxdy, \ (r, z)\in\Omega
\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$a_0 = \int_0^{\infty} u^2(\operatorname{th}\pi u W_m^{-1}(u) - 1)\,du \quad (m = 1, 2, 3) \tag{2.6}$$

$$\varkappa_1 = \int_0^{\infty} \operatorname{th}\pi u g_m(u)\left(\frac{1}{4}+u^2\right)\frac{du}{2} \quad (m = 2, 3)$$

$$\begin{gathered}
\varkappa_1 = \int_0^{\infty} \operatorname{th}\pi u g_2(u)\left(\frac{1}{4}+u^2\right)\frac{du}{2} - \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\pi u g_*(u)\, t\operatorname{sh}\pi t}{\operatorname{ch}\pi u+\operatorname{ch}\pi t}W_*(t)\times \\
\times J_2(u, t)\,dudt - \int_0^{\infty} u\operatorname{sh}\frac{\pi u}{2}W_*(u)\Phi_1(u)\,du + \\
+(1-2\nu)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\pi u g_*(u)\operatorname{sh}\frac{1}{2}\pi t}{\operatorname{ch}\pi u+\operatorname{ch}\pi t}W_2(t)\Phi_2(t)\,dudt \quad (m = 1)
\end{gathered}$$

Здесь функции $\Phi_{1,2}(u)$ при $u = u_n$ (u_n — узел под номером n квадратурной формулы Гаусса, используемой при вычислении $\varkappa_1$) определяются из интегральных уравнений Фредгольма второго рода (ср. с (1.9)):

$$\begin{gathered}
\Phi_{1,2}(a) - (1-2\nu)\int_0^{\infty} L_2(a, y)\Phi_{1,2}(y)\,dy = X_{1,2}(a, u_n), \ 0 < a < \infty \\
X_k(a, u_n) = 2\operatorname{ch}\frac{\pi a}{2}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\pi y g_*(y)}{\operatorname{ch}\pi a+\operatorname{ch}\pi y}s_k J_{k+1}(u_n, y)\,dy -
\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$-2\int_0^\infty L_2(a, y)\, y \operatorname{ch}\frac{\pi y}{2}\frac{W_*(y)}{W_2(y)} J_k(u_n, y)\, dy\, (k = 1, 2),\ s_1 = 1,\ s_2 = 2$$

В (2.6), (2.7) функции $J_k(u, y)$ являются квадратурами вида

$$J_k(u, y) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\cos us \cos yt}{(\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} t)^k}\, ds dt,\quad J_1(u, y) = \frac{2}{\operatorname{ch}\pi u + \operatorname{ch}\pi y}$$

$$J_2(u, y) = \frac{u^2 - y^2}{\operatorname{ch}\pi u - \operatorname{ch}\pi y},\quad J_3(u, y) = \frac{(1 + (u + y)^2)(1 + (u - y)^2)}{8(\operatorname{ch}\pi u + \operatorname{ch}\pi y)} \tag{2.8}$$

При численном решении уравнений (2.7) удобным представляется метод механических квадратур с привлечением квадратурной формулы Гаусса. Ниже приведены значения постоянных $A = a_0 - (1 - 2\nu)\varkappa_1$, входящих в правые части третьего и четвертого уравнения (2.5) для задач *а*, *б*, *в* при $\nu = 0{,}3$, $\alpha = \pi k/8$ $(k = 1, 2, \ldots, 7)$.

k	1	2	3	4	5	6	7
а	—65,5	—6,75	—1,43	—0,369	—0,132	—0,0608	—0,0377
б	29,0	1,61	—0,0197	—0,125	—0,104	—0,0552	—0,0177
в	58,5	5,61	1,15	0,294	0,0913	0,0281	$9{,}74 \cdot 10^{-3}$

Решение интегральных уравнений (2.5) основано на следующем факте [1].

Лемма 3. Если $q(r, z)$ — полином степени n, то решение первого уравнения (2.5) для эллиптической области Ω, ограниченное на $\partial\Omega$, имеет вид

$$f_0(x, y) = (1 - x^2/c^2 - y^2)^{1/2} F(x, y) \tag{2.9}$$

где $F(x, y)$ — полином степени n.

Связь между коэффициентами полиномов $q(r, z)$ и $F(x, y)$ может быть установлена по схеме, изложенной в [13].

Рассмотрим случай, когда $q(r, z) = q = \text{const}$. Решая последовательно уравнения (2.5) с учетом леммы 3, найдем

$$f(x, y) = \frac{cq}{E(\sqrt{1 - c^2})}\left\{1 - \frac{Ac^2}{2\lambda^3}\left[\frac{2}{3E(\sqrt{1 - c^2})} - \frac{(1 - c^2)x}{\lambda D(\sqrt{1 - c^2})}\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right)\right\} \tag{2.10}$$

$$D(\sqrt{1 - c^2}) = (2 - c^2)E(\sqrt{1 - c^2}) - c^2 K(\sqrt{1 - c^2})$$

где $K(\sqrt{1 - c^2})$, $E(\sqrt{1 - c^2})$ — полные эллиптические интегралы.

Из (2.10) получим формулу для отношения коэффициентов интенсивности нормальных напряжений для рассматриваемого случая и для случая трещины в пространстве $(\lambda = \infty)$ [5, 10]:

$$\frac{K_I}{K_I^\infty} = 1 - \frac{Ac^2}{2\lambda^3}\left[\frac{2}{3E(\sqrt{1 - c^2})} - \frac{(1 - c^2)\cos\varphi}{\lambda D(\sqrt{1 - c^2})}\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \tag{2.11}$$

Здесь угол φ отсчитывается от положительного направления полуоси r.

Формулы (2.10), (2.11) в точности совпадают соответственно с формулами (2.7), (2.8) при $a \le b$ из [1], если заменить постоянную A на постоянную $-c/4$ из [1] и учесть различия в других обозначениях (например, параметру ε из [1] соответствует c/λ).

Ниже даны значения величины K_I/K_I^∞, рассчитанные по формуле (2.8) из

[1], по формуле (2.11) при $\alpha = \pi/2$ для задачи *a* и полученные в [3] при $\lambda = 2$, $\nu = 0$, когда $A = -0{,}3365$, постоянная $-c/4$ из [1] при этом равна $-0{,}3125$.

c	φ	[1]	(2.11)	[3]
1	π	1,012	1,013	1,015
0,5	π	1,031	1,033	1,033
0,25	π	1,068	1,073	1,055
1	0	1,004	1,005	1,005
0,5	0	1,012	1,013	1,013
0,25	0	1,029	1,032	1,026

Автор благодарит В. М. Александрова за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сметанин Б. И., Соболь Б. В.* Растяжение упругого полупространства с трещиной, расположенной перпендикулярно к его поверхности//ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 940—943.
2. *Сметанин Б. И., Соболь Б. В.* Равновесие упругого полупространства, ослабленного системой плоских трещин//Механика сплошной среды. Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1988. С. 116—122.
3. *Nisitani A., Murakami Y.* Stress intensity factors of an elliptical crack or a semi-ellipticall crack subject to tension//Internat. J. Fract. 1974. V. 10. No. 3. P. 353—368.
4. *Abe H., Hayashi K., Enokida Y.* Stress intensity factors for a rectangular crack in a semi-infinite solid//Trans. JSME. 1982. V. 48. No. 425. P. 29—34.
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т. 2. М.: Мир, 1990. С. 453—1013.
6. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наукова думка, 1985. 278 с.
7. *Лубягин И. А., Пожарский Д. А., Чебаков М. И.* Обобщение задач Буссинеска и Черрути для случая упругого пространственного клина//Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 1. С. 58—62.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
9. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
10. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1968. 248 с.
11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
12. *Сметанин Б. И.* Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое//МТТ. Инж. журнал. 1968. № 2. С. 115—122.
13. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.

Ростов на Дону

Поступила в редакцию
13.II.1992