МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1993

УДК 539.3

© 1993 г. С. В. КУЗНЕЦОВ

О ПРОСТОТЕ ПОЛЮСОВ СИНГУЛЯРНОЙ РЕЗОЛЬВЕНТЫ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Доказаны утверждения о мероморфности сингулярной резольвенты и простоте ее полюсов для сингулярных интегральных операторов, возникающих при решении краевых задач механики анизотропных упругих тел методами граничных интегральных уравнений.

1. Введение. При решении краевых задач теории упругости методами граничных интегральных уравнений [1, 2] в том случае, когда потенциалы двойного слоя или производные от потенциалов простого слоя сужаются на несущие поверхности, появляются интегральные операторы вида

$$\mathbf{B}(\lambda) \equiv \lambda\mathbf{I} - \mathbf{S} \tag{1.1}$$

где λ — числовой параметр, $\mathbf{I}$ — единичная диагональная матрица, $\mathbf{S}$ — сингулярный интегральный оператор. Для основных краевых задач теории упругости параметр λ принимает значения $\pm 1/2$, причем одно из них принадлежит спектру оператора $\mathbf{S}$.

Здесь спектром $\mathbf{S}$ называется множество таких (комплексных) λ, при которых оператор $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{S}$ необратим в классе непрерывных эндоморфизмов, действующих в соответствующем функциональном пространстве. Это определение совпадает с принятым в спектральной теории и незначительно отличается от определения спектра в теории интегральных уравнений.

В теории упругости изотропного тела границы спектра оператора $\mathbf{S}$ установлены в [3, 4], где было показано, что спектр $\mathbf{S}$ лежит в круге $|\lambda| \leq 1/2$. В [1] также для изотропного упругого тела получены результаты о дискретности спектра $\mathbf{S}$ с наличием единственной предельной точки — нуля. В случае анизотропного тела с произвольной упругой анизотропией аналогичный результат установлен в [5].

Стандартными методами спектральной теории [6] нетрудно показать, что для любого сингулярного оператора резольвента $\mathbf{R}(\lambda) = \mathbf{B}^{-1}(\lambda)$ является голоморфной функцией параметра λ всюду в $C\backslash \mathrm{Sp}\mathbf{S}$. Используя методы регуляризации сингулярных операторов, в [1] этот результат был уточнен: для изотропного тела резольвента $\mathbf{R}$ является мероморфной функцией λ^{-1}, а точки дискретного спектра представляют собой простые полюса резольвенты. В настоящей работе утверждения о мероморфности $\mathbf{R}(\lambda^{-1})$ и простоте полюсов резольвенты обобщены на анизотропные среды с произвольной упругой анизотропией.

2. Основные соотношения. Рассматривается однородная анизотропная упругая среда в R^3, уравнения равновесия которой имеют вид

$$\mathbf{A}(\partial_x)\,\mathbf{u} \equiv -\operatorname{div} \mathbf{C}\cdot\cdot\operatorname{sym}(\nabla\mathbf{u}) = 0 \tag{2.1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, $\mathbf{C}$ — четырехвалентный тензор упругости, характеризующий упругие свойства анизотропной среды. Предполагается, что тензор $\mathbf{C}$ строго эллиптичен, что обеспечивает строгую эллиптичность оператора $\mathbf{A}$.

Преобразование Фурье $f^{\vee}(\xi) = \int_{R^3} f(x) \exp(-2\pi i x \cdot \xi)\, dx$, $\xi \in R^3$, примененное к уравнению (2.1), дает символ оператора A:

$$A^{\vee}(\xi) = (2\pi)^2 \xi \cdot C \cdot \xi \tag{2.2}$$

Символ фундаментального решения уравнений (2.1) с учетом (2.2) может быть записан в виде

$$E^{\vee}(\xi) = A_0^{\vee}(\xi) / \det A^{\vee}(\xi) \tag{2.3}$$

где $A_0^{\vee}(\xi)$ — матрица алгебраических дополнений символа $A^{\vee}$. Формула (2.3) показывает, что символ $E^{\vee}$ положительно однороден по ξ степени -2 и строго эллиптичен. Обращение преобразования Фурье и восстановление по символу $E^{\vee}$ самого фундаментального решения в общем случае анизотропии удается осуществить лишь численно [7].

Для дальнейшего потребуется также символ оператора граничных напряжений

$$T^{\vee}(\nu, \xi) = 2\pi i \nu \cdot C \cdot \xi \tag{2.4}$$

где ν — вектор единичной нормали к исследуемой поверхности. С символами $E^{\vee}$, $T^{\vee}$ связан символ интегродифференциального оператора потенциала двойного слоя

$$W^{\vee}(\nu, \xi) = -T^{\vee}(\nu, \xi) \cdot E^{\vee}(\xi) \tag{2.5}$$

В аналогичном виде представим и символ композиции $T \cdot V$, где V — интегральный оператор потенциала простого слоя. Используемые ниже символы сужений основных операторов на граничные многообразия являются главными символами.

3. Свойства оператора B. Непосредственный анализ выражений (2.2) — (2.4) дает

$$T^{\vee}(\nu_{x'}, \xi) = -\frac{A^{\vee}(\xi) - A^{\vee}(\xi')}{2\pi i \xi''} - T^{\vee\prime}(\nu_{x'}, \xi') \tag{3.1}$$

$$\xi' = \mathrm{Pr}_{T^*_{x'}\partial\Omega}\xi, \quad \xi'' = \mathrm{Pr}_{\nu}\xi$$

где $T^*\partial\Omega$ — кокасательное расслоение граничного многообразия $\partial\Omega$, а $T^*_x\partial\Omega$ — соответствующий слой. В дальнейшем предполагается, что $\partial\Omega$ является вложенным многообразием класса $C^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$.

Применяя обратное преобразование Фурье по ξ'' и используя мультипликаторное свойство преобразования Гильберта из формул (2.5), (3.1), получим символы ${}_*W_{\pm}$ сужений оператора потенциала двойного слоя на $T^*\partial\Omega$:

$${}_*W_{\pm}(\nu, \xi') = \pm I/2 + {}_*S(\nu, \xi') \tag{3.2}$$

$${}_*S(\nu, \xi') = -\frac{A^{\vee}(\xi')}{2\pi i}\, \mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^{\vee}(\xi' + \xi''\nu)}{\xi''}\, d\xi'' +$$

$$+ T^{\vee\prime}(\nu, \xi') \int_{-\infty}^{\infty} E^{\vee}(\xi' + \xi''\nu)\, d\xi'' \tag{3.3}$$

По аналогии с (3.2) могут быть получены символы сужения на $T^*\partial\Omega$ композиции операторов $T \cdot V$:

$${}_*(T \cdot V)_{\pm} = \mp I/2 + {}_*S^*(\nu, \xi') \tag{3.4}$$

Непосредственный анализ выражения (3.3) показывает, что символ ${}_*S$ однороден по ξ' степени нуль и нечетен: ${}_*S(-\xi') = -{}_*S(\xi')$. Это позволяет применить теорему Марцинкевича о мультипликаторах, откуда получаем

Предложение 1. Оператор с символом $_*\mathrm{S}$ является матричным сингулярным интегральным оператором на $\partial\Omega$.

Предложение 2. Оператор $\mathrm{B}(\lambda)$ строго эллиптичен на $\partial\Omega$ при любых действительных $\lambda \neq 0$.

Доказательство. Анализ выражения (3.3) показывает, что символ $1/2(\mathrm{S}+\mathrm{S}')$ косоэрмитов при любых $\xi' \neq 0$. Отсюда следует, что собственные числа этого символа — чисто мнимые. Последнее обстоятельство обеспечивает строгую эллиптичность символа $\operatorname{sign}(\lambda)\operatorname{Re}(\eta\cdot[\lambda\mathrm{I} - \tfrac{1}{2}{}_*(\mathrm{S}+\mathrm{S}')]\cdot\eta) > 0$. Но

$$\eta\cdot[\lambda\mathrm{I} - \tfrac{1}{2}{}_*(\mathrm{S}+\mathrm{S}')]\cdot\eta = \eta\cdot[\lambda\mathrm{I} - \mathrm{S}]\cdot\eta \qquad (3.5)$$

Равенство (3.5) показывает, что символ $_*\mathrm{B}(\lambda)$, определенный формулой (1.1), также строго эллиптичен при $\lambda \neq 0$.

Следствие. В условиях предложения 2 существует двусторонний строго эллиптичный параметрикс $\mathrm{Q}(\lambda) \in S^\circ(\partial\Omega, R^3 \otimes R^3)$, такой что

$$\mathrm{B}(\lambda)\cdot\mathrm{Q}(\lambda) = \mathrm{I} + \mathrm{r}(\lambda) \qquad (3.6)$$

где r — сглаживающий оператор класса $S^{-1}(\partial\Omega, R^3 \otimes R^3)$.

В теории сингулярных интегральных уравнений [2, 8] параметрикс $\mathrm{Q}(\lambda)$ называют также регуляризатором оператора $\mathrm{B}(\lambda)$.

4. Спектральные свойства резольвенты. *Теорема 1.* Резольвента оператора S является мероморфной функцией параметра λ^{-1}.

Введение параметра λ^{-1} вместо λ в формулировку теоремы обусловлено необходимостью исключения особенности (не полюса) у резольвенты $\mathrm{R}(\lambda)$ в нуле.

Доказательство. Левая часть (3.6) показывает, что $\mathrm{r}(\lambda)$ является мероморфной функцией λ. Это становится очевидным, если параметрикс $\mathrm{Q}(\lambda)$ выбрать так, чтобы $_*\mathrm{Q}(\lambda) = {}_*\mathrm{B}^{-1}(\lambda)$ (в этом случае r оказывается дробно-рациональной функцией λ).

Сглаживающий оператор $\mathrm{r}(\lambda)$, $\lambda \neq 0$ в паре пространств (H^s, H^s), $s \geq 0$ вполне непрерывен и, следовательно, точки его дискретного спектра являются полюсами резольвенты $(\mu\mathrm{I} - \mathrm{r}(\lambda))^{-1}$ [9]. Здесь H^s обозначает пространство Соболева — Слободецкого индекса s. Далее остается заметить, что резольвента $\mathrm{R}(\lambda)$ может быть представлена в виде композиции $\mathrm{Q}(\lambda)\cdot(\mathrm{I} + \mathrm{r}(\lambda))^{-1}$.

Пусть Ω_* — ограниченная область в R^3 с границей $\partial\Omega$, а $\Omega_- = R^3\backslash\overline{\Omega}_+$ — соответствующее дополнение.

Лемма 1. Для внутренних областей единственными регулярными решениями уравнения

$$F(\mathrm{u}, \mathrm{u}) \equiv \int_{\Omega_+} \operatorname{sym}(\nabla\mathrm{u}) \cdot\cdot\, \mathrm{C} \cdot\cdot \operatorname{sym}(\nabla\mathrm{u})\, d\omega = 0 \qquad (4.1)$$

являются решения, отвечающие жесткому смещению $\mathrm{u} = \mathrm{a}_0 + \mathrm{W}_0\cdot\mathrm{x}$, $\mathrm{a}_0 \in R^3$, $\mathrm{a}_0 = \mathrm{const}$; W_0 — кососимметричный тензор второго ранга, определяющий поворот. Для внешних областей нетривиальных регулярных решений уравнения (4.1) нет.

Доказательство этой леммы для изотропного тела имеется в [2], в анизотропном случае доказательство приведено в [5].

Обозначим подпространство $\mathrm{E}_{k,\lambda} = \ker\mathrm{B}^k(\lambda) \subset H^s$, где B^k — композиция операторов $\mathrm{B}(\lambda)$.

Лемма 2. Для любых $\lambda \in \mathrm{Sp}\,\mathrm{S}$ будет $\mathrm{E}_{1,\lambda} = \mathrm{E}_{2,\lambda}$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathrm{E}_{1,\lambda} \subset \mathrm{E}_{2,\lambda}$. Предположим, что $\mathrm{E}_{2,\lambda}$ не совпадает с $\mathrm{E}_{1,\lambda}$. Пусть $\psi_2 \in \mathrm{E}_{2,\lambda}$, $\psi_2 \notin \mathrm{E}_{1,\lambda}$ и $\|\psi_2\|_s = 1$, тогда

$$\mathrm{B}^*(\lambda)\,\psi_2 = \psi_1, \quad \psi_1 \in \mathrm{E}_{1,\lambda}, \quad \psi_1 \neq 0 \qquad (4.2)$$

Имеем следующие соотношения, вытекающие из (1.1), (4.2):

$$(1 + 2\lambda)\, B^* (1/2)\, \psi_1 + (1 - 2\lambda)\, B^* (-1/2)\, \psi_1 = 0$$

$$(1 + 2\lambda)\, B^* (1/2)\, \psi_2 + (1 - 2\lambda)\, B^* (-1/2)\, \psi_2 = -2\psi_1 \tag{4.3}$$

Рассмотрим потенциалы простого слоя V_1, V_2, порожденные плотностями ψ_1, ψ_2 соответственно. Формула Грина, записанная для областей Ω_+, Ω_-, с учетом (3.4) дает [5]:

$$F_+ (V_k, V_k) = - \int_{\partial\Omega} V_k \cdot B^* (1/2)\, \psi_k\, d\omega'$$

$$F_- (V_k, V_k) = - \int_{\partial\Omega} V_k \cdot B^* (-1/2)\, \psi_k\, d\omega' \quad (k = 1, 2) \tag{4.4}$$

где F_+, F_- обозначают интегрирование в (4.1) по Ω_+, Ω_-. Из (4.3), (4.4) следует

$$(1 + 2\lambda)\, F_+ (V_1, V_1) + (1 - 2\lambda)\, F_- (V_1, V_1) = 0 \tag{4.5}$$

Если же первое уравнение в (4.3) домножить на V_2, а второе — на $-V_1$ и проинтегрировать по $\partial\Omega$, преобразуя поверхностные интегралы в объемные, то получим

$$F_+ (V_1, V_1) - F_- (V_1, V_1) = 0 \tag{4.6}$$

Объединение (4.5), (4.6) дает $F_\pm (V_1, V_1) = 0$. Принимая во внимание лемму 1 и непрерывность потенциала простого слоя, отсюда получаем $V_1 \equiv 0$ в R^3, что в свою очередь влечет $\psi_1 = 0$. Полученное противоречие обеспечивает выполнение равенства $E_{1,\lambda} = E_{2,\lambda}$.

Теорема 2. Точки дискретного спектра оператора S являются простыми полюсами резольвенты.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in SpS$ и $\lambda_0 \neq 0$. В силу теоремы 1 эта точка является полюсом R, так что

$$R(\lambda) = \sum_{k=1}^{p} b_k (\lambda_0)\, (\lambda - \lambda_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\lambda_0)\, (\lambda - \lambda_0)^k \tag{4.7}$$

где b_k — конечномерные [9], а a_k — сингулярные операторы. Подстановка разложения (4.7) в тождество $B(\lambda) \cdot R(\lambda) = I$, $\lambda \notin SpS$ дает следующие соотношения:

$$B(\lambda_0) \cdot b_p (\lambda_0) = 0, \quad B(\lambda_0) \cdot b_{k-1} (\lambda_0) = -b_k (\lambda_0) \quad (k = 2, \ldots, p) \tag{4.8}$$

Выражения (4.8) показывают, что b_p действует как отображение из H^s в E_{1,λ_0}, а b_{p-1} — из H^s в E_{2,λ_0}. Но в силу леммы 2 $E_{1,\lambda_0} = E_{2,\lambda_0}$ и, таким образом, оператор b_p оказывается нулевым. Аналогичные рассуждения, примененные к операторам $b_{p-1}, \ldots, b_2$, показывают, что и они должны быть нулевыми. Следовательно, полюс λ_0 резольвенты R является простым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
2. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
3. *Giraud G.* Equations a integrals principales. Etude suivie d'une application//Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1934. V. 51. P. 251—372.
4. *Giraud G.* Equations et systemes d'equations on figurent des valeurs principales d'integrales// C. R. 1937. V. 204. P. 628—630.

5. *Кузнецов С. В.* К вопросу о дискретности спектра сингулярных интегральных операторов теории упругости//Изв. вузов. Математика. 1991. № 5. С. 26—31.
6. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. М.: Мир, 1972. 183 с.
7. *Кузнецов С. В.* Фундаментальные решения уравнений Ламе для анизотропных сред//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 50—54.
8. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
9. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.III.1993