

УДК 539.3

© 1993 г. А. П. ЧУГАЙНОВА

## О ПЕРЕСТРОЙКЕ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С МАЛОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Изучаются движения в виде плоских нелинейных квазипоперечных волн в слабоанизотропной упругой среде. Под анизотропией понимается анизотропия свойств среды в плоскости волны.

В [1] отмечены особенности поведения нелинейных квазипоперечных волн для определенного класса упругих сред при малой анизотропии и теоретически показано, что эволюция одного из типов простых волн (волн, близких к вращательным) может содержать быстрые стадии (катастрофы), завершающиеся излучением короткой интенсивной волны другого семейства. Исследование, проведенное в [1], опирается на некоторые гипотезы. В частности, предполагается, что малые возмущения не приводят к смене одного типа решения другим, если решение исходного типа продолжает существовать. Справедливость предположений [1] нуждается в проверке.

В публикуемой работе путем численного эксперимента изучены процессы в вязкоупругой среде, аналогичные описанным в [1], и проверено качественное совпадение поведения решений с выводами этой работы, а также численно исследованы аналогичные эффекты для класса сред, не рассмотренного в [1].

1. Будем изучать плоские волны малой интенсивности. Для описания волновых процессов удобно использовать упрощенные уравнения, описывающие слабонелинейные квазипоперечные волны в вязкоупругой среде с малой анизотропией, распространяющиеся в одну сторону [2]:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial R}{\partial u_\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{\mu\rho_0}} \tau_{\alpha 3} \right) = 0 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (1)$$

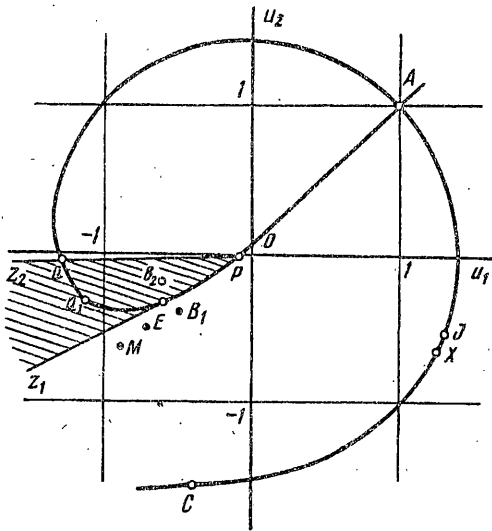
$$R(u_1, u_2) = 1/2(f - g)u_1^2 + 1/2(f + g)u_2^2 - 1/8\kappa_1(u_1^2 + u_2^2)^2$$

$$u_\alpha = \partial w_\alpha / \partial x, \quad \tau_{\alpha 3} = \rho_0 v \partial u_\alpha / \partial t \approx v \sqrt{\mu\rho_0} \partial u_\alpha / \partial x$$

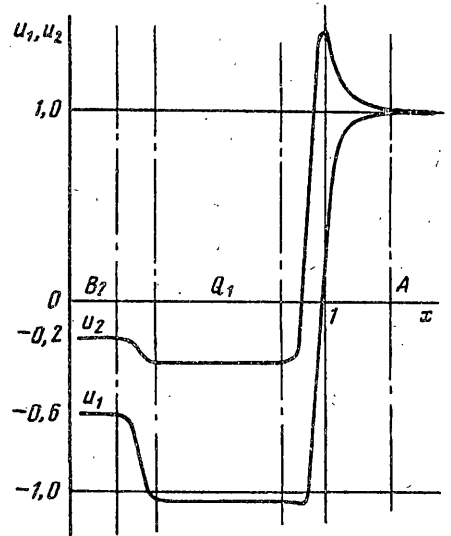
Здесь  $w_\alpha$  — перемещения частиц, рассматриваемые как функции лагранжевых координат  $x_1, x_2, x_3 = x$ ;  $\tau_{\alpha 3}$  — компоненты тензора вязких напряжений;  $\rho_0$  — плотность в ненапряженном состоянии;  $\mu$  — упругий коэффициент Ламэ;  $v$  — кинематический коэффициент вязкости;  $f, g$  — постоянные ( $g$  — параметр анизотропии,  $g \ll f$ );  $\kappa_1$  — постоянная, характеризующая нелинейные эффекты. Знак упругой константы  $\kappa_1$  существенно влияет на поведение квазипоперечных простых и ударных волн. Исследование квазипоперечных волн в [1] проведено для упругих сред с  $\kappa_1 > 0$ . Ниже рассматривается также случай  $\kappa_1 < 0$ . Как видно из (1), исследование можно вести на плоскости  $u_1, u_2$ .

При построении решения автоматической задачи (для сред с  $v = 0$ ) о действии внезапной нагрузки на границе упругого полупространства [3] оказалось, что одним и тем же начальным условиям  $u_1 = U_1, u_2 = U_2$  при  $t = 0, x > 0$  и граничным условиям  $u_1 = u_1^*, u_2 = u_2^*$  при  $x = 0, t > 0$  могут соответствовать два различных решения, если значение выражения  $\Gamma = 2g / [(U_1^2 + U_2^2)\kappa_1]$  достаточно мало.

Ниже все результаты получены путем численного решения системы (1).



Фиг. 1



Фиг. 2

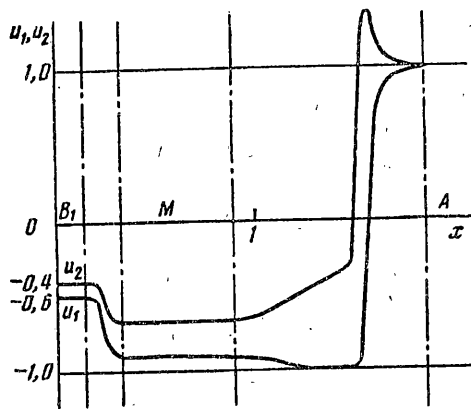
Уравнения (1) были записаны в виде неявных разностных уравнений, к которым применены метод матричной прогонки и метод Ньютона. Расчет проводился в области  $x, t$ , ограниченной правой и левой границами, движущимися с некоторой подбираемой для каждой задачи скоростью. Скорость и длина отрезка подбирались так, чтобы главные события происходили вдали от его концов. При решении задач величины шагов ограничивались условиями малости машинных погрешностей по сравнению с членами уравнений (1) (в частности, малости машинной вязкости по сравнению с вязкостью среды).

Волны, содержащиеся в решении, обладают различными скоростями распространения, поэтому с увеличением расчетного промежутка времени  $t$  между отдельными возмущениями будут появляться отрезки, длина которых увеличивается с возрастанием  $t$ , соответствующие постоянным значениям  $u_1, u_2$ , а структура ударных волн при  $t \rightarrow \infty$  будет стремиться к стационарной.

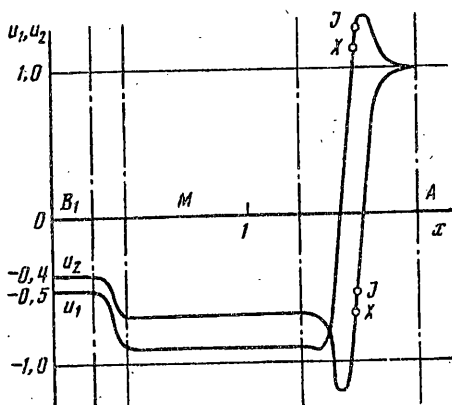
2. Рассмотрим сначала случай  $\eta_1 > 0$ . На фиг. 1 изображена ударная адиабата  $APEQAJS$  (начальная точка  $A$ ). Для дальнейших расчетов выбрано  $U_1 = U_2 = 1$  и  $\Gamma = 0,1$ . Точки  $J$  и  $E$  — точки Жуге, точки  $Q$  и  $P$  изображают такие состояния, при которых ударные волны  $A \rightarrow Q, A \rightarrow P$  распространяются с той же скоростью, что и ударная волна  $A \rightarrow J$  (точка  $P$  соответствует неэволюционной ударной волне). Заштрихованная область значений  $u_1^*, u_2^*$  является областью неединственности решения (два решения). Решение первого типа содержит быструю ударную волну и медленную ударную или простую волну. Сложная быстрая волна — это последовательность быстрых волн, движущихся с близкими скоростями (быстрая ударная волна с условием Жуге за ней, быстрая простая волна, быстрая ударная волна с условием Жуге перед ней).

Численные расчеты ряда нестационарных задач для уравнений (1) показали [4], что оба автомодельных решения могут реализовываться как асимптотики при  $t \rightarrow \infty$  для различных неавтомодельных решений уравнений (1). При этом каждое из асимптотических решений сохраняло свой тип (не перестраивалось) при взаимодействии с малыми возмущениями, возникающими при малых изменениях граничных условий в точке  $x = 0$ , производимых на небольшом интервале времени при  $t > 0$ .

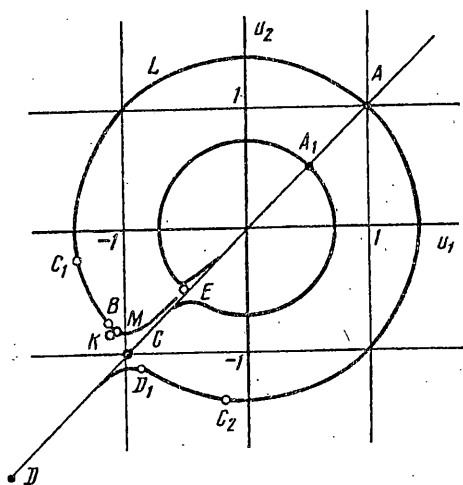
Это справедливо [1], когда состояние за ударной волной не совпадает с точкой  $E$ . В противном случае можно указать сколь угодно малые возмущения, которые приведут к тому, что решение с одной ударной волной (решение первого



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

типа) перестанет существовать, а единственным решением задачи будет решение, содержащее сложную быструю ударную волну (решение первого типа). В этом случае происходит мгновенная перестройка решения (распад волны  $AE$ ) [1].

Ниже приводятся результаты численного исследования взаимодействия ударной волны с дополнительным возмущением, которое представлено как маленький скачок-ступенька. В области неединственности была поставлена начально-краевая задача для системы уравнений (1), для решений которой описанные выше автомодельные решения могут представлять асимптотики при  $t \rightarrow \infty$ . Начальные условия ( $t=0$ ) и правое граничное условие ( $t > 0, x = l$ ) взяты в виде  $U_1 = U_2 = 1$  (точка  $A$  на фиг. 1), левое граничное условие ( $t > 0, x = 0$ ) в виде  $u_1^* = -0,6, u_2^* = -0,2$  (точка  $B_2$  на фиг. 1). В решении этой начально-краевой задачи можно различить последовательность быстрой ударной волны (скачок  $A \rightarrow Q_1$ ) и медленной ударной волны (скачок  $Q_1 \rightarrow B_2$ ) (фиг. 2), т. е. автомодельную асимптотику первого типа. Точкам  $A, B_2, Q_1$  на фиг. 1 соответствуют участки оси  $x$ , выделенные штрихпунктирными линиями на фиг. 2, на которых величины  $u_1, u_2$  принимают постоянные значения.

Рассмотрим процесс взаимодействия ранее образованных волн (соответствующих решению первого типа) с возмущением, которое будет распространяться от левой границы. Для этого на левой границе значения  $u_1^*$  и  $u_2^*$  были изменены на значения  $u_1^* = -0,5, u_2^* = -0,4$  (точка  $B_1$  на фиг. 1). Значения  $u_1$  и  $u_2$  на

правой границе оставлены без изменения. В результате в возмущенную область будет распространяться дополнительное возмущение, соответствующее скачку  $B_2 \rightarrow B_1$  (фиг. 1). Точка  $B_1$  принадлежит области, где реализуется решение только второго типа. Поэтому для измененной постановки начально-краевой задачи решение должно выйти на асимптотику, соответствующую решению второго типа.

Рассмотрим процесс перестройки решения первого типа в результате взаимодействия с дополнительным возмущением  $B_2 \rightarrow B_1$ . Результат численного счета поставленной начально-краевой задачи для момента времени  $t_1$ , когда взаимодействие медленной ударной волны и дополнительного возмущения закончено, представлен на фиг. 3. Вследствие этого взаимодействия образовалась одна ударная волна, которая представляет собой скачок  $B_1 \rightarrow M$  (фиг. 1, 3). Точкам  $B_1$ ,  $M$  на фиг. 3 соответствуют участки оси  $x$ , выделенные штрихпунктирными линиями. При больших временах  $t_1$  происходит взаимодействие быстрой ударной волны с дополнительным возмущением. В процессе этого взаимодействия происходит разделение быстрой ударной волны на систему волн, движущихся с близкими скоростями. Это можно наблюдать на фиг. 4, где приведен результат расчета для момента времени  $t_2 > t_1$ .

На фиг. 4 можно различить последовательность волн, составляющих быструю волну. Это скачок  $A \rightarrow J$ , быстрая простая волна  $J \rightarrow X$ , быстрая ударная волна  $X \rightarrow M$  (фиг. 1, 4). Участок  $JX$ , соответствующий простой волне, расширяется с течением времени, а участки, соответствующие структурам скачков  $A \rightarrow J$  и  $X \rightarrow M$ , не изменяются. Точкам  $A$ ,  $M$ ,  $B_1$  на фиг. 1 соответствуют участки оси  $x$  постоянных значений  $u_1$ ,  $u_2$ , отмеченные на фиг. 4. Таким образом показано, что возможны случаи, когда при взаимодействии ударных волн, соответствующих решению первого типа, с возмущением, распространяющимся от левой границы, решение поставленной начально-краевой задачи изменяет свой тип и выходит на асимптотику второго типа.

3. Рассмотрим теперь случай, когда  $\Gamma \ll 1$ . Физический смысл этого неравенства заключается в преобладании нелинейности над анизотропией  $g \ll \kappa_1$ . При  $g \rightarrow 0$  область неединственности стремится к некоторому сектору на плоскости  $u_1$ ,  $u_2$ . Различие между решениями для фиксированного момента времени  $t$  будет на отрезке оси  $x$ , длина которого стремится к нулю при  $g \rightarrow 0$ .

На фиг. 5 изображена ударная адиабата близка к окружности. Поставим следующую начально-краевую задачу для системы уравнений (1): начальное и правое граничное условия соответствуют  $U_1 = U_2 = 1$  (точка  $A$  на фиг. 5), левое граничное условие  $u_1^* = -1,15$ ;  $u_2^* = -0,79$  (точка  $B$  на фиг. 5). Точка  $B$  расположена на эволюционном участке ударной адиабаты. В результате численного решения поставленной начально-краевой задачи получено решение, соответствующее одной ударной волне. Затем левое граничное условие изменено  $u_1^* = -1$ ,  $u_2^* = -1$  (точка  $C$  на фиг. 5), т. е. в возмущенную область будет распространяться дополнительное возмущение, соответствующее скачку  $B \rightarrow C$ . Численный счет показал, что в результате взаимодействия возмущения и ударной волны образуется последовательность быстрой ударной и медленной простой волн, причем интенсивность медленной простой волны существенно больше интенсивности возмущения  $B \rightarrow C$ .

Таким образом, возможны случаи, когда в результате взаимодействия ударной волны с возмущением излучается простая волна конечной интенсивности.

4. Решение автомодельной задачи о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства для сред с  $\kappa_1 < 0$  построено в [5]. В этой работе отмечено наличие области неединственности решения задачи (два решения). В [6] численно показано, что оба решения реально существуют и сохраняют свой тип при взаимодействии с малыми возмущениями в том случае, если

состояние за медленной ударной волной не совпадает с точкой  $D$  (фиг. 5). Точка  $D$  — точка Жуге, в этой точке скорость ударной волны равна характеристической скорости по состоянию за ней.

В случае  $\Gamma \ll 1$  для сред с  $\kappa_1 < 0$  была поставлена следующая начально-краевая задача. Начальное и правое граничное условия соответствуют  $U_1 = U_2 = 1$  (точка  $A$  на фиг. 5), левое граничное условие  $u_1^* = -0,9$ ;  $u_2^* = -1,15$  (точка  $D_1$  на фиг. 5). Точка  $D_1$  лежит на эволюционном участке ударной адиабаты, построенной из точки  $A$  как начальной. В результате численного счета получена одна ударная волна. Затем левое граничное условие изменено  $u_1^* = -1$ ,  $u_2^* = -1$  (точка  $C$  на фиг. 5), т. е. в возмущенную область будет распространяться возмущение, соответствующее скачку  $D_1 \rightarrow C$ . Численный счет показал, что в результате взаимодействия ударной волны  $A \rightarrow D_1$  и дополнительного возмущения  $D_1 \rightarrow C$  образуется последовательность быстрой простой волны  $A \rightarrow A_1$  и медленной ударной волны  $A_1 \rightarrow C$ . Точка  $C$  в этом случае принадлежит эволюционному участку ударной адиабаты, проведенной из точки  $A_1$  как начальной.

Здесь также следует отметить, что интенсивность образовавшейся простой волны  $A \rightarrow A_1$  существенно превосходит интенсивность возмущения  $D_1 \rightarrow C$ , что аналогично результатам, полученным в случае  $\kappa_1 > 0$ .

5. Исследуем процесс взаимодействия ударной волны с неавтомоделной простой волной в случае, когда эффекты нелинейности много больше эффектов, связанных с анизотропией ( $\kappa_1(u_1^2 + u_2^2) \gg g$ ). Систему уравнений (1) как гиперболическую систему второго порядка можно привести к уравнениям относительно инвариантов Римана  $I_1$  и  $I_2$ :

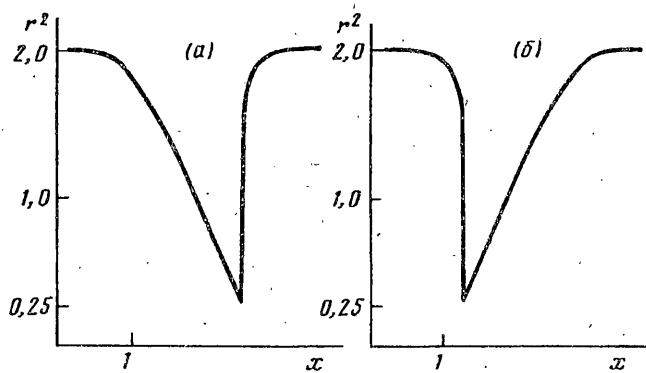
$$\frac{\partial I_1}{\partial t} + C_1(I_1, I_2) \frac{\partial I_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial I_2}{\partial t} + C_2(I_1, I_2) \frac{\partial I_2}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  ( $C_2 > C_1$ ) — характеристические скорости, выраженные через инварианты Римана. В качестве инвариантов Римана могут быть выбраны любые функции от  $u_1$  и  $u_2$ , которые принимают постоянные значения на интегральных кривых, соответствующих простым волнам:  $I_1 = \text{const}$  в простой волне, распространяющейся со скоростью  $C_2$ , и  $I_2 = \text{const}$  в простой волне, распространяющейся со скоростью  $C_1$ .

Рассмотрим сначала случай, когда  $g = 0$ . Простые и ударные волны для этого случая были исследованы в [7]. Пусть сначала  $\kappa_1 > 0$ , тогда, принимая  $C_2 > C_1$  в уравнениях (2), можно положить  $I_1 = r = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2}$ ,  $I_2 = \theta = \text{arctg}(u_1/u_2)$ , а  $C_1$  и  $C_2$  являются функциями только  $r$ , причем  $dC_1/dr < 0$ ,  $dC_2/dr < 0$  при  $r \neq 0$ . Быстрые волны описываются уравнениями  $r = \text{const}$  и  $\theta = \theta(x - C_2 t)$  и не меняют своей формы со временем (это вращательные волны). Поведение медленных волн, описываемых соотношением  $\theta = \text{const}$ , согласно первому уравнению (2), не зависит от присутствия быстрых волн.

Переходя к рассмотрению случая  $\kappa_1(u_1^2 + u_2^2) \gg g \neq 0$ ,  $\kappa_1 > 0$ , отметим, что связь величин в быстрой простой волне задается кривой, симметричной относительно осей  $u_1$  и  $u_2$ , близкой к окружности  $r = \text{const}$ , и что появляется зависимость  $C_1$  от  $\theta$ . Это приводит к деформации быстрой простой волны, которая происходит вследствие совместного действия анизотропии и нелинейности.

Для численного исследования эволюции взаимодействия быстрой ударной волны с быстрой простой неавтомоделной волной была поставлена следующая начально-краевая задача. Сначала была сформирована быстрая ударная волна  $A \rightarrow B$  (фиг. 5), для этого начальное и правое граничные условия были заданы в виде  $U_1 = U_2 = 1$  (точка  $A$  на фиг. 5), левое граничное условие  $u_1^* = -1,15$ ;  $u_2^* = -0,79$  (точка  $B$  на фиг. 5). Затем непосредственно за ударной волной  $A \rightarrow B$  задано распределение  $u_1$ ,  $u_2$ , соответствующее изменению этих величин в быстрой простой волне вдоль отрезка интегральной кривой  $BD_1$ . Причем



Фиг. 6

линейное распределение  $\theta$  по  $x$  было задано следующее:  $\Delta\theta = \pi/40$ ,  $\Delta x = 0,03$ , изменение  $\theta$  против часовой стрелки. В результате этого на левой границе будут заданы значения  $u_1^* = -0,9$ ;  $u_2^* = -1,15$  (точка  $D_1$  на фиг. 5). Отметим, что полярные углы точек  $A(1; 1)$  и  $D_1(-0,9; -1,15)$  различаются более чем на  $\pi$ . В результате численного решения поставленной начально-краевой задачи обнаружено, что поглощение ударной волной  $A \rightarrow B$  быстрых малых возмущений, соответствующих отрезку интегральной кривой  $BD_1$ , приводит к излучению интенсивных простых медленных волн. При этом состояние за ударной волной приближается к точке  $E$ . Далее происходит перестройка решения с нелинейным распадом волны, соответствующей точке  $E$ . После этого излучение медленной простой волны почти полностью прекращается. В момент прекращения излучения медленной простой волны возникает медленная ударная волна, которая становится передней границей излученной ранее простой волны. Излученная при этом медленная волна изображена на фиг. 6, а, где приведен график зависимости  $r^2(x)$ . Максимальная амплитуда излученной простой медленной волны остается конечной при  $\Gamma \rightarrow 0$  (она определяется положением точки  $E$ ).

Следует подчеркнуть, что если изменение полярного угла между начальной точкой  $A$  и точкой, соответствующей левому граничному условию, имеет противоположный знак (по часовой стрелке), то излучения интенсивной медленной волны не происходит.

Аналогичные эффекты перестройки решения обнаруживаются при численном исследовании эволюции взаимодействия медленной ударной волны и неавтономной медленной простой волны (это волны, близкие к вращательным) в упругой среде с  $\kappa_1 < 0$ .

При  $\kappa_1 < 0$  в случае  $g = 0$  медленные простые волны, имеющие вращательную поляризацию, описываются уравнениями  $\theta = \theta(x - C_1 t)$ ,  $C_1 = \text{const}$ . Поведение быстрых простых волн, имеющих плоскую поляризацию, описывается соотношением  $\theta = \text{const}$ .

В случае  $\kappa_1 < 0$ ,  $\Gamma = -0,001$  численно решена следующая начально-краевая задача. Сформирована медленная ударная волна  $A \rightarrow D_1$ , затем непосредственно за этой ударной волной задано распределение  $u_1$ ,  $u_2$ , соответствующее отрезку интегральной кривой медленной простой волны  $D_1 \rightarrow B$ . Распределение  $\theta$  по  $x$  такое же, как и в случае  $\kappa_1 > 0$ , но изменение  $\theta$  по часовой стрелке. В результате взаимодействия ударной и простой волн происходит излучение быстрых простых волн, при этом состояние перед ударной волной приближается к точке  $A_1$  и затем происходит нелинейный распад волны  $A_1 \rightarrow C$ . Этот процесс изображен на фиг. 6, б, где приведен график зависимости  $r^2(x)$ .

Если изменение полярного угла между точкой  $A$  и точкой, соответствующей

левому граничному условию, имеет противоположный знак (против часовой стрелки), то излучение интенсивной быстрой простой волны не происходит.

Сравнивая графики фиг. 6, а ( $r^2(x)$  для сред с  $\kappa_1 > 0$ ) и фиг. 6, б ( $r^2(x)$  для сред с  $\kappa_1 < 0$ ), отметим, что форма излученного импульса постоянна, если не учитывать влияние вязкости. Ширина сигнала излученного импульса зависит от  $\Gamma$ , начального распределения  $\partial\theta/\partial x$  и начальных данных ( $U_1, U_2$ ): Наличие такого импульса могло бы быть обнаружено в опытах. По форме излученного импульса можно идентифицировать явление перестройки нелинейной упругой волны.

Автор благодарит А. Г. Куликовского, Е. И. Свешникову и Э. В. Ленского за внимание к работе и замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А. Г. Особенности поведения нелинейных квазипоперечных волн в упругой среде при малой анизотропии // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1989. Т. 186. С. 132—139.
2. Куликовский А. Г. Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабонеизотропном упругом теле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 597—604.
3. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 284—291.
4. Чугайнова А. П. О формировании автомодельного решения в задаче о нелинейных волнах в упругом полупространстве // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 692—697.
5. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны, возникающие при изменении напряжений на границе упругого полупространства // Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллинн: Валгус, 1985. С. 133—145.
6. Чугайнова А. П. О выходе нелинейных волн на автомодельный режим в задаче о действии внезапного изменения нагрузки на границе упругого полупространства // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. Вып. 3. С. 187—189.
7. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.

Москва

Поступила в редакцию  
17.II.1991