МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1993

УДК 531.7

 Г. И. БОБРИК, А. И. МАТАСОВ

ОПТИМАЛЬНОЕ ГАРАНТИРУЮЩЕЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ БЛОКА НЬЮТОНОМЕТРОВ

Рассматривается задача оптимальной калибровки блока ньютонометров при стендовых испытаниях. Для выбора оптимального набора испытаний применяется гарантирующий подход. Получены оптимальные планы испытаний и гарантированные характеристики точности оценивания для каждого параметра модели блока ньютонометров и проведена оценка точности калибровки.

1. Модель блока ньютонометров. Рассмотрим блок ньютонометров, установленный на гироплатформе. Пусть блок состоит из трех однокомпонентных маятниковых ньютонометров, каждый из которых имеет модель вида

$$f_i = (1 + k_i)\, w_{Ai} + \varepsilon_i + \delta_i w_{Ai} w_{Ai}^{\vee} + \delta f_i \quad (i = \overline{1, 3})$$
$$w_{Ai} = (\mathbf{a}_i - \mathbf{g}^{\Gamma}, \mathbf{p}_i^0), \quad w_{Ai}^{\vee} = (\mathbf{a}_i - \mathbf{g}^{\Gamma}, \mathbf{q}_i^0), \quad (\mathbf{q}_i^0, \mathbf{p}_i^0) = 0 \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{a}_i$ — ускорение центра подвеса чувствительного элемента (i — номер ньютонометра), $\mathbf{g}^{\Gamma}$ — гравитационное ускорение, $\mathbf{p}_i^0$ — единичный вектор оси чувствительности, f_i — показания ньютонометра, k_i — постоянная ошибка масштабного коэффициента, ε_i — постоянное смещение нуля, $\mathbf{q}_i^0$ — единичный вектор, ортогональный $\mathbf{p}_i^0$ (неподвижный относительно корпуса ньютонометра; обычно $\mathbf{q}_i^0$ приближенно коллинеарен одному из $\mathbf{p}_n^0$, $n \neq i$), δ_i — постоянный коэффициент нелинейности (маятниковости) ньютонометра, δf_i — непараметрические ошибки измерений.

Предположим, что имеют место соотношения

$$|k_i| \leq k_{\max} \ll 1, \quad |\varepsilon_i / g^{\Gamma}| \leq \varepsilon_{\max} \ll 1$$
$$|\delta_i g^{\Gamma}| \leq \delta_{\max} \ll 1, \quad |\delta f_i / g^{\Gamma}| \leq \delta f_{\max} \ll 1, \quad g^{\Gamma} = |\mathbf{g}^{\Gamma}| \qquad (1.2)$$

в которых величины $k_{\max}$, $\varepsilon_{\max}$, $\delta_{\max}$, $\delta f_{\max}$ заданы.

Требуется, проведя ряд испытаний, определить параметры модели блока ньютонометров, располагая показаниями ньютонометров и грубой информацией об угловом положении платформы. Под испытанием понимается установка платформы в фиксированное положение относительно Земли.

Поскольку испытания предполагаются статическими, то есть в течение одного испытания платформа не меняет своей ориентации относительно Земли, то $\mathbf{a}_i - \mathbf{g}^{\Gamma} = -\mathbf{g}_0$, где $\mathbf{g}_0$ — ускорение силы тяжести в точке проведения испытаний.

Для построения модели блока ньютонометров введем ортогональный трехгранник $0z$, жестко связанный с платформой (центр его совпадает с точкой пересечения осей чувствительности ньютонометров) следующим образом. Орт $\mathbf{z}_1^0$ совпадает с $\mathbf{p}_1^0$, орт $\mathbf{z}_2^0$ лежит в плоскости, образованной векторами $\mathbf{p}_1^0$, $\mathbf{p}_2^0$ и ортогонален z_1^0 ($(p_2^0, z_2^0) > 0$), орт z_3^0 дополняет первые два до правого трехгранника. Тогда модель блока ньютонометров имеет вид

$$f = (E + A)\,w + \varepsilon + B\,(w)\,w + \delta f$$

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \alpha & \lambda_2 & 0 \\ \beta & \gamma & \lambda_3 \end{Vmatrix}, \quad B\,(w) = \begin{Vmatrix} \delta_1 w_i & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 w_j & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 w_k \end{Vmatrix} \tag{1.3}$$

$$f = (f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{T}}, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^{\mathrm{T}}, \quad \delta f = (\delta f_1, \delta f_2, \delta f_3)^{\mathrm{T}}$$

Здесь $w = (w_1, w_2, w_3)^{\mathrm{T}}$ — вектор, составленный из проекций ускорения силы тяжести на выбранные оси координат (взятых с обратным знаком); $i \neq 1$, $j \neq 2$, $k \neq 3$ (конкретный выбор i, j, k зависит от схемы установки ньютонометров на платформе).

При этом λ_q с точностью до малых второго порядка относительно параметров модели совпадают с ошибками масштабных коэффициентов, а α, β, γ имеют смысл малых углов перекоса осей чувствительности блока ньютонометров. Будем считать, что

$$|\alpha| \le \nu_{\max}, \quad |\beta| \le \nu_{\max}, \quad |\gamma| \le \nu_{\max} \tag{1.4}$$

где $\nu_{\max} << 1$ — известная величина.

Замечание 1.1. Особый интерес представляет определение углов перекоса осей чувствительности ньютонометров, так как остальные параметры могут быть с достаточной точностью определены для каждого ньютонометра в отдельности перед установкой его на платформу.

2. Основное калибровочное соотношение. Так как информация об угловом положении платформы грубая, то для калибровки ньютонометров будем использовать информацию только о величине ускорения силы тяжести и показания ньютонометров.

Пусть величина g_0 известна с погрешностью Δg:

$$\Delta g = g - g_0, \quad |\Delta g/g| \le \Delta g_{\max}/g << 1 \tag{2.1}$$

где g_0 — истинное значение величины ускорения силы тяжести в точке проведения испытаний, g — ее измеренное значение, величина $\Delta g_{\max}$ известна.

Из модели (1.3) с помощью элементарных преобразований получим следующее соотношение:

$$\sigma\,(n) = H^{\mathrm{T}}\,(n)\,q + \delta\sigma\,(n), \quad \sigma\,(n) = |f|^2 - g^2/|f|^2$$

$$n = (f_1/|f|, f_2/|f|, f_3/|f|)^{\mathrm{T}}, \quad f = (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{1/2} \tag{2.2}$$

$$q = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon_1/g, \varepsilon_2/g, \varepsilon_3/g, \delta_1 g, \delta_2 g, \delta_3 g)^{\mathrm{T}}$$

$$\lambda_i^* = \lambda_i - \Delta g/g \quad (i = \overline{1, 3}), \quad q \in \mathbb{R}^{12}$$

$$H\,(n) = (n_1^2, n_2^2, n_3^2, n_1 n_2, n_1 n_3, n_2 n_3, n_1, n_2, n_3, n_1^2 n_i, n_2^2 n_j, n_3^2 n_k)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{12}$$

$$(i \neq 1, j \neq 2, k \neq 3)$$

$$\begin{aligned}\delta\sigma\,(n) = {}& 1/2\,(\Delta g/g)^2 + 1/2\,\{-n^{\mathrm{T}}\,(A^{\mathrm{T}}A + A^2 + A^{\mathrm{T}2})n - \varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon/g^2 - 3n^{\mathrm{T}}B^2\,(ng)\,n - \\ & -2n^{\mathrm{T}}B\,(ng)(A^{\mathrm{T}} + 2A)\,n - 2\,(\varepsilon^{\mathrm{T}}/g)(A^{\mathrm{T}} + A)\,n - 4\,(\varepsilon^{\mathrm{T}}/g)\,B\,(ng)\,n + \\ & + 2n^{\mathrm{T}}\,(\delta f/g) - 2n^{\mathrm{T}}B\,(ng)(\delta f/g) + (\delta f/g)^2 - 2n^{\mathrm{T}}B\,(\Delta n g)\,n\} - \\ & - \{n^{\mathrm{T}}\,(\varepsilon/g) + n^{\mathrm{T}}B\,(ng)\,n + \Delta g/g\}(n^{\mathrm{T}}\Delta n)\end{aligned}$$

$$\Delta n = (f - w)/|f| \tag{2.3}$$

Здесь $\sigma(\mathrm{n})$ — измеряемая величина, q — вектор оцениваемых параметров, $\mathrm{H}(\mathrm{n})$ — известная вектор-функция, $\delta\sigma(\mathrm{n})$ — остаточный член, содержащий слагаемые второго порядка малости относительно параметров модели.

Таким образом, левая часть соотношения (2.2) может быть вычислена без привлечения информации об угловом положении платформы. Правая часть соотношения (2.2) содержит линейные комбинации неизвестных параметров с известными коэффициентами и остаточный член $\delta\sigma(\mathrm{n})$. Используя априорную информацию о параметрах модели (1.2), (1.4), (2.1), можно построить оценку сверху для $\delta\sigma(\mathrm{n})$:

$$|\delta\sigma(\mathrm{n})| \le \delta\sigma_{\max}, \quad \mathrm{n} \in S, \quad S = \{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1\}$$

$$\delta\sigma_{\max} = 1/2\,\{3\|\mathrm{A}_{\max}\|^2 + 8\|\mathrm{A}_{\max}\|\,\delta_{\max}g + 5\,(\delta_{\max}g)^2 + 3\,(\varepsilon_{\max})^2 + 4\varepsilon_{\max}\|\mathrm{A}_{\max}\| + 6\varepsilon_{\max}(\delta_{\max}g) + 2\sqrt{3}\,\delta f_{\max} + 2\|\mathrm{A}_{\max}\|\|\delta f_{\max}\| + 4\delta f_{\max}(\delta_{\max}g) + 3\,(\delta f_{\max})^2 + (\Delta g_{\max}/g)^2\} + \{(\sqrt{3}\,\varepsilon_{\max} + (1/\sqrt{2})\,\delta_{\max}g) + \Delta g_{\max}/g)\cdot(\|\mathrm{A}_{\max}\| + 1/2\delta_{\max}g + \sqrt{3}(\varepsilon_{\max} + \delta f_{\max} + \Delta g_{\max}/g)\} \tag{2.4}$$

$$\mathrm{A}_{\max} = \left\| \begin{matrix} k_{\max} & 0 & 0 \\ \nu_{\max} & k_{\max} & 0 \\ \nu_{\max} & \nu_{\max} & k_{\max} \end{matrix} \right\|, \quad \|\mathrm{A}_{\max}\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_{\max}x\|\, R^3$$

Соотношение (2.2) с оценкой остаточного члена (2.4) будет рассматриваться как основное калибровочное соотношение, с помощью которого, задавая платформе разные положения, можно получить замкнутую систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных параметров.

Замечание 2.1. Поскольку непараметрические ошибки измерений δf_i входят в величину $\delta\sigma(\mathrm{n})$ линейным образом, то они вносят основной вклад в величину $\delta\sigma_{\max}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\delta\sigma(\mathrm{n})$ может принимать любые значения из отрезка $[-\delta\sigma_{\max}, \delta\sigma_{\max}]$.

Замечание 2.2. Как следует из (2.2) при данном способе калибровки ошибки масштабных коэффициентов можно определить только в линейной комбинации с погрешностью величины ускорения силы тяжести (параметры λ_i^*).

3. Задача оптимального гарантирующего оценивания. Для определения параметров модели блока ньютонометров требуется провести 12 испытаний (что соответствует количеству оцениваемых параметров) и составить невырожденную систему алгебраических уравнений вида (2.2). Ясно, что при различных наборах испытаний будет получаться разная точность оценивания параметров. Поэтому возникает задача о выборе оптимального набора испытаний.

Для решения задачи оптимального выбора набора испытаний для определения q по измерениям (2.2) воспользуемся гарантирующим подходом [1—3], который состоит в следующем.

Пусть требуется построить оценку скалярной величины $J = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{q}$ (P — заданный вектор) с помощью линейных оценок

$$J^{\vee} = \int_{\mathrm{n}\in S} \sigma(\mathrm{n})\, x(\mathrm{n})\, d\mathrm{n}, \quad x(\mathrm{n}) \in X$$

где $x(\mathrm{n})$ — весовая функция оценки (оцениватель), X — объединение множества интегрируемых на S функций и множества импульсных функций с конечным числом импульсов: $x(\mathrm{n}) = \Sigma x_i\delta(\mathrm{n} - \mathrm{n}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Отметим, что если $x(\mathrm{n})$ — импульсная функция, то оценка строится по конечному числу измерений.

Задача гарантирующего оценивания состоит в нахождении оценивателя $x^0(\mathrm{n})$, доставляющего минимум гарантированному значению ошибки оценки ΔJ_0:

$$\Delta J_0 = \max_{q, \delta\sigma(n)} |J^{\vee} - J|$$

Можно показать, что задача гарантирующего оценивания сводится к следующей задаче математического программирования для определения $x(\mathrm{n})$ [3]:

$$\int_{\mathrm{n}\in S} |x(\mathrm{n})|\, dn \to \min \tag{3.1}$$

$$\int_{\mathrm{n}\in S} \mathrm{H}(\mathrm{n})\, x(\mathrm{n})\, dn = \mathrm{P} \tag{3.2}$$

4. Решение задачи оптимального гарантирующего оценивания. Используя теорию двойственности, можно свести задачу (3.1), (3.2) к задаче построения обобщенного чебышевского полинома [3—6]:

$$L = \min_{z} \max_{\mathrm{n}\in S} \left| H_1(\mathrm{n}) + \sum_{i=2}^{12} H_i(\mathrm{n})\, z_i \right|$$

и получить ее аналитическое решение. При этом можно показать, что решение задачи (3.1), (3.2) достигается на импульсных функциях, то есть оптимальные оценки строятся по конечному числу измерений [3, 6].

Полагая $\mathrm{P} = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0)^{\mathrm{T}},\ \ldots,\ \mathrm{P} = (0,\ \ldots,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$ решим k $(k = 12)$ задач математического программирования вида (3.1), (3.2) для каждого параметра модели. В результате получим оптимальные планы испытаний, алгоритмы оценивания и гарантированные характеристики точности оценивания[1].

Полученные результаты представлены в таблице, где q_j $(j = 1—9)$ — оцениваемые параметры, N_{opt} — оптимальные планы испытаний, A_j — алгоритмы оценивания. При этом гарантированная ошибка оценки для ошибок масштабных коэффициентов и смещений нулей равна $\delta\sigma_{\max}$, для перекосов осей чувствительности — $2\delta\sigma_{\max}$, для коэффициентов нелинейности ньютонометров — $4\delta\sigma_{\max}$.

5. Об использовании априорной информации. Исследуем влияние на точность оценивания априорной информации о параметрах модели (1.3):

$$|q_j| \le q_{j\max}$$

$$q_{j\max} = k_{\max}\ \ (j = \overline{1,3}),\ \ q_{j\max} = \nu_{\max}\ \ (j = \overline{4,6}) \tag{5.1}$$

$$q_{j\max} = \varepsilon_{\max}/g\ \ (j = \overline{7,9}),\ \ q_{j\max} = \delta_{\max} g\ \ (j = \overline{10,12})$$

Можно показать [6], что задача гарантирующего оценивания (3.1), (3.2) с ограничениями на оцениваемые параметры (5.1) сводится к следующей задаче математического программирования:

$$\sum_{j=1}^{12} \frac{q_{j\max}}{\delta\sigma_{\max}} |x_{-j}| + \int_{\mathrm{n}\in S} |x(\mathrm{n})|\, \mathrm{dn} \to \min \tag{5.2}$$

$$\mathrm{X}_- + \int_{\mathrm{n}\in S} x(\mathrm{n})\, \mathrm{H}(\mathrm{n})\, \mathrm{dn} = \mathrm{P},\ \ \mathrm{X}_- = (x_{-1}, \ldots, x_{-12})^{\mathrm{T}} \tag{5.3}$$

Используя теорию двойственности задач математического программирования, можно сформулировать достаточные условия, при которых решение задачи (3.1), (3.2) является оптимальным и для задачи (5.1)—(5.3) [6]. В данном случае для соответствующих задач математического программирования эти условия имеют вид

---

[1] См. *Г. И. Биркун, А. И. Матасов.* Гарантированное оценивание параметров блока ньютонометров. М., 1991. 29 с.— Деп. в ВИНИТИ 14.01.91, № 228—В91.

для ошибок масштабных коэффициентов

$$\delta\sigma_{\max} \leq k_{\max} \tag{5.4}$$

для смещений нулей

$$\delta\sigma_{\max} \leq \varepsilon_{\max} \tag{5.5}$$

для углов перекоса осей чувствительности

$$2\delta\sigma_{\max} \leq \nu_{\max} \tag{5.6}$$

для коэффициентов нелинейности

$$\delta\sigma_{\max} \leq \varepsilon_{\max} \tag{5.7}$$

$$4\delta\sigma_{\max} \leq \delta_{\max} g \tag{5.8}$$

На практике условия (5.4)—(5.7) обычно выполняются, а условие (5.8) — нет.

Можно показать[2], что если условие (5.8) не выполнено, то использование информации, полученной при проведении испытаний, не улучшает оценку коэффициентов нелинейности (маятниковости) ньютонометров.

6. Оценки параметров блока ньютонометров. Из п. 4 следует, что для получения оптимальных оценок параметров модели блока ньютонометров требуется поставить платформу таким образом, чтобы нормированные показания ньютонометров $\mathrm{n} = (f_1/|f|,\ f_2/|f|,\ f_3/|f|)^{\mathrm{T}}$ совпадали с компонентами n_l^0, $l = \overline{1,42}$.

Точное решение этой задачи нереализуемо из-за погрешностей выставки платформы и неидеальности блока ньютонометров. При грубой информации об ориентации платформы ошибка, вызванная неидеальностью блока ньютонометров, существенно меньше ошибки, возникающей из-за погрешностей выставки платформы. Поэтому при оценке точности калибровки неидеальностью блока можно пренебречь.

Тогда опишем множество ошибок в реализации оптимального плана n_l^0 $(l = \overline{1,42})$ конусом $K(\mathrm{n}_l^0, \varphi)$ с осью n_l^0 и углом раствора φ.

Так как использование информации, полученной при испытаниях, не улучшает точности оценивания коэффициентов нелинейности ньютонометров (см. п. 5), будем строить систему калибровочных соотношений для определения параметров λ_i°, α, β, γ, ε_i/g $(i = \overline{1,3})$, а выражения, содержащие $\delta_i g$, введем в остаточный член.

Рассмотрим испытания, характеризуемые векторами

$$\mathrm{n}_i \in K(\mathrm{n}_i^0, \varphi) \quad (i = \overline{1,18}), \quad \varphi \ll 1 \tag{6.1}$$

и, учитывая выражения для оптимальных алгоритмов оценивания, составим следующую модифицированную систему калибровочных соотношений:

$$\sigma^* = \mathrm{F}\mathrm{q}^* + \mathrm{V}^* + \delta\sigma^*, \quad \sigma^*, \delta\sigma^*, \mathrm{q}^*, \mathrm{V}^* \in \mathbb{R}^9; \quad \mathrm{F} \in \mathbb{R}^{9\times 9} \tag{6.2}$$

$$\mathrm{q}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon_1/g, \varepsilon_2/g, \varepsilon_3/g)^{\mathrm{T}}$$

$$\sigma^* = \tfrac{1}{2}(\sigma(\mathrm{n}_1) + \sigma(\mathrm{n}_2), \sigma(\mathrm{n}_3) + \sigma(\mathrm{n}_4), \sigma(\mathrm{n}_5) + \sigma(\mathrm{n}_6), \sigma(\mathrm{n}_7) - \sigma(\mathrm{n}_8) + \sigma(\mathrm{n}_9) -$$

$$- \sigma(\mathrm{n}_{10}), \sigma(\mathrm{n}_{11}) - \sigma(\mathrm{n}_{12}) + \sigma(\mathrm{n}_{13}) - \sigma(\mathrm{n}_{14}), \sigma(\mathrm{n}_{15}) - \sigma(\mathrm{n}_{16}) + \sigma(\mathrm{n}_{17}) - \sigma(\mathrm{n}_{18}),$$

$$\sigma(\mathrm{n}_1) - \sigma(\mathrm{n}_2), \sigma(\mathrm{n}_3) - \sigma(\mathrm{n}_4), \sigma(\mathrm{n}_5) - \sigma(\mathrm{n}_6))^{\mathrm{T}}$$

$$\delta\sigma^* = \tfrac{1}{2}(\delta\sigma(\mathrm{n}_1) + \delta\sigma(\mathrm{n}_2), \delta\sigma(\mathrm{n}_3) + \delta\sigma(\mathrm{n}_4), \delta\sigma(\mathrm{n}_5) + \delta\sigma(\mathrm{n}_6), \delta\sigma(\mathrm{n}_7) - \delta\sigma(\mathrm{n}_8) +$$

---
2 См. указ. публ. с. 131.

$+ \delta\sigma(n_9) - \delta\sigma(n_{10}), \delta\sigma(n_{11}) - \delta\sigma(n_{12}) + \delta\sigma(n_{13}) - \delta\sigma(n_{14}), \delta\sigma(n_{15}) - \delta\sigma(n_{16}) +$
$+ \delta\sigma(n_{17}) - \delta\sigma(n_{18}), \delta\sigma(n_1) - \delta\sigma(n_2), \delta\sigma(n_3) - \delta\sigma(n_4), \delta\sigma(n_5) - \delta\sigma(n_6))^{\mathrm{T}}$

$$F = \left\| \begin{matrix} H^{*\mathrm{T}}(n_1) + H^{*\mathrm{T}}(n_2) \\ H^{*\mathrm{T}}(n_3) + H^{*\mathrm{T}}(n_4) \\ H^{*\mathrm{T}}(n_5) + H^{*\mathrm{T}}(n_6) \\ H^{*\mathrm{T}}(n_7) - H^{*\mathrm{T}}(n_8) + H^{*\mathrm{T}}(n_9) - H^{*\mathrm{T}}(n_{10}) \\ H^{*\mathrm{T}}(n_{11}) - H^{*\mathrm{T}}(n_{12}) + H^{*\mathrm{T}}(n_{13}) - H^{*\mathrm{T}}(n_{14}) \\ H^{*\mathrm{T}}(n_{15}) - H^{*\mathrm{T}}(n_{16}) + H^{*\mathrm{T}}(n_{17}) - H^{*\mathrm{T}}(n_{18}) \\ H^{*\mathrm{T}}(n_1) - H^{*\mathrm{T}}(n_2) \\ H^{*\mathrm{T}}(n_3) - H^{*\mathrm{T}}(n_4) \\ H^{*\mathrm{T}}(n_5) - H^{*\mathrm{T}}(n_6) \end{matrix} \right\|$$

$H^{*\mathrm{T}}(n) = (H_1(n), H_2(n), \ldots, H_9(n)) \in \mathbb{R}^9$
где $V^* = (V_1, \cdots, V_9)^{\mathrm{T}}$ — члены, содержащие $\sigma_i g$ $(i = \overline{1,3})$.

Из (6.2) получаем оценку вектора q^*: $\hat{q}^* = F^{-1}\sigma^*$. Ошибка оценки при этом определяется соотношением

$$\Delta q^* = F^{-1}(V^* + \delta\sigma^*) \tag{6.3}$$

Отметим, что при $n_l = n_l^0$ система калибровочных соотношений (6.1) эквивалентна полученным в п. 4 алгоритмам оценивания

$$F = E, \quad V^* = 0, \quad \hat{q}_l^* = \sigma_l^* \quad (l = \overline{1, 9}) \tag{6.4}$$

а максимальные значения компонент вектора $\Delta q^* = \delta\sigma^*$ совпадают с оптимальными гарантированными характеристиками точности.

Теперь выясним, насколько ошибка в реализации оптимальных планов ухудшает полученные гарантированные характеристики точности оценивания.

Из (6.1) и (6.4) следует, что матрицу F можно представить в виде $F = E + \Delta F$, где $\|\Delta F\| \ll 1$. Тогда, учитывая (6.3), из формулы для резольвенты линейного оператора приближенно получаем

$$\Delta q^* = V^* + \delta\sigma^* - \Delta F(V^* + \delta\sigma^*) \tag{6.5}$$

Оценим сначала остаточные члены V_l $(l = \overline{1, 9})$. Для $l = 1$—3, 7—9 из (6.1) вытекает оценка $\|V_l\| \le V_0$, $V_0 = (\varphi + 2\varphi^2)\delta_{\max} g$. Для $l = \overline{4, 6}$ имеем

$$|V_l| = 2 \max_{\eta \in N} \max_{n \in K(\eta,\varphi)} g|(n_1^2 n_i - \eta_1^2\eta_i)\delta_i + (n_2^2 n_j - \eta_2^2\eta_j)\delta_j + (n_3^2 n_k - \eta_3^2\eta_k)\delta_k|$$

$(i \ne 1, j \ne 2, k \ne 3)$

$N = \{n_7^0, n_{11}^0, n_{15}^0\}, \qquad K(\eta, \varphi) = \{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \eta_1 n_1 + \eta_2 n_2 + \eta_3 n_3 \ge g\cos\varphi\}$

Применяя теорему Куна — Таккера [5, 7] и проведя некоторые выкладки, можно получить следующее соотношение (с точностью до φ^3):

$|V_l| \le V_\alpha = (2\varphi + \sqrt{2}\,\varphi^2)\,\delta_{\max} g, \quad 0 \le \varphi \le 0,3 \quad (l = \overline{4, 6})$

q_j	N_{opt}	A_j
λ_1^*	$n_1^0 = (1, 0, 0)^T$, $n_2^0 = (-1, 0, 0)^T$	$\hat{\lambda}_1^* = 1/2\,(\sigma(n_1^0) + \sigma(n_2^0))$
ε_1/g		$\hat{\varepsilon}_1/g = 1/2\,(\sigma(n_1^0) - \sigma(n_2^0))$
λ_2^*	$n_3^0 = (0, 1, 0)^T$, $n_4^0 = (0, -1, 0)^T$	$\hat{\lambda}_2^* = 1/2\,(\sigma(n_3^0) + \sigma(n_4^0))$
ε_2/g		$\varepsilon_2/g = 1/2\,(\sigma(n_3^0) - \sigma(n_4^0))$
λ_3^*	$n_5^0 = (0, 0, 1)^T$, $n_6^0 = (0, 0, -1)^T$	$\hat{\lambda}_3^* = 1/2\,(\sigma(n_5^0) + \sigma(n_6^0))$
ε_3/g		$\hat{\varepsilon}_3/g = 1/2\,(\sigma(n_5^0) - \sigma(n_6^0))$
α	$n_7^0 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)^T$, $n_8^0 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)^T$	$\hat{\alpha} = 1/2\,(\sigma(n_7^0) - \sigma(n_8^0) + \sigma(n_9^0) - \sigma(n_{10}^0))$
	$n_9^0 = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)^T$, $n_{10}^0 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)^T$	
β	$n_{11}^0 = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)^T$, $n_{12}^0 = (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2)^T$	$\hat{\beta} = 1/2\,(\sigma(n_{11}^0) - \sigma(n_{12}^0) + \sigma(n_{13}^0) - \sigma(n_{14}^0))$
	$n_{13}^0 = (-\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2)^T$, $n_{14}^0 = (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)^T$	
γ	$n_{15}^0 = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T$, $n_{16}^0 = (0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T$	$\hat{\gamma} = 1/2\,(\sigma(n_{15}^0) - \sigma(n_{16}^0) + \sigma(n_{17}^0) - \sigma(n_{18}^0))$
	$n_{17}^0 = (0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^T$, $n_{18}^0 = (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^T$	

Оценив, учитывая условия (6.1), элементы матрицы $\Delta F = F - E$, получим следующие оценки для ошибок определения параметров:

$$|\Delta q_l| \le \Delta q_{l\,\max} \tag{6.6}$$

$$\Delta q_{l\,\max} = \delta\sigma_{\max} + (\varphi + 2\varphi^2)\delta_{\max} g + (6\varphi + 6{,}5\varphi^2)\delta\sigma_{\max} + 6\varphi^2\delta_{\max} g \quad (l = 1 - 3, 7 - 9)$$

$$\Delta q_{l\,\max} = 2\delta\sigma_{\max} + (2\varphi + \sqrt{2}\,\varphi^2)\,\delta_{\max} g + \{6\,(1 + \sqrt{2})\,\varphi + (3 + 2\sqrt{2})\,\varphi^2\}\delta\sigma_{\max} +$$

$$+ 6\,(1 + \sqrt{2})\,\varphi^2\delta_{\max} g \quad (l = \overline{4, 6})$$

Таким образом, для оптимальной калибровки блока ньютонометров требуется провести 18 испытаний вида (6.1) и составить систему калибровочных соотношений (6.2). При этом априорная точность оценивания параметров определяется соотношениями (6.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лидов М. Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов//Космич. исслед. 1964. Т. 2. № 5. С. 713—715.
2. *Куржанский А. В.* Управление и оценивание в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 192 с.
3. *Белоусов Л. Ю.* Определение оптимальных моментов измерения//Космич. исслед., 1969. Т. 7. № 1. С. 28—31.
4. *Белоусов Л. Ю., Крупень В. Н.* О некоторых асимптотических оценках начальных параметров при измерении дальности//Космич. исслед. 1974. Т. 12. № 2. С. 191—196.
5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 253 с.
6. *Мартиросян С. Р., Матасов А. И.* Минимаксные алгоритмы позиционной коррекции инерциальных навигационных систем//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С. 106—111.
7. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 476 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.VII.1991