МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1993

УДК 539.3

 И. А. БРИГАДНОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ГИПЕРУПРУГОСТИ

Рассматривается вариационная постановка краевой задачи деформирования гиперупругих материалов, потенциалы которых имеют рост по модулю градиента деформации не выше линейного. Показывается, что данная задача относится к классу вариационных проблем, характерной особенностью которых является существование предельной нагрузки. Этому классу, в частности, принадлежит краевая задача деформационной теории пластичности в перемещениях для идеально упругопластического материала.

Дается определение предельного параметра нагружения и предельной нагрузки. Доказывается достаточный признак конечности предельного параметра нагружения для широкого класса силовых воздействий и указывается способ вычисления его оценки сверху. Приводится пример нахождения точного значения предельной нагрузки.

1. Постановка краевой задачи эластостатики. Пусть тело в недеформированной конфигурации занимает связную ограниченную область $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ с локально липшицевой границей $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$. Точка $\mathbf{x} \in \Omega$ занимает в деформированной конфигурации положение $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^3$. Рассматриваются деформации, характеризуемые градиентом $F = \nabla\mathbf{u} : \Omega \to \mathbf{M}^3_+$ в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega$, где $\mathbf{M}^3_+$ — пространство вещественных матриц 3×3 с положительным детерминантом [1, 2]. К телу прикладываются квазистатические воздействия на части границы $\partial\Omega_1$ поверхностная деформация $\mathbf{u}_0$, на части границы $\partial\Omega_2$ поверхностная сила с плотностью $\mathbf{P}$, в Ω массовая сила с плотностью $\mathbf{f}$, причем $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \varnothing$, area $(\partial\Omega_1) > 0$.

Краевая задача определения деформированной конфигурации тела из однородного гиперупругого материала может быть поставлена в вариационной форме [1—3]:

$$\mathbf{u}^* = \arg\left[\inf\left\{I(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in V\right\}\right] \tag{1.1}$$

$$V = \{\mathbf{v} \in X:\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega_1} = \mathbf{u}_0\}, \qquad I(\mathbf{u}) = \int\limits_{\Omega} W(\nabla\mathbf{u})\, d\Omega - L(\mathbf{u})$$

$$L(\mathbf{u}) = \int\limits_{\Omega} A(\mathbf{f}, \mathbf{u})\, d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega_2} A(\mathbf{P}, \mathbf{u})\, dS, \qquad A(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \int\limits_{\mathbf{x}}^{\mathbf{u}} \mathbf{a} \cdot (\nabla\mathbf{u})^T \cdot d\mathbf{x}$$

где V — множество кинематически допустимых деформаций, X — некоторое подмножество банахова пространства, на котором определен функционал $I(\mathbf{u})$, $W : \mathbf{M}^3_+ \to \mathbf{R}_+$ — функция запасенной энергии деформации или потенциал, $A(*, \mathbf{u})$ — удельная, а $L(\mathbf{u})$ — полная работа внешних сил на деформации $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Рассмотрим класс гиперупругих материалов, потенциалы которых удовлетворяют следующему условию роста:

$$0 \le W(F) \le C_0\,|F| + a(J) \tag{1.2}$$

для любых $F \in \mathbf{M}^3_+$, где $|F| = (F_{ij}F_{ij})^{1/2}$, $J = \det F$, $a \in C(\mathbf{R}_+)$, $a \to +\infty$ при

$J \to +0$, $C_0 > 0$ (здесь и далее используется суммирование по повторяющимся индексам). Для несжимаемых материалов появляется дополнительное условие: $J = \det \nabla \mathbf{u} = 1$ почти всюду в Ω [1—4]. При этом $a = \mathrm{const}\ (J)$. К рассматриваемому классу относятся, например, потенциалы феноменологических теорий [4—7] при некоторых значениях констант, а также потенциал статистической теории высокоэластичности с учетом механического поля напряжений [8].

Оставляя в стороне общие вопросы математической корректности вариационной задачи (1.1), частично рассмотренные, например, в [1, 9], отметим, что в силу оценки (1.2) функционал $I(\mathbf{u})$ определен на семействе пространств Соболева $W^{1,p}(\Omega, \mathbf{R}^3)(p \geq 1)$. Для определения слабого решения краевой задачи эластостатики необходимо взять самое широкое из этих пространств ($p = 1$), понимая в этом случае краевое условие $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ на $\partial\Omega_1$ в смысле следов [10]. Однако указанное пространство не является рефлексивным [10, 11], поэтому задача (1.1) может не иметь слабого в указанном смысле решения [10]. Аналогичной особенностью обладает, например, краевая задача деформационной теории пластичности в перемещениях для идеально упругопластического материала [12]. Для этой задачи также характерно существование конечного значения «предельной нагрузки», т. е. такого значения внешних сил, при котором не существует никакого решения соответствующей вариационной задачи, понимаемого в обобщенном смысле [13]. Указанный эффект связан с неограниченностью функционала снизу. С практической точки зрения знание предельной нагрузки дает возможность оценить множество допустимых силовых воздействий, которые способно воспринимать данное тело. Покажем, что аналогичным эффектом обладает задача (1.1) для материалов (1.2).

2. Предельная нагрузка. Определим следующее множество:

$$B = \{(\mathbf{f}, \mathbf{P}):\ \mathbf{f} \in L^\infty(\Omega, \mathbf{R}^3),\quad \mathbf{P} \in L^\infty(\partial\Omega_2, \mathbf{R}^3),\ \inf\{I(\mathbf{u}):\ \mathbf{u} \in V\} > -\infty\} \tag{2.1}$$

Это множество содержит такие нагрузки ($\mathbf{f}$, $\mathbf{P}$), для которых функционал $I(\mathbf{u})$ ограничен снизу на V и, значит, существует какое-либо решение задачи (1.1). Пусть заданы ($\mathbf{f}^\circ$, $\mathbf{P}^\circ$) $\in B$ и рассмотрим последовательность нагрузок, изменяющихся пропорционально вещественному параметру $t \geq 0$.

Определение. Величина $t_* \geq 0$ называется предельным параметром нагружения, а ($t_*\mathbf{f}^\circ$, $t_*\mathbf{P}^\circ$) — предельной нагрузкой, если

$$(t\mathbf{f}^\circ, t\mathbf{P}^\circ) \in B \quad (0 \leq t \leq t_*); \qquad (t\mathbf{f}^\circ, t\mathbf{P}^\circ) \notin B \quad (t > t_*).$$

В силу однородности $L(\mathbf{u})$ по ($\mathbf{f}$, $\mathbf{P}$) задача (1.1) сводится к однопараметрическому семейству вариационных задач с функционалом

$$I_t(\mathbf{u}) = \int_\Omega W(\nabla \mathbf{u})\, d\Omega - tL_0(\mathbf{u}) \tag{2.2}$$

$$L_0(\mathbf{u}) = \int_\Omega A(\mathbf{f}^\circ, \mathbf{u})\, d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} A(\mathbf{P}^\circ, \mathbf{u})\, dS$$

Для материалов (1.2) можно доказать достаточный признак существования конечного значения предельного параметра нагружения для важных с практической точки зрения силовых воздействий.

Теорема. Пусть силы $\mathbf{f}^\circ \in C(\Omega, \mathbf{R}^3)$ и $\mathbf{P}^\circ \in C(\partial\Omega_2, \mathbf{R}^3)$ — «мертвые» [1, 2]. Если выполняется одно из двух условий:

$$\operatorname{area}(\partial\Omega_2) > 0,\ \mathbf{P}^\circ \not\equiv \mathrm{const} \text{ на } \partial\Omega_2,\ \mathbf{f}^\circ \equiv 0 \text{ в } \Omega$$

или

$$\operatorname{area}(\partial\Omega)_2 > 0,\ \mathbf{P}^\circ \equiv \mathrm{const} \text{ на } \partial\Omega_2 \text{ или } \operatorname{area}(\partial\Omega_2) = 0$$

$\mathbf{f}^\circ$ — непотенциальна в некоторой связной подобласти $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mathrm{vol}(\Omega_0) > 0$.

Тогда существует конечное значение предельного параметра нагружения ($0 \le t_* < \infty$).

Доказательство. Рассмотрим в $\mathbf{R}^3$ произвольную гладкую кривую

$$C = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}^c(s) \in C^3(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3)\}$$

имеющую ограниченную кривизну $k(s) \in [0, k_*]$ и ограниченное кручение $\tau(s) \in [-\tau_*, \tau_*]$ и проходящую через область Ω при $s \in (0, l)$, где s — длина дуги (с точностью до знака) [14]. Если area $(\partial\Omega_2) > 0$ и $P^\circ \not\equiv \mathrm{const}$ на $\partial\Omega_2$, тогда $\mathbf{x}^c(0), \mathbf{x}^c(l) \in \partial\Omega_2$, иначе C — замкнутая кривая, целиком лежащая внутри Ω.

Рассмотрим трубку T постоянного круглого сечения S, осью которой является C:

$$T = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}^c(s) + \rho\mathbf{e}_\rho(s, \theta): \quad s \in \mathbf{R}, \quad \rho \in [0, h), \quad \theta \in [0, 2\pi)\}$$

$$\mathbf{e}_\rho(s, \theta) = \cos\theta\,\mathbf{n}(s) + \sin\theta\,\mathbf{b}(s)$$

где $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ — единичные векторы нормали и бинормали к C соответственно. Радиус сечения трубки выберем из условия, чтобы $\overline{T} \cap \partial\Omega_1 = \varnothing$ и

$$0 < h(k_* + \tau_*) < 1 \tag{2.3}$$

Без потери общности можно считать, что $T \cap \Omega = \omega = \{\mathbf{x} \in T: \ s \in (0, l)\}$.

Поскольку $\overline{\omega} \cap \partial\Omega_1 = \varnothing$, существует допустимая деформация $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in V$ такая, что $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}$ в $\overline{\omega}$. Рассмотрим последовательность винтовых деформаций, описываемых следующими соотношениями в координатах (ρ, θ, s):

$$\mathbf{u}^m = \mathbf{x}^c(s_m) + \rho\mathbf{e}_\rho(s_m, \theta_m) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$s_m = s + mw(\rho), \quad \theta_m = \theta + m\varphi(\rho)$$

где произвольные пробные функции $w, \varphi \in \{y(\rho): y \in C^1[0, h], \ y(h) = y'(h) = 0\}$. Очевидно, что $\{\mathbf{u}^m\} \subset V$, причем в $\Omega \backslash \overline{\omega}$ $\mathbf{u}^m \equiv \mathbf{u}_0$, тогда как в $\overline{\omega}$:

$$J_m = \det \nabla\mathbf{u}^m = g_m/g_0$$

$$|\nabla\mathbf{u}^m| = [2 + J_m^2 + \rho^2(\tau_m - \tau_0)^2/g_0^2 + m^2(g_m^2 w'^2 + \rho^2(\tau_m w' + \varphi')^2]^{1/2}$$

$$g_m = 1 - \rho k(s_m)\cos\theta_m, \quad \tau_m = \tau(s_m) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Согласно (2.3) в $\overline{\omega}$ верны следующие оценки:

$$0 < \lambda_*/2 < J_m < 2/\lambda_* \tag{2.4}$$

$$0 \le C_1 m < |\nabla\mathbf{u}^m| \le C_2 m + C_3$$

$$\lambda_* = 1 - h(k_* + \tau_*) < 1$$

$$C_1 = C_1(\rho) = \lambda_*|w'| + \rho|\varphi'|$$

$$C_2 = 2\max|w'| + h(\tau_*\max|w'| + \max|\varphi'|)$$

$$C_3 = 2(1 + h\tau_*)/\lambda_* + 2^{1/2}$$

Из оценки снизу для модуля градиента деформации следует оценка снизу для нормы $\mathbf{u}^m(\mathbf{x})$ в $W^{1,1}(\Omega, \mathbf{R}^3)$ [10, 11]:

$$\|\mathbf{u}^m\|_{1,1} = \int_\Omega (|\mathbf{u}^m| + |\nabla\mathbf{u}^m|)\,d\Omega \ge \int_\omega |\nabla\mathbf{u}^m|\,d\Omega > C_4 m \tag{2.5}$$

$$C_4 = 2\pi l \int_0^h C_1(\rho)\,\rho d\rho \geq 0$$

Из оценки сверху для модуля градиента деформации следует оценка сверху для потенциалов (1.2) в $\overline{\omega}$:

$$W(\nabla \mathbf{u}^m) \leq mC_0C_2 + C_0C_3 + a_*$$

$$a_* = \max\{a(J):\ \ J \in [\lambda_*/2,\ \ 2/\lambda_*]\}$$

По (1.1) удельная работа «мертвой» силы на деформации $\mathbf{u}^m$ находится как $A(\mathbf{a},\ [\mathbf{u}]^m) = m(g_m w a_s + \rho(\tau_m w + \varphi)\, a_\theta)$, где $a_s = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_s$, $a_\theta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\theta$, а $\mathbf{e}_s$, $\mathbf{e}_\theta$ — орты касательных к соответствующим координатным линиям.

В результате функционал (2.2) можно оценить сверху следующим выражением:

$$I_t(u^m) \leq m(D_1^* - tD_2) + \text{const}, \qquad D_1 = C_0C_2 \operatorname{vol}(\omega) \geq 0 \tag{2.6}$$

$$D_2^* = \int_\omega [g_m w f_s^\circ + \rho(\tau_m w + \varphi) f_\theta^\circ]\, d\Omega + \int_S [g_m w(P_s^\circ|_{s=0} - P_s^\circ|_{s=l}) +$$

$$+ \rho(\tau_m w + \varphi)(P_\theta^\circ|_{s=0} - P_\theta^\circ|_{s=l})]\, dS$$

Покажем, что при выполнении одного из условий теоремы существует $D_2 > 0$. Действительно, если выполнено первое условие, тогда выбором кривой C и радиуса трубки h можно добиться выполнения одного из двух условий:

$$\int_S (P_s^\circ|_{s=0} - P_s^\circ|_{s=l})\, dS \neq 0, \qquad \int_S (P_\theta^\circ|_{s=0} - P_\theta^\circ|_{s=l})\, dS \neq 0$$

Если выполнено второе условие теоремы, тогда замкнутая кривая C помещается в подобласть $\Omega_0 \subset \Omega$, где $\mathbf{f}^\circ$ — непотенциальна. Выбором радиуса сечения трубки h можно добиться выполнения одного из двух условий:

$$\int_\omega f_s^\circ d\Omega \neq 0 \quad \text{или} \quad \int_\omega f_\theta^\circ d\Omega \neq 0$$

Как в первом, так и во втором случае выбором пробных функций w, φ можно сделать $D_2 > 0$.

Таким образом, если взять любое

$$t > t_+ = D_1/D_2 \geq 0 \tag{2.7}$$

тогда согласно (2.5) и (2.6) верно

$$\|\mathbf{u}^m\|_{1,1} \to +\infty; \qquad I_t(\mathbf{u}^m) \to -\infty \quad (m \to +\infty)$$

Итак, функционал $I_t(\mathbf{u})$ не только не является коэрцитивным на V [10, 13], но и вообще неограничен снизу при $t > t_+$. Значение t_+ из (2.7) можно рассматривать в качестве оценки сверху для предельного параметра нагружения $(0 \leq t_* \leq t_+ < \infty)$. Теорема доказана.

В некоторых задачах можно найти точное значение предельной нагрузки.

3. Пример. Рассмотрим следующую краевую задачу эластостатики. Длинная круглая труба, закрепленная по внешней поверхности, подвергается совместному осесимметричному кручению и продольному сдвигу «мертвой» поверхностной силой, приложенной по внутренней поверхности. Объемных сил нет. Материал трубы является несжимаемым и подчиняется теории высокоэластичности [4, 8]:

$$W = 2\mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3), \qquad J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \tag{3.1}$$

где μ — модуль сдвига при малых деформациях, $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ — собственные числа матрицы $(F_{ik}F_{kj})^{1/2}$ (левой меры искажения [1, 2] или тензора кратностей удлинений [4]). Поскольку верна оценка

$$|F| = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{1/2} \geq 3^{-1/2} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

очевидно, что потенциал (3.1) удовлетворяет условию (1.2) с $a = -6\mu$, $C_0 = 2 \cdot 3^{1/2}\mu$.

В силу осевой симметрии задачи деформированная конфигурация трубы может быть описана следующими соотношениями в цилиндрических координатах (ρ, θ, z):

$$u(\rho, \theta, z) = x(\rho, \theta + \varphi(\rho), z + w(\rho))$$

$$w(b) = \varphi(b) = 0 \tag{3.2}$$

Реализуется обобщенная плоская деформация ($\lambda_\rho \equiv 1$) [2, 4] и автоматически выполняется условие несжимаемости ($J \equiv 1$). Вариационная задача (1.1) принимает следующий вид:

$$(w_*, \varphi_*) = \arg [\inf \{I(w, \varphi): (w, \varphi) \in V\}] \tag{3.3}$$

$$V = \{(w, \varphi) \in (W^{1,1}(a, b))^2 : w(b) = \varphi(b) = 0\}$$

$$I(w, \varphi) = \int_a^b (4 + w'^2 + \rho^2\varphi'^2)^{1/2} \rho d\rho - D_z a w(a) - D_\theta a^2 \varphi(a)$$

где D_z, D_θ — продольная и тангенциальная составляющие приведенной «мертвой» поверхностной силы на внутреннем радиусе трубы с плотностью $0{,}5\ P/\mu$.

В силу выпуклости задачи (3.3) как по функционалу, так и по множеству допустимых функций, локально экстремальное решение сообщает функционалу глобальный минимум, если оно существует [10, 13].

Из необходимого условия стационарности функционала $I(w, \varphi)$ находим локально экстремальное решение:

$$w_*(\rho) = aD_z \left[\operatorname{arch}\left(\frac{2b^2/a^2 - D_z^2}{D}\right) - \operatorname{arch}\left(\frac{2\rho^2/a^2 - D_z^2}{D}\right)\right] \tag{3.4}$$

$$\varphi_* = \operatorname{sign}(D_\theta)\left[\arccos\left(\frac{2D_\theta^2 a^2/b^2 + D_z^2}{D}\right) - \arccos\left(\frac{2D_\theta^2 a^2/\rho^2 + D_z^2}{D}\right)\right]$$

$$D = (D_z^4 + 4D_\theta^2)^{1/2}$$

Видно, что оно определено (существует) только для приведенных сил, удовлетворяющих следующему ограничению:

$$D_z^2 + D_\theta^2 \leq 1 \tag{3.5}$$

С математической точки зрения отсутствие решения задачи (3.3) связано с неограниченностью снизу функционала $I(w, \varphi)$ на V. Действительно, взяв $D_z = t \sin\gamma$, $D_\theta = t\cos\gamma$ с произвольным $\gamma \in [0, 2\pi)$, легко убедиться, что при нарушении условия (3.5) $(t > 1)$: $I(w_m, \varphi_m) \to -\infty$ $(m \to +\infty)$ для $(w_m, \varphi_m) \in V$, например, вида

$$w_m(\rho) = m\Psi_m(\rho) \sin\gamma\, [\rho + (b - \rho)/(m + 1)]$$

$$\varphi_m(\rho) = m\Psi_m(\rho)\cos\gamma, \quad \Psi_m(\rho) = (b - \rho)^m/(b - a)^m$$

С физической точки зрения рассмотренный эффект, по всей видимости, связан с возможностью течения материала (3.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сьярле Ф.* Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 472 с.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Зубов Л. М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости//ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 406—410.
4. *Черных К. Ф., Литвиненкова З. Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 256 с.
5. *Черных К. Ф.* Теория тонких оболочек из эластомеров резиноподобных материалов//Успехи механики. 1989. Т. 6. № 1—2. С. 111—147.
6. *Sharda S. C., Tschoegl N. W.* A strain energy density function for compressible rubber-like materials//Trans. Soc. Rheol. 1976. V. 20. No. 3. P. 361—372.
7. *Valanis K. S., Landel R. F.* The strain-energy function of a hyperelastic materials in terms of the extension rations//J. Appl. Phys. 1967. V. 38. No. 7. P. 2997—3002.
8. *Бартенев Г. М., Хазанович Т. Н.* О законе высокоэластических деформаций сеточных полимеров//Высокомолек. соединения. 1960. Т. 2. № 1. С. 20—28.
9. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity//Arch. Rat. Mech. Anal. 1977. V. 63. P. 337—403.
10. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
11. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
12. *Серегин Г. А.* О корректности вариационных проблем механики идеально упругопластических сред//Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. С. 71—75.
13. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
14. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
16.IV.1991