

УДК 539.3

© 1993 г. В. З. ПАРТОН, М. Л. ФИЛЬШТИНСКИЙ

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ
 ДЛЯ СЛОЯ И ПОЛУСЛОЯ С ТУННЕЛЬНЫМИ ПОЛОСТЯМИ

В условиях антиплоской деформации исследуется стационарный волновой процесс в пьезоэлектрическом слое и полуслое, содержащих туннельные вдоль их оснований полости достаточно произвольной конфигурации. Построены интегральные представления решений, автоматически удовлетворяющие механическим и электрическим условиям на основаниях слоя и полуслоя. Соответствующие краевые задачи сводятся к системе двух сингулярных интегральных уравнений второго рода, которая решается численно методом механических квадратур. Приводятся результаты расчетов, позволяющие оценить влияние конфигурации полости, частоты возбуждения, эффекта связанности полей на концентрацию напряжений.

1. Постановка задачи и основные соотношения. Рассмотрим отнесенный к декартовым прямоугольным координатам x_1, x_2, x_3 пьезоэлектрический слой $0 \leq x_1 \leq a$, $-\infty < x_2 < \infty$, $-\infty < x_3 < \infty$, содержащий туннельные вдоль оси x_3 полости Γ_m ($m = 1, 2, \dots, n$). Условимся считать, что материал слоя обладает гексагональной симметрией [1] (кристалл *btt*, пьезокерамика с поляризацией вдоль оси x_3).

Пусть на поверхности полостей действует гармонически изменяющаяся во времени, не зависящая от координаты x_3 сдвиговая нагрузка $X_{3n} = \text{Re} \{X_3 \exp(-i\omega t)\}$, а из бесконечности возможно излучение монохроматической волны сдвига $u_3^{(0)} = \text{Re}\{U_3^{(0)}(x_1, x_2) \exp(-i\omega t)\}$.

Предположим также, что основания слоя свободны от сил и граничат с вакуумом, а поверхность полостей Γ_m ($m = 1, 2, \dots, n$) электродирована и заземлена; кривизны контуров Γ_m и амплитуды X_3 — функции класса H [2], $\cap \Gamma_m = \emptyset$ (фиг. 1).

В указанной постановке в области Ω , занятой телом, имеют место сопряженные механические и электромагнитные поля, соответствующие антиплоской деформации.

Сформулированная граничная задача в квазистатическом приближении описывается уравнениями [3, 4]:

$$\nabla^2 u_3 - u_3/c^2 = 0, \quad \nabla^2 \Phi = 0 \tag{1.1}$$

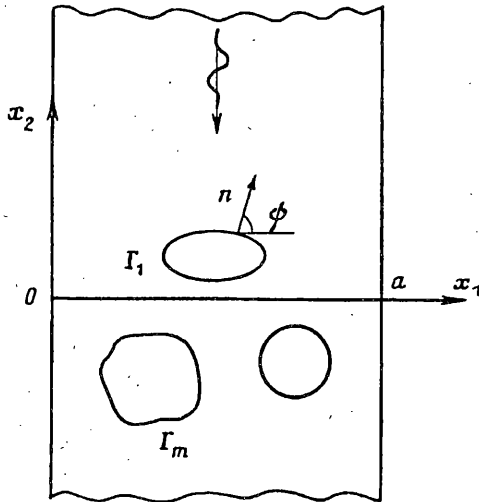
$$c^2 = c_{44}^E(1 + \kappa_0^2)/\rho, \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \partial_v = \partial/\partial x_v \quad (v = 1, 2)$$

Механические и электрические величины выражаются через функции u_3 и Φ по формулам

$$E_1 = -e_{15}/\epsilon_{11}^S \partial_1 u_3 + \partial_2 \Phi, \quad D_1 = \epsilon_{11}^S \partial_2 \Phi \tag{1.2}$$

$$E_2 = -e_{15}/\epsilon_{11}^S \partial_2 u_3 - \partial_1 \Phi, \quad D_2 = -\epsilon_{11}^S \partial_1 \Phi, \quad H_3 = \epsilon_{11}^S \partial \Phi / \partial t$$

$$\tau_{13} = c_{44}^E(1 + \kappa_0^2) \partial_1 u_3 - e_{15} \partial_2 \Phi, \quad \tau_{23} = c_{44}^E(1 + \kappa_0^2) \partial_2 u_3 + e_{15} \partial_1 \Phi \tag{1.3}$$



Фиг. 1

Здесь τ_{13} , τ_{23} и u_3 — касательные напряжения и перемещение вдоль оси x_3 ; E_1 , E_2 , H_3 и D_1 , D_2 — соответствующие компоненты напряженности электрического и магнитного полей, а также вектора электрической индукции, c_{44}^E — модуль сдвига, e_{15} — пьезоэлектрическая постоянная, ϵ_{11}^S — диэлектрическая проницаемость среды, ρ — плотность материала. Величина u_3^* представляет собой перемещение, обусловленное наличием в теле полостей. Полагая

$$u_3 = \operatorname{Re}\{U_3(x_1, x_2)e^{-i\omega t}\}, \quad \Phi = \operatorname{Re}\{F(x_1, x_2)e^{-i\omega t}\}$$

$$U_3 = U_3^{(0)} + U_3^*, \quad U_3^{(0)} = \tau e^{-\gamma_2 x_2}, \quad \gamma_2 = \omega/c$$

представим граничные условия на поверхностях Γ_m с учетом (1.2), (1.3) в виде

$$c_{44}^E(1 + \chi_0^2) \left(e^{i\psi} \frac{\partial U_3}{\partial z} + e^{-i\psi} \frac{\partial U_3}{\partial \bar{z}} \right) - ie_{15} \left(e^{i\psi} \frac{\partial F}{\partial z} - e^{-i\psi} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right) = X_3$$

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2 \quad (1.4)$$

$$\frac{ie_{15}}{\epsilon_{11}^S} \left(e^{i\psi} \frac{\partial U_3}{\partial z} - e^{-i\psi} \frac{\partial U_3}{\partial \bar{z}} \right) + e^{i\psi} \frac{\partial F}{\partial z} + e^{-i\psi} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$$

$$\partial/\partial z = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \partial/\partial \bar{z} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$$

Здесь под производными $\partial U_3/\partial z$, $\partial U_3/\partial \bar{z}$, $\partial F/\partial z$, $\partial F/\partial \bar{z}$ понимаются их предельные значения при $z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma = \bigcup \Gamma_m$ из области Ω ; ψ — угол между внешней нормалью к контуру полости и осью ox_1 . Последнее условие в (1.4) означает равенство нулю касательной компоненты вектора напряженности электрического поля на поверхности Γ .

2. Функции Грина для пьезоэлектрического слоя. Краевые задачи, записанные в амплитудах, имеют вид

$$\nabla^2 U_3 + \gamma_2^2 U_3 = 0, \quad \partial_1 U_3 = 0 \quad (x_1 = 0; a) \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 F = 0, \quad \partial_2 F = 0 \quad (x_1 = 0; a) \quad (2.2)$$

Функции Грина, соответствующие задачам (2.1), (2.2), разыскиваем в виде

$$G(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x_2 - \xi_2) \cos \alpha_k \xi_1 \cos \alpha_k x_1 \quad (2.3)$$

$$E(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(x_2 - \xi_2) \sin \alpha_k \xi_1 \sin \alpha_k x_1$$

$$\nabla^2 G + \gamma_2^2 G = \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2), \quad \alpha_k = \pi k/a$$

$$\nabla^2 E = \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2), \quad \delta(x, y) = \delta(x)\delta(y)$$

где $\delta(x) - 2a$ — периодическая дельта-функция Дирака, (ξ_1, ξ_2) — точка приложения сосредоточенного функционала.

Используя разложения дельта-функции в соответствующие ряды, разделяя в уравнениях (2.1), (2.2) переменные и применяя затем преобразование Фурье в классе D' функций медленного роста [5], находим

$$b_k = -\frac{1}{a\lambda_k} \exp(-\lambda_k |x_2 - \xi_2|), \quad b_0 = \frac{1}{2ia\gamma_2} \exp(i\gamma_2 |x_2 - \xi_2|) \quad (2.4)$$

$$d_k = -\frac{1}{a\alpha_k} \exp(-\alpha_k |x_2 - \xi_2|) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\lambda_k = (\alpha_k^2 - \gamma_2^2)^{1/2} \quad (\gamma_2 < \alpha_k), \quad \lambda_k = -i(\gamma_2^2 - \alpha_k^2)^{1/2} \quad (\gamma_2 > \alpha_k)$$

Ряд для функции E в (2.3) с учетом (2.4) можно просуммировать с привлечением равенства

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m|x|}}{m} \cos my = \frac{|x|}{2} - \frac{1}{2} \ln [2(\operatorname{ch} x - \cos y)] \quad (2.5)$$

Имеем

$$E(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\sin \sqrt{2}\pi(\zeta - z)/a}{\sin \sqrt{2}\pi(\zeta + \bar{z})/a} \right| \quad (2.6)$$

$$\zeta = \xi_1 + i\xi_2$$

Для выделения главной части функции G запишем функцию Грина G_0 старшего оператора в уравнении Гельмгольца (2.3). Привлекая равенство (2.5), получим

$$G_0 = -\frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x_1, \xi_1) \exp(-\alpha_m |x_2 - \xi_2|) = -\frac{|x_2 - \xi_2|}{2a} + \quad (2.7)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\zeta - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\zeta + \bar{z})}{2a} \right|, \quad a_m = \frac{\cos \alpha_m \xi_1 \cos \alpha_m x_1}{\alpha_m}$$

В силу (2.4), (2.7) представим выражение (2.3) в окончательной форме

$$G(x_1, -\xi_1, x_2 - \xi_2) = G_0 + G_1, \quad G_1 = \frac{\exp(i\gamma_2 |x_2 - \xi_2|)}{2ia\gamma_2} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_m(x_2 - \xi_2) \cos \alpha_m \xi_1 \cos \alpha_m x_1 \quad (2.8)$$

$$c_m(x_2 - \xi_2) = \frac{1}{\lambda_m} \exp(-\lambda_m |x_2 - \xi_2|) - \frac{1}{\alpha_m} \exp(-\alpha_m |x_2 - \xi_2|) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Таким образом, функции E и G , определенные в (2.6) и (2.8), представляют собой функции Грина краевых задач (2.2) и (2.1) для слоя. Условия излучения

для задачи (2.1) и затухания для задачи (2.2) выполняются. После выделения главной части в (2.3) общий член ряда в (2.8) затухает в точке $z = \zeta$ как m^{-3} .

3. Функции Грина для пьезоэлектрического полуслоя. Применяя известный метод отражения [6], построенные выше функции Грина для слоя можно обобщить на случай полуслоя ($0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 < \infty, -\infty < x_3 < \infty$). Пусть боковые основания полуслоя свободны от сил и граничат с вакуумом, а на границе $x_2 = 0$ возможны следующие типы условий:

отсутствие усилий, контакт с вакуумом

$$\tau_{23} = 0, D_2 = 0 \quad (3.1)$$

жесткое защемление, граница покрыта электродом и заземлена

$$u_3 = 0, E_1 = 0 \quad (3.2)$$

Можно показать, что функции Грина в этом случае определяются рядами (2.3), в которых коэффициенты имеют вид

$$b_k = -\frac{1}{a\lambda_k} (\exp(-\lambda_k |x_2 - \xi_2|) - A \exp(-\lambda_k(x_2 + \xi_2))) \quad (3.3)$$

$$b_0 = \frac{1}{2ia\gamma_2} (\exp(i\gamma_2 |x_2 - \xi_2|) - A \exp(i\gamma_2(x_2 + \xi_2)))$$

$$d_k = -\frac{1}{a\alpha_k} (\exp(-\alpha_k |x_2 - \xi_2|) + A \exp(-\alpha_k(x_2 + \xi_2))) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Здесь значение $A = -1$ соответствует свободному, граничащему с вакуумом полуслою, значение $A = 1$ — закрепленному и покрытому заземленным электродом вдоль границы $x_2 = 0$ полуслою. При $A = 0$ приходим к формулам (2.6), (2.8) для слоя.

Суммируя соответствующие ряды в (3.3), получим в окончательной форме

$$G^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = G(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) + \quad (3.4)$$

$$+ A \left\{ \frac{i}{2a\gamma_2} \exp(i\gamma_2(x_2 + \xi_2)) + \frac{x_2 + \xi_2}{2a} - \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\zeta + z)}{2a} \sin \frac{\pi(\zeta - \bar{z})}{2a} \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^*(x_2 + \xi_2) \cos \alpha_m \xi_1 \cos \alpha_m x_1 \right\}$$

$$E^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = E(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) + \frac{A}{2\pi} \ln \left| \frac{\sin 1/2\pi(\zeta - \bar{z})/a}{\sin 1/2\pi(\zeta + z)/a} \right|$$

$$c_m^*(x_2 + \xi_2) = \frac{1}{\lambda_m} \exp(-\lambda_m(x_2 + \xi_2)) - \frac{1}{\alpha_m} \exp(-\alpha_m(x_2 + \xi_2)) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

4. Интегральные представления решений. Перемещение U_3^* , обусловленное наличием в теле туннельных полостей Γ_m , и функцию F будем искать в виде

$$U_3^*(x_1, x_2) = \int_{\Gamma} p(\zeta) G^* ds, \quad F(x_1, x_2) = \int_{\Gamma} f(\zeta) E^* ds \quad (4.1)$$

В формулах (4.1) $p(\zeta), f(\zeta)$ представляют собой неизвестные плотности, ds — элемент дуги контура Γ , функции $G^* = G^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$, $E^* = E^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ определены в (3.4).

Подставляя предельные значения соответствующих производных при $z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$) в граничные условия (1.4), приходим к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно функций $p(\zeta)$ и $f(\zeta)$:

$$p(\zeta_0) + \int_{\Gamma} p(\zeta)g_1(\zeta, \zeta_0)ds + \int_{\Gamma} f(\zeta)g_2(\zeta, \zeta_0)ds = N_1(\zeta_0) \quad (4.2)$$

$$f(\zeta_0) + \int_{\Gamma} f(\zeta)g_3(\zeta, \zeta_0)ds + \int_{\Gamma} p(\zeta)g_4(\zeta, \zeta_0)ds = N_2(\zeta_0)$$

$$g_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2a} \operatorname{Re} \left[e^{i\psi_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2a} \right] + e^{i\psi_0} P_1 + e^{-i\psi_0} P_2$$

$$g_2(\zeta, \zeta_0) = \frac{e_{15}}{2ac_{44}^E(1 + \nu_0^2)} \operatorname{Im} g, \quad g_3(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2a} \operatorname{Re} g$$

$$g_4(\zeta, \zeta_0) = \frac{i\nu_0^2 c_{44}^E}{e_{15}} \left\{ \frac{i}{2a} \operatorname{Im} \left[e^{i\psi_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2a} \right] + e^{i\psi_0} P_1 - e^{-i\psi_0} P_2 \right\}$$

$$g = e^{i\psi_0} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2a} - \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 + \bar{\zeta})}{2a} + A \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \bar{\zeta})}{2a} - \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta + \zeta_0)}{2a} \right] \right\}$$

$$P_1 = P + S - \frac{1}{a} (A_0 - iB_0), \quad P_2 = \bar{P} - S - \frac{1}{a} (A_0 + iB_0)$$

$$P = \frac{1}{4a} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{\zeta} + \zeta_0)}{2a} - A \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta + \zeta_0)}{2a} - \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{\zeta} - \zeta_0)}{2a} \right] \right\}$$

$$S = \frac{1}{2ia} [\operatorname{sign}(\xi_2 - \xi_{20})(1 - \exp(i\gamma_2|\xi_2 - \xi_{20}|)) + A(1 - \exp(i\gamma_2(\xi_2 + \xi_{20})))]$$

$$A_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{1k}^- - A\beta_{1k}^+) \alpha_k \cos \alpha_k \xi_1 \sin \alpha_k \xi_{10}$$

$$B_0 = \sum_{k=1}^{\infty} [\operatorname{sign}(\xi_{20} - \xi_2) \beta_{0k}^- - A\beta_{0k}^+] \cos \alpha_k \xi_1 \cos \alpha_k \xi_{10}$$

$$\beta_{mk}^{\pm} = \frac{1}{\alpha_k^m} \exp(-\alpha_k |\xi_2 \pm \xi_{20}|) - \frac{1}{\lambda_k^m} \exp(-\lambda_k |\xi_2 \pm \xi_{20}|)$$

$$N_1(\zeta_0) = \frac{2X_3(\zeta_0)}{c_{44}^E(1 + \nu_0^2)} + 2i\gamma_2 \tau \sin \psi_0 (e^{-\eta_2 \xi_{20}} + A e^{\eta_2 \xi_{20}})$$

$$N_2(\zeta_0) = \frac{2ie_{15} \gamma_2 \tau}{e_{11}^S} \cos \psi_0 (e^{-\eta_2 \xi_{20}} + A e^{\eta_2 \xi_{20}})$$

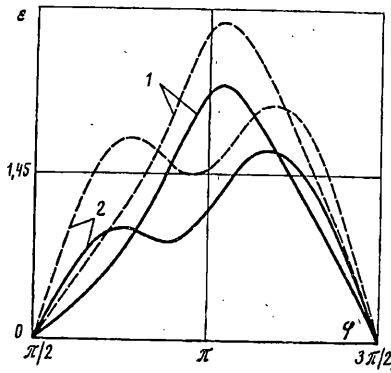
$$\psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \zeta_0 = \xi_{10} + i\xi_{20} \in \Gamma_m \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

Здесь ядра $g_2(\zeta, \zeta_0)$, $g_4(\zeta, \zeta_0)$ — сингулярные (типа Гильберта), ядра $g_1(\zeta, \zeta_0)$, $g_3(\zeta, \zeta_0)$ могут обладать не более чем слабой особенностью. Значение $A = 1$ соответствует закреплённому, а $A = -1$ — свободному вдоль границы $x_2 = 0$ полуслою; при $A = 0$ имеем слой с полостями.

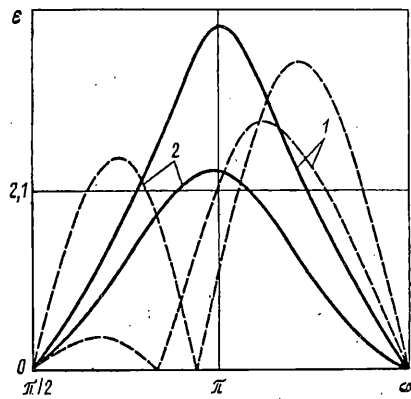
Непосредственно видно, что при $\nu_0 = 0$ система (4.2) распадается на два несвязанных уравнения относительно функции $p(\zeta)$ и $f(\zeta)$. В этом случае интегральное уравнение с плотностью $p(\zeta)$ будет соответствовать изотропному полуслою (слою) с полостями.

5. Примеры расчетов. Для определения концентрации напряжений в полуслое (слое) с полостями вычислим напряжение $\tau_s = \tau_{23} \cos \psi - \tau_{13} \sin \psi$ на поверхности Γ . Имеем

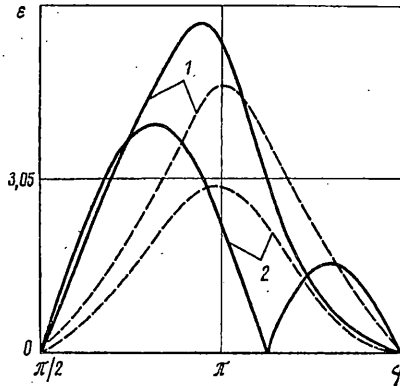
$$\tau_s = \operatorname{Re}(T e^{-i\omega t}),$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$$T = T(\xi_{10}, \xi_{20}) = ic_{44}^E(1 + \kappa_0^2) \left(e^{i\nu_0} \frac{\partial U_3}{\partial \xi_{50}} - e^{-i\nu_0} \frac{\partial U_3}{\partial \xi_{50}} \right) + e_{15} \left(e^{i\nu_0} \frac{\partial F}{\partial \xi_{50}} + e^{-i\nu_0} \frac{\partial F}{\partial \xi_{50}} \right), \quad (5.1)$$

$$\zeta_0 = \xi_{10} + i\xi_{20} \in \Gamma_m \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

Здесь под частными производными от соответствующих величин понимаются их предельные значения при $z \rightarrow \zeta_0$ из области Ω .

Формулу (5.1) удобно представить в ином виде, исключив из нее члены, содержащие функцию F . Привлекая второе граничное условие (1.4) и интегральные представления производных $\partial U_3^*/\partial z$, $\partial U_3^*/\partial \bar{z}$ ($z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma$), находим

$$T(\xi_{10}, \xi_{20}) = \frac{e_{15}}{2\kappa_0^2} \left[\int_{\Gamma} p(\zeta) g_4(\zeta, \zeta_0) ds - N_2(\zeta_0) \right] \quad (5.2)$$

Функции $g_4(\zeta, \zeta_0)$ и $N_2(\zeta_0)$ определены в (4.2).

В качестве примера рассмотрим случай, когда на свободную от сил эллиптическую полость в слое и полуслое (керамика PZT-4, [1]) из бесконечности излучается волна сдвига ($\tau \neq 0$, $X_3 = 0$). Параметрические уравнения эллипса имеют вид

$$\xi_1 = 0,5a + R_1 \cos \varphi, \quad \xi_2 = h + R_2 \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (5.3)$$

Интегральные уравнения (4.2) с учетом (5.3) сводились к системе линейных

алгебраических уравнений по схеме метода механических квадратур [7]. Максимальное число узлов разбиения на отрезке $[0, 2\pi]$ принималось равным $N = 41$, в рядах (4.2) удерживалось $M = 12$ слагаемых.

Исследовалось изменение величины $\varepsilon = |T|/T_0$ (T_0 — максимальная амплитуда напряжения τ_{23} в падающей волне) на контуре отверстия в слое (фиг. 2) и полуслое (фиг. 3, 4) при значении нормализованного волнового числа $\gamma_2 a = \gamma_2 a (1 + \kappa_0^2)^{1/2} = 11\pi/6$, $a = 1$ м.

На фиг. 2 кривые 1 и 2 построены для значений параметров $a/R_1 = 5$, $R_1/R_2 = 2$ и $R_1/R_2 = 1$ соответственно. Сплошные линии относятся к случаю керамики, штриховые — к случаю $\kappa_0 = 0$ (изотропный материал).

Графики величины ε на фиг. 3 и 4 приведены для значения идентификатора типа краевых условий $A = -1$ и 1 соответственно. Кривые 1 и 2 построены для тех же параметров и в том же соответствии, что и на фиг. 2, причем в первом случае $h/a = 1$, во втором — $h/a = 0,5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Физическая акустика./Под ред. У. Мезона. М.: Мир, 1968. 592 с.
2. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
3. Фильштинский М. Л. Гармонические колебания пьезоэлектрического полупространства с туннельными полостями (деформация продольного сдвига)//Акуст. журн. 1991. Т. 37. Вып. 4. С. 777—781.
4. Партон В. З., Кудряцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
5. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968. 276 с.
6. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
7. Erdogan F., Gupta G. D. On the numerical solution of singular integral equations//Quart. Appl. Math. 1972. 29. No. 4. P. 525—534.

Москва, Сумы

Поступила в редакцию
19.VI.1991