МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1993

УДК 531.35

© 1993 г. Ю. И. БЕРДЫШЕВ

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ

Исследованы задачи построения областей достижимости материальной точки, совершающей свободное движение в ньютоновском поле [1, 2] и использующей для маневра импульс скорости, ограниченный по величине. Момент времени приложения импульса фиксирован. Получены точные (для первой задачи) и приближенные (для второй задачи) аналитические формулы построения границ областей достижимости. Частный случай первой задачи исследован в [3], один подход к решению второй задачи предложен в [4].

1. Рассматривается материальная точка, движущаяся под действием одной лишь центральной силы, определяемой формулой Ньютона [1, 2]. Траекторию невозмущенного движения называем исходной орбитой.

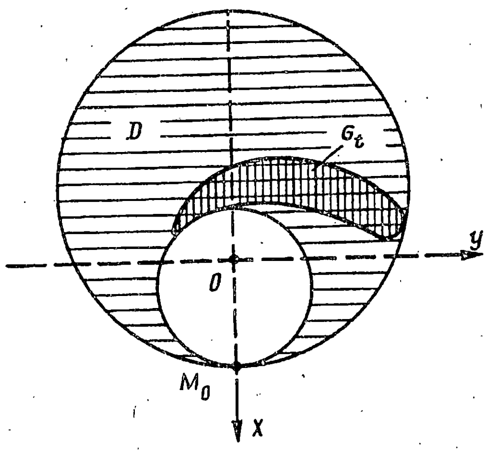
Первая задача состоит в определении в плоскости исходной орбиты множества D всех точек, которые материальная точка может достичь в произвольный момент времени, используя в фиксированный момент времени t_0 импульс скорости ΔV, ограниченный по величине заданным числом c_1. Вторая задача заключается в построении при условиях первой задачи в плоскости исходной орбиты множества G_t всех точек, которые материальная точка может достичь в наперед заданный момент времени t, $t \geq t_0$. Очевидно, при любом моменте времени t, $t \geq t_0$, имеет место включение $G_t \subset D$.

Первая задача в частном случае, когда скорость материальной точки в момент приложения импульса равна нулю, исследована в [3], где доказано, что D является эллипсом с фокусами в точке притяжения и точке приложения импульса. Его принято называть эллипсом безопасности [2]. Как будет показано далее, при введении ненулевой начальной скорости V геометрия области D существенно меняется. В общем виде это невыпуклая двусвязная область (см. фигуру).

Предварительно заметим, что любая точка на исходной орбите однозначно определяется углом ϑ — истинной аномалией, а импульс скорости, прикладываемый в точке ϑ,— парой (λ, Δ), где Δ — величина импульса, λ — угол между направлением импульса и вектором скорости материальной точки в точке ϑ. Будем также использовать в плоскости исходной орбиты полярную систему координат ϑr с центром в точке притяжения O. Полагаем, что точка M_0 приложения импульса фиксирована и имеет координаты ϑ_0, r_0. Пусть V_n, V_r (V_{n1}, V_{r1}) — трансверсальная и радиальная составляющие вектора скорости материальной точки в точке M_0 до (после) приложения импульса. Для того чтобы траектория материальной точки, порожденная импульсом (λ, Δ), прошла в некоторый момент времени через точку P с полярными координатами (ϑ, r), необходимо выполнение условия Гоудела [1]:

$$a_0 V_{n1}^2 + b_0 V_{n1} V_{r1} = c_0 \tag{1}$$

$$a_0 = r_0/r - \cos(\vartheta - \vartheta_0), \quad b_0 = \sin(\vartheta - \vartheta_0), \quad c_0 = \mu(1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0))/r_0$$



где μ — коэффициент, равный произведению гравитационной постоянной на массу Земли. Справедлива

Лемма. Если импульс скорости $\Delta\mathbf{V}$ не изменяет направления вектора скорости $\mathbf{V}$, то порожденная этим импульсом орбита будет в зависимости от того, больше или меньше длина вектора $\mathbf{V} + \Delta\mathbf{V}$ длины вектора $\mathbf{V}$, будет либо охватывать исходную орбиту, либо лежать в области, ограниченной исходной орбитой.

Предположим противное, т. е. существование точки $P = (\vartheta, r)$, отличной от M_0 и принадлежащей как исходной орбите, так и орбите L_1, порожденной касательным (не изменяющим направление скорости) импульсом $\Delta\mathbf{V}$. Тогда имеем

$$a_0 V_n^2 + b_0 V_n V_r = c_0, \quad a_0 V_{n1}^2 + b_0 V_{n1} V_{r1} = c_0$$

По условию леммы $V_{n1} = kV_n$, $V_{r1} = kV_r$, где k — число, отличное от единицы. В результате получим $c_0 k = c_0$, $k \neq 1$.

По условию (1) эти соотношения возможны лишь при равенстве разности $\vartheta - \vartheta_0$ нулю либо 2π. Последнее означает совпадение точек M_0, P. В соответствии с известной формулой [1] большая полуось орбиты тем меньше в рассматриваемом случае, чем меньше величина скорости в точке M_0 и наоборот. Лемма доказана.

С использованием этой леммы нетрудно показать, что в любую граничную точку (за исключением M_0) области D материальная точка может попасть лишь при условии $\Delta = c_1$. С учетом последнего равенства из (1) после некоторых преобразований имеем

$$r = r_0 F_1 / F_3, \quad F_1 = (V_n (c \cos \lambda + 1) - V_r c \sin \lambda)^2 \tag{2}$$

$$F_2 = V_n V_r (c \cos \lambda + 1)^2 + (V_n^2 - V_r^2)\, c \sin \lambda\, (c \cos \lambda + 1) - c^2 V_n V_r \sin^2 \lambda$$

$$F_3 = F_1 \cos \psi - F_2 \sin \psi + \mu (1 - \cos \psi)/r_0$$

$$\psi = \vartheta - \vartheta_0, \quad c = c_1/V, \quad V = (V_n^2 + V_r^2)^{1/2}$$

Соотношение (2) определяет зависимость длины r радиуса-вектора точки P от угла λ при фиксированном угле ψ. Для того чтобы P принадлежала границе области достижимости, необходимо выполнение равенства $dr/d\lambda = 0$. После некоторых громоздких преобразований, которые здесь опускаются, получим

$$dr/d\lambda = r_0 (a \sin \psi - b (1 - \cos \psi))/F_3^2 \tag{3}$$

$$a = cV^2F_1\,(c + \cos\lambda)$$

$$b = 2\mu c\,((c\cos\lambda + 1)\,V_n - cV_r\sin\lambda)\,(V_n\sin\lambda + V_r\cos\lambda)/r_0$$

Приравнивая правую часть (3) к нулю, получим уравнение

$$a\cos {}^1\!/\!{}_2\psi - b\sin {}^1\!/\!{}_2\psi = 0 \tag{4}$$

определяющее искомое значение λ по фиксированной величине ψ. Удобнее из (4) выразить ψ через λ:

$$\psi = \begin{cases} 2\,\mathrm{arctg}\,(a/b), & b \neq 0 \\ \pi, & b = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Соотношения (5), (2) описывают границу области D в параметрической форме. Параметром является угол λ, меняющийся в пределах от нулю до 2π. Для случая

$$V_r = 0,\quad V_n = (\mu/r_0)^{1/2} \tag{6}$$

граница области D изображена на фигуре. В общем случае область D деформируется, но характер ее остается прежним. Заметим, что в важном для практики случае (6) величины F_1, F_2, a, b в формулах (2), (5) принимают следующий вид:

$$F_1 = V^2\,(c\cos\lambda + 1)^2,\quad F_2 = cV^2\sin\lambda\,(c\cos\lambda + 1)$$

$$a = (c\cos\lambda + 1)\,(c + \cos\lambda)\,f,\quad b = 2f\sin\lambda,\quad f = cV^4\,(c\cos\lambda + 1)$$

$$d^2r/d\lambda^2 = -2r_0\,(1 + 2c\cos\lambda + c^2 + c\sin^2\lambda\cos\lambda)\,(1 - \cos\psi)/$$

$$/\,[(c\cos\lambda + 1)\,(c + \cos\lambda)\,F_3^2]$$

$$1 + 2c\cos\lambda + c^2 + c\sin^2\lambda\cos\lambda > 0$$

2. Теперь перейдем к построению области G_t. Предварительно отметим справедливость следующего утверждения.

Теорема. На границу области G_t в момент времени t материальная точка сможет попасть с исходной орбиты из точки M_0 лишь с использованием импульса максимальной величины.

Докажем, что в одном ньютоновском поле две эллиптические орбиты могут пересекаться лишь в двух точках. Предположим противное, т. е. существование хотя бы трех точек переключения M_i, $i \in \overline{0,2}$. Пусть V_{n1}, V_{r1} ($V_{n1} + \varepsilon$, $V_{r1} + \eta$) — трансверсальная и радиальная составляющие вектора скорости материальной точки в M_0 на первой (на второй) траектории; f_1, f_2 — углы между двумя парами векторов (OM_0, OM_1), (OM_0, OM_2). Полагаем (r_i — длина вектора OM_i):

$$a_i = r_0/r_i - \cos f_i,\quad b_i = \sin f_i,\quad c_i = \mu\,(1 - \cos f_i)/r_0,\quad i \in \overline{1,2}$$

Условия Гоудела [1], выражающие принадлежность точек $i \in \overline{0,2}$ траекториям L_1, L_2, имеют вид

$$a_1V_{n1}^2 + b_1V_{n1}V_{r1} = c_1$$

$$a_1\,(V_{n1} + \varepsilon)^2 + b_1\,(V_{n1} + \varepsilon)\,(V_{r1} + \eta) = c_1$$

$$a_2V_{n1}^2 + b_2V_{n1}V_{r1} = c_2$$

$$a_2\,(V_{n1} + \varepsilon)^2 + b_2\,(V_{n1} + \varepsilon)\,(V_{r1} + \eta) = c_2$$

Отсюда вытекают две системы уравнений

$$a_1g_1 + b_1g_2 = 0,\quad a_2g_1 + b_2g_2 = 0$$

$$a_1h_1 + b_1h_2 = c_1,\quad a_2h_1 + b_2h_2 = c_2 \tag{7}$$

$$g_1 = (2V_{n1} + \varepsilon)\,\varepsilon, \quad g_2 = \varepsilon V_{r1} + \eta V_{n1} + \varepsilon\eta, \quad h_1 = V_{n1}^2, \quad h_2 = V_{n1} V_{r1}$$

При этом в силу различия точек $M_i\,(i \in \overline{0,2})$ коэффициенты c_1, c_2 отличны от нулю. Для совместности первой системы в (7) необходимо, чтобы определитель $F = a_1 b_2 - a_2 b_1$ был равен нулю, а для совместности второй — отличен от нуля. Полученное противоречие свидетельствует о невозможности существования более двух точек пересечения.

Далее покажем, что за счет выбора сколь угодно малых величин ε, η время движения из точки M_0 в M_1 по дуге орбиты L_2 может быть как увеличено, так и уменьшено по сравнению с временем движения по орбите L_1.

При заданных величинах f_1, r_1, r_2 первое уравнение в первой системе (7) определяет зависимость между приращениями ε, η компонент V_{n1}, V_{r1} вектора скорости в точке M_0. Из этого уравнения при $b_1 \neq 0$ имеем

$$\eta = -(a_1 (2V_{n1} + \varepsilon) + b_1 V_{r1})\,\varepsilon / (b_1 (V_{n1} + \varepsilon)) \tag{8}$$

Если же $b_1 = 0$, то $\varepsilon = 0$, а η — любое число. Таким образом, при любых величинах f_1, r_1, r_2 за счет выбора достаточно малых ε, η (8) каждая орбита L_1 (соответствующая величинам V_{n1}, V_{r1}) может быть преобразована в другую — L_2, сколь угодно близкую к L_1. Пусть L_1', L_2' — дуги указанных орбит, соединяющие точки M_0, M_1, σ_1, σ_2 — площади секторов, ограниченных соответственно дугами L_1', L_2' и радиусами OM_0, OM_1. При достаточно малом ε и $\sigma_1 < \sigma_2$ время Δt_1 движения материальной точки по дуге L_1' меньше времени Δt_2 движения по дуге L_2'. Действительно, если

$$V_{n1}^2 + V_{r1}^2 \geq (V_{n1} + \varepsilon)^2 + (V_{r1} + \eta)^2 \tag{9}$$

то меньшую (по длине) дугу L_1' в силу интеграла энергии $V^2 - 2\mu/r = h$ [2] материальная точка будет проходить с большей (чем по дуге L_2') скоростью, а значит, за меньшее время. Поскольку орбиты L_1, L_2 пересекаются лишь в двух точках, то при невыполнении неравенства (9) время движения по дуге $L_2 \backslash L_2'$ из точки M_1 в точку M_0 теперь будет меньше времени движения по дуге $L_1 \backslash L_1'$. Но при невыполнении неравенства (9) период обращения по орбите L_1 меньше периода обращения по орбите L_2. Отсюда следует требуемое неравенство $\Delta t_1 < \Delta t_2$.

Таким образом, если в точке M_0 на исходной орбите прикладывается импульс немаксимальной величины, то имеется возможность за счет малого изменения вектора скорости как уменьшить, так и увеличить время Δt_1 перехода из M_0 в конечную точку M_1. Поэтому найдется дуга $L_1'' \subset L_1$, в каждую точку которой можно попасть за время Δt_1, и точка M_1 для нее будет внутренней. Отсюда с учетом леммы следует, что M_1 не может быть граничной точкой. Теорема доказана.

Поэтому для получения точки P_t, принадлежащей границе области G_t, достаточно задаться углом $\lambda\,(0 \leq \lambda \leq 2\pi)$, однозначно определяющим импульс $\Delta V = (\lambda, c_1)$, по известным формулам [1] вычислить параметры L, порождаемой этим импульсом, и отметить на ней точку P_t, соответствующую моменту времени t. При определении на орбите L точки P_t необходимо решать трансцендентное уравнение Кеплера

$$t - \tau = a_*^{3/2} (E - e \sin E)/\mu^{1/2} \tag{10}$$

где E — эксцентрическая аномалия точки P_t, e — эксцентриситет орбиты, a_* — большая полуось орбиты, τ — время прохождения через перицентр. Поскольку для получения всех граничных точек области G_t, соответствующих различным значениям параметра λ $(0 \le \lambda \le 2\pi)$, требуется многократное решение уравнения (10), то предлагается зависимость $E = f(t)$, вытекающую из (10), аппроксимировать полиномом n-й степени

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(t - \frac{T}{2}\right)^k \tag{11}$$

где T — период орбиты L, a_k $(k \in \overline{0, n})$ — коэффициенты, подлежащие определению. Для нахождения последних можно составить систему из $(n+1)$ уравнений с $(n+1)$ неизвестными a_k $(k \in \overline{0, n})$, отражающую факт прохождения графика функции $E = f(t)$ через некоторые, заранее вычисленные с использованием (10) точки (t_i, E_i), $i \in \overline{0, n}$. В частном случае при $n = 4$ удобно выбрать следующие пять точек $(0, 0)$, (b, h), $({}^1/_2T, 2h)$, $(T - b, 3h)$, $(T, 4h)$, где $h = \pi/2$, $b = a^{3/2}(h - e)/\mu^{1/2}$.

Тогда решением указанной системы являются следующие коэффициенты: $a_4 = a_2 = 0$, $a_0 = 2h$, $a_3 = u_3/u$, $a_1 = u_1/u$, $u = ½bT(T - b)(½T - b)$, $u_3 = h(½T - 2b)$, $u_1 = h\,[(½T)^3 - 2(½T - b)^3]$, зависящие от параметра λ $(0 \le \lambda \le 2\pi)$. Заметим, что порядок аппроксимирующего полинома (11) можно увеличить. Но тогда соответственно увеличится порядок системы уравнений, определяющей коэффициенты a_k, а аналитические формулы, выражающие a_k, через коэффициенты системы, станут более сложными. Теперь по найденной величине E по известной формуле [1, 2] однозначно определяется истинная аномалия ϑ точки P_t и длина ее радиуса-вектора. Изменяя параметр λ в пределах от 0 до 2π, получим множество всех граничных точек области G_t. Указанный метод приближенного построения областей G_t реализован в виде программы счета на ПЭВМ (см. фигуру, где $e = 0$, $r_0 = 6{,}5$, $c_1 = 1{,}4$, $t_0 = 0$, $t = 2$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эльясберг П. Е.* Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965. 540 с.
2. *Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г.* Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 445 с.
3. *Бэттин Р.* Наведение в космосе. М.: Машиностроение, 1966. 448 с.
4. *Кирпичников С. Н.* Область достижимости при одноимпульсном полете с кеплеровой орбиты // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1990. Вып. 4. С. 42—46.

Свердловск

Поступила в редакцию 5.VIII.1991