

УДК 539.3

© 1993 г. В. И. ПОЖУЕВ, Н. П. ПОЛЯКОВА

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ДВУХСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСШИРЯЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАГРУЗОК

К настоящему времени достаточно подробно изучены стационарные динамические задачи о воздействии подвижных нагрузок на пластины и оболочки на упругом инерционном основании [1]. При этом рассматривались конструкции неограниченной длины и из анализа исключались переходные процессы, возникающие в момент приложения нагрузки. В [2] получено нестационарное решение плоской задачи о воздействии нормальной подвижной и неподвижной нагрузки на пластину, лежащую на инерционном полупространстве. Решение получено с помощью преобразований Фурье и Лапласа, причем обращение обоих преобразований осуществлялось численно на основании специального алгоритма совместного вычисления несобственных интегралов.

В публикуемой работе на основании преобразований Ханкеля по радиальной координате и Лапласа по времени исследовано нестационарное напряженно-деформированное состояние двухслойного полупространства под действием расширяющихся поверхностных кольцевых и круговых нормальных нагрузок. Основное внимание уделено моментам времени, близким к началу нагружения, причем аналогично [2] обращение преобразования Лапласа осуществлено численно с помощью смещенных многочленов Лежандра, а для вычисления интегралов Ханкеля применялась специальная процедура, подобная методу Файлона для интегралов Фурье. Ранее в [3] подобная задача исследовалась для однослойного полупространства, причем там переход к оригиналам выполнялся при помощи метода Каньяра и основное внимание уделено качественной стороне явления.

1. Постановка задачи. Рассматривается нестационарная реакция упругого слоя, подпертого полубесконечной средой, на действие расширяющихся поверхностных нагрузок. Полупространство занимает область $z > 0$, а для слоя $z \in (-h, 0)$ (фиг. 1). В момент времени $t < 0$ полупространство находится в состоянии покоя и свободно от напряжений. Затем в момент времени $t = 0$ в начале координат прикладывается импульсивная нормальная нагрузка F_0 (кольцевая или круговая) и в последующие моменты времени $t > 0$ происходит расширение нагруженного участка поверхности с постоянной скоростью c .

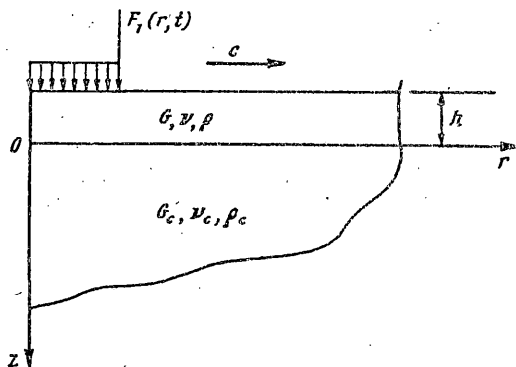
Предполагается, что динамическое поведение слоя может быть описано с помощью теории пластин, так что в цилиндрической системе координат его колебания определяются из уравнения [4]:

$$D\Delta\Delta w + \rho^* \partial^2 w / \partial t^2 = F(r, t) - q_c(r, t) \quad (1.1)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad D = \frac{Gh^3}{6(1-\nu)}$$

где $F(r, t)$ — интенсивность заданной поверхностной нагрузки, $q_c(r, t)$ — нормальная реакция со стороны полупространства, $\rho^* = \rho h$ — масса плиты, отнесенная к единице площади поверхности.

Полупространство считается однородным и изотропным и его движение описывается уравнениями линейной теории упругости. При отсутствии массовых сил, вводя потенциальные функции Φ и Ψ по формулам



Фиг. 1

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\Psi)}{\partial r} \quad (1.2)$$

движение упругой среды можно описать волновыми уравнениями

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \Psi - \frac{\Psi}{r^2} = \frac{1}{c_B^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$c_B^2 = G_c / \rho_c, \quad c_p^2 = \frac{2G_c(1 - \nu_c)}{\rho_c(1 - 2\nu_c)} \quad (1.4)$$

где c_p, c_B — скорости распространения волн растяжения — сжатия и сдвига в полупространстве.

Граничные условия на поверхности раздела плиты и полупространства имеют вид ($z=0$):

$$G_{zz}(r, 0, t) = -q_c(r, t)$$

$$G_{rz}(r, 0, t) = 0, \quad u_z(r, 0, t) = w(r, t) \quad (1.5)$$

При этом необходимые для удовлетворения данным граничным условиям напряжения выражаются через перемещения согласно зависимостям

$$G_{zz} = \frac{2G_c \nu_c}{1 - 2\nu_c} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{2G_c(1 - \nu_c)}{1 - 2\nu_c} \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$G_{rz} = G_c (\partial u_r / \partial z + \partial u_z / \partial r) \quad (1.6)$$

Начальные условия задачи принимаются нулевыми, т. е. при $t=0$ все искомые функции и их первые производные по времени считаются равными нулю. Кроме того, в каждый момент времени должны выполняться условия затухания перемещений и напряжений в бесконечно удаленных точках полупространства.

2. Решение задачи в пространстве изображений. Переходя к безразмерным величинам по формулам

$$\{w^*, u_r^*, u_z^*\} = \frac{1}{h} \{w, u_r, u_z\}, \quad \{r_*, z_*\} = \frac{1}{h} \{r, z\} \quad (2.1)$$

$$\tau = \frac{c_B}{h} t, \quad \rho_* = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \gamma = \frac{G}{G_c}, \quad \eta = \frac{c_B^2}{c_p^2}, \quad \{\Phi^*, \Psi^*\} = \frac{1}{h^2} \{\Phi, \Psi\}$$

и применяя к уравнениям (1.3) интегральное преобразование Лапласа по τ

$$\Phi^L(r_*, z_*, p) = \int_0^\infty \Phi^*(r_*, z_*, \tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (2.2)$$

а затем преобразование Ханкеля по r_* :

$$\bar{\Phi}_0^L(\xi, z_*, p) = \int_0^\infty r_* \Phi^L(r_*, z_*, p) J_0(\xi r_*) dr_* \quad (2.3)$$

$$\bar{\Psi}_1^L(\xi, z_*, p) = \int_0^\infty r_* \Psi^L(r_*, z_*, p) J_1(\xi r_*) dr_*$$

приходим в пространстве изображений к уравнениям

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}_0^L}{dz_*^2} - (\xi^2 + \eta p^2) \bar{\Phi}_0^L = 0, \quad \frac{d^2 \bar{\Psi}_1^L}{dz_*^2} - (\xi^2 + p^2) \bar{\Psi}_1^L = 0 \quad (2.4)$$

Решения уравнений (2.4) с учетом условий затухания на бесконечности имеют вид

$$\bar{\Phi}_0^L = C_1 \exp(-z_* \sqrt{\lambda_1}), \quad \bar{\Psi}_1^L = C_2 \exp(-z_* \sqrt{\lambda_2}) \quad (2.5)$$

$$\lambda_1 = \xi^2 + \eta p^2, \quad \lambda_2 = \xi^2 + p^2$$

Уравнение (1.1) в пространстве изображений запишется в форме

$$\left(\xi^4 + \frac{6p^2 \rho_* (1 - \nu)}{\gamma} \right) \bar{w}_0^L = \frac{6(1 - \nu)}{G} (\bar{F}_0^L - \bar{q}_{c0}^L) \quad (2.6)$$

Подставляя зависимости (1.6) с учетом выражений (1.2) в граничные условия (1.5) и применяя интегральные преобразования, в пространстве изображений получаем эти условия в виде ($z_* = 0$):

$$2\xi \frac{d\bar{\Phi}_0^L}{dz_*} + \frac{d^2 \bar{\Psi}_1^L}{dz_*^2} + \xi^2 \bar{\Psi}_1^L = 0, \quad \frac{d\bar{\Phi}_0^L}{dz_*} + \xi \bar{\Psi}_1^L = \bar{w}_0^L(\xi, p) \quad (2.7)$$

$$\frac{2G_c}{1 - 2\nu_c} \left(\frac{d^2 \bar{\Phi}_0^L}{dz_*^2} (1 - \nu_c) - \xi^2 \nu_c \bar{\Phi}_0^L \right) + 2G_c \xi \frac{d\bar{\Psi}_1^L}{dz_*} = -\bar{q}_{c0}^L(\xi, p)$$

С помощью этих условий и уравнения (2.6) функции C_1 и C_2 определяются следующим образом. Подставляя выражения (2.5) в первое условие (2.7), получаем уравнение, связывающее C_1 и C_2 :

$$-2\xi \sqrt{\lambda_1} C_1 + (\lambda_2 + \xi^2) C_2 = 0 \quad (2.8)$$

После подстановки выражений (2.5) в третье условие (2.7), приходим к такому выражению для трансформанты реакции со стороны полупространства

$$\bar{q}_{c0}^L = -\frac{2G_c}{1 - 2\nu_c} [\lambda_1 (1 - \nu_c) - \nu_c \xi^2] C_1 + 2G_c \sqrt{\lambda_2} \xi C_2 \quad (2.9)$$

а из второго граничного условия (2.7) с использованием формул (2.5) получаем

$$\bar{w}_0^L = -\sqrt{\lambda_1} C_1 + \xi C_2 \quad (2.10)$$

Подставляя (2.9) и (2.10) в преобразованное уравнение движения пластинки, находим второе уравнение для определения C_1 и C_2 . Вводя обозначения $\{C_1^*, C_2^*\} = \{C_1, C_2\} G_c / \bar{F}_0^L$, приходим к следующей системе двух уравнений:

$$a_1 C_1^* + a_2 C_2^* = 0, \quad a_3 C_1^* + a_4 C_2^* = -1 \quad (2.11)$$

$$a_1 = -2\xi \sqrt{\lambda_1}, \quad a_2 = \lambda_2 + \xi^2$$

$$a_3 = 2 \frac{\lambda_1 (1 - \nu_c) - \nu_c \xi^2}{1 - 2\nu_c} + \frac{\xi^4 \gamma + 6(1 - \nu) p^2 \rho^*}{6(1 - \nu)} \sqrt{\lambda_1}$$

$$a_4 = -2\xi \sqrt{\lambda_2} - \frac{\xi^4 \gamma + 6(1 - \nu) p^2 \rho^*}{6(1 - \nu)} \xi$$

Решение системы (2.11) имеет вид

$$C_1^* = \frac{a_2}{a_1 a_4 - a_2 a_3}, \quad C_2^* = \frac{a_1}{a_2 a_3 - a_1 a_4} \quad (2.12)$$

После этого можем определить перемещения и напряжения в любой точке пространства, а также изгибающий момент в пластине; например, для нормальных компонент эти величины определяются по формулам

$$\bar{u}_{z0}^L = T_1(\xi, z_*, p) \bar{F}_0^L / G_c, \quad \bar{G}_{zz0}^L = \bar{F}_0^L T_2(\xi, z_*, p) \quad (2.13)$$

$$T_1(\xi, z_*, p) = \xi C_2^* \exp(-z_* \sqrt{\lambda_2}) - \sqrt{\lambda_1} C_1^* \exp(-z_* \sqrt{\lambda_1}) \quad (2.14)$$

$$T_2(\xi, z_*, p) = 2 \frac{\lambda_1 (1 - \nu_c) - \nu_c \xi^2}{1 - 2\nu_c} C_1^* \exp(-z_* \sqrt{\lambda_1}) - 2\xi \sqrt{\lambda_2} C_2^* \exp(-z_* \sqrt{\lambda_2})$$

Для нахождения изгибающего момента в пластине надо применить преобразование Лапласа и Ханкеля к формуле, связывающей момент и прогиб пластинки

$$M_r = -\frac{Gh^2}{6(1 - \nu)} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial r_*^2} + \frac{\nu}{r_*} \frac{\partial w^*}{\partial r_*} \right) \quad (2.15)$$

а затем подставить вместо \bar{w}_0^L согласно второму условию (2.7) $\bar{u}_{z0}^L|_{z_*=0}$ и воспользоваться зависимостями (2.13), (2.14).

3. Примеры. Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени к пластине в начале координат прикладывается импульсивная нормальная нагрузка F_0 (кольцевая или круговая), а в последующие моменты времени $t > 0$ происходит расширение нагруженного участка пластины с постоянной скоростью c , причем эта скорость может, оставаясь в каждом случае постоянной, принимать любые значения по отношению к скоростям распространения волн в полупространстве от досейсмических ($c < c_B$) до сверхсейсмических ($c > c_p$).

Для кольцевой нагрузки

$$F_1(r, t) = \frac{F_0}{2\pi r} \delta(ct - r) H(t) \quad (3.1)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Применяя к (3.1) преобразования Лапласа и Ханкеля, трансформанту заданной нагрузки запишем в виде

$$\bar{F}_{10}^L(\xi, p) = \frac{F_0 M_B}{2\pi h^2 (p^2 + \xi^2 M_B^2)^{1/2}}, \quad M_B = \frac{c}{c_B} \quad (3.2)$$

Подставляя выражение (3.2) в формулы (2.13) и обращая преобразование Ханкеля, для кольцевой нагрузки получаем

$$\frac{u_{z0}^L(r_*, z_*, p) h^2 G_c}{F_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\xi T_1(\xi, z_*, p)}{(p^2 + \xi^2 M_B^2)^{1/2}} J_0(\xi r_*) d\xi \quad (3.3)$$

$$\frac{G_{zz}^L(r_*, z_*, p) h^2}{F_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\xi T_2(\xi, z_*, p)}{(p^2 + \xi^2 M_B^2)^{1/2}} J_0(\xi r_*) d\xi \quad (3.4)$$

Аналогичные представления получаются для других компонент напряженно-деформированного состояния полупространства и верхнего слоя. Интегралы в формулах вида (3.3), (3.4) для различных значений параметра преобразования Лапласа p находились численно с использованием предложенных в [5, 6] квадратурных формул для вычисления интегралов Ханкеля, которые по своей структуре подобны хорошо известным формулам Файлона для интегралов Фурье. Для построения оригиналов применялись формулы (4.5), (4.6) из [2].

В случае круговой нагрузки

$$F_2(r, t) = \frac{F_0}{\pi (ct)^2} H(ct - r) \quad (3.5)$$

где $H(x)$ — единичная ступенчатая функция Хевисайда.

Отметим, что для нагрузок (3.1) и (3.5) полная величина усилия, приложенного к верхнему слою основания, будет во все моменты времени одинаковой и равной усилию F_0 , приложенному в начальный момент времени в точке $r=0$. Однако нормальные напряжения будут уменьшаться по мере расширения области нагружения пропорционально $1/r$ в случае кольцевой нагрузки и пропорционально $1/r^2$ в случае кругового нагружения.

Трансформанта нагрузки (3.5) имеет вид

$$\bar{F}_{z_0}^L(\xi, p) = \frac{F_0 M_B}{\pi h^2 \xi^2 M_B^2} [(p^2 + \xi^2 M^2)^{1/2} - p] \quad (3.6)$$

и тогда после обращения преобразования Ханкеля для нормальных перемещений в полупространстве будем иметь

$$\frac{u_z^L(r_*, z_*, p) h^2 G_c}{F_0} = \frac{1}{\pi M_B^2} \int_0^\infty \frac{T_1(\xi, z_*, p)}{\xi} [(p^2 + \xi^2 M_B^2)^{1/2} - p] J_0(\xi r_*) d\xi \quad (3.7)$$

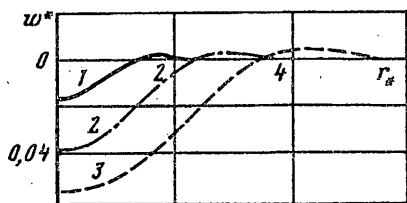
и аналогично переписывается формула (3.4).

Расчеты проведены для таких значений безразмерных параметров: $\gamma = 10$; $\rho_* = 5$; $\nu = \nu_c = 0,3$. Величины M_B , r_* , z_* и τ варьировались.

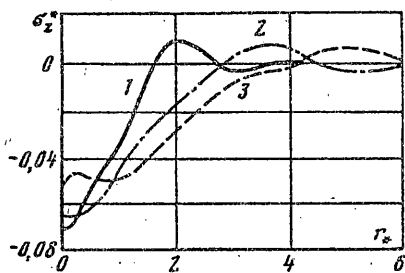
На фиг. 2 для кольцевой нагрузки (3.1) показано распределение прогибов верхнего слоя по радиальной координате для различных моментов времени при $M_B = 0,5$ (досейсмический режим движения нагрузки). При этом кривая 1 отвечает моменту времени $\tau = 0,5$; 2 — $\tau = 1,5$; 3 — $\tau = 3,0$. Положение фронта нагрузки определяется по формуле $r_* = a = M_B \tau$, а $W^* = u_z^L(r_*, 0, p) h^2 G_c / F_0$. Как видно из анализа полученных результатов, для моментов времени, близких к началу нагружения, происходит возрастание с течением времени нормальных перемещений на фронте нагрузки и в центре области, через которую прошло кольцевое давление.

Аналогичные графики для безразмерного нормального напряжения $G_z^* = G_{zz}(r_*, 0, \tau) h^2 / F_0$ при тех же значениях параметров M_B и τ приведены на фиг. 3. Следует отметить, что здесь кривые имеют более сложный, чем для перемещений, характер, в частности, это относится к напряжениям в окрестности начала координат и впереди фронта нагружения.

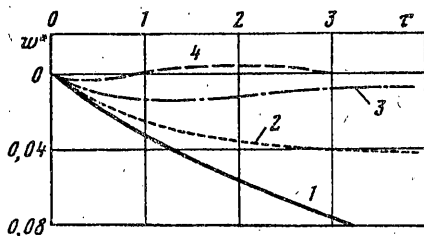
Фиг. 4 и 5 иллюстрируют изменение во времени нормальных перемещений и контактных напряжений на границе раздела слоев $z_* = 0$ на фронте круговой области давления ($r = ct$) для различных скоростей движения нагрузки. Для кривых 1 — $M_B = 0,1$; 2 — $M_B = 0,5$; 3 — $M_B = 1,0$; 4 — $M_B = 2,0$. Как видно из полученных результатов, во всех случаях аналогично случаю линейного нагружения [2] со временем происходит установление процесса, определяемое теми факторами, что скорость перемещения фронта постоянна, а рассматриваемый объект имеет неограниченную протяженность по радиальной координате. Однако характер приближения перемещений и напряжений на фронте к своим стацио-



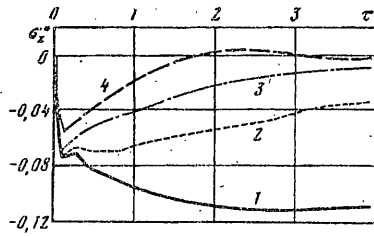
Фиг. 2



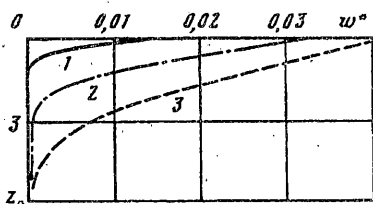
Фиг. 3



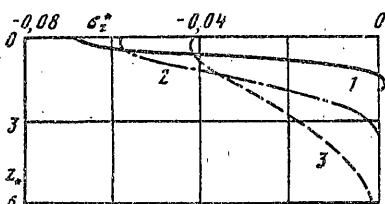
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

нарным значениям существенно зависит от режима движения (величины постоянной скорости c). Так, если для сравнительно невысоких скоростей перемещения и напряжения со временем возрастают по модулю, то для более высоких скоростей движения, особенно для напряжений, происходит отставание максимальных значений этих величин от фронта нагрузки, причем для $M_B = 2,0$ (сверхсейсмический режим) под фронтом нагружения прогибы и напряжения равны нулю.

На фиг. 6, 7 показано распределение перемещений и напряжений в материале полупространства по глубине для круговой нагрузки (3.5) в различные моменты времени: для кривых 1 — $\tau = 0,5$; 2 — $\tau = 1,5$; 3 — $\tau = 3,0$. При этом рассмотрен досейсмический режим движения ($M_B = 0,5$), а $r_* = M_B \tau$, т. е. приведены картины изменения перемещений и напряжений под фронтом нагрузки. Как видно из рисунков, со временем возмущения распространяются на все большую глубину, причем напряжения проникают несколько глубже и характер их зависимости от z_* имеет более сложный характер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков А. Г., Пожуев В. И. Стационарные задачи динамики для пластин и оболочек, взаимодействующих с инерционными средами // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1989. Т. 20. С. 3—83.
2. Пожуев В. И.; Полякова Н. П. Нестационарная реакция пластины на упругом полупространстве на действие подвижной нагрузки // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 175—182.

3. *Gakenheimer D. C.* Response of an elastic half space to expanding surface loads//Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1971. V. 38. No. 1. P. 99—110.
4. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
5. *Namada M., Kadota K., Kodama J.* A numerical method of Hankel transform for axisymmetric problems of elasticity//Bull. JSME. 1984. V. 27. No. 229. P. 1333—1338.
6. *Приварников А. К., Годес Ю. Я.* О решении первой граничной задачи для упругого многослойного основания//Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск: Днепропетровский ун-т, 1986. С. 6—28.

Запорожье

Поступила в редакцию
17.X.1991