

УДК 531.53

© 1993 г. Л. Г. ЛОБАС, В. Г. ХРЕБЕТ

## СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ В МАЯТНИКОВЫХ ДВУХЗВЕННЫХ СИСТЕМАХ С КАЧЕНИЕМ

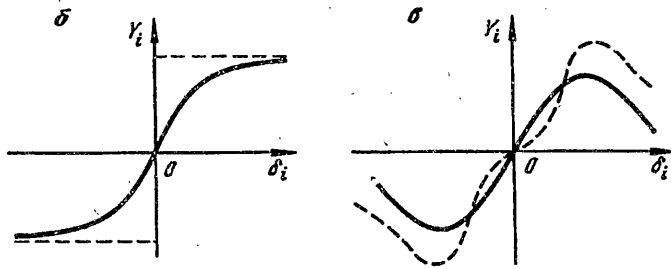
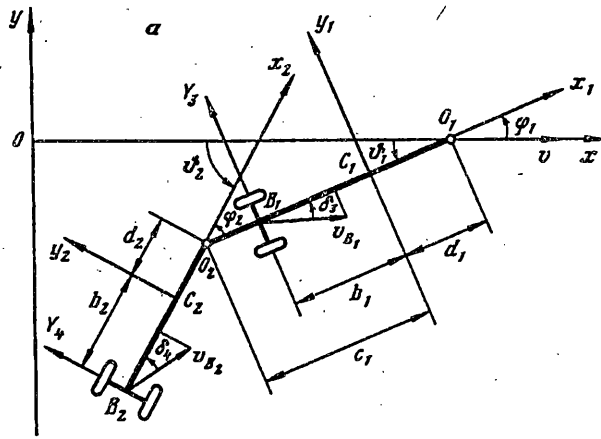
В рамках аксиоматики Рокара [1] рассматривается плоскопараллельное движение двухзвенной системы, моделирующей ведомые звенья сочлененных пневмоколесных машин [2]. Прямолинейная конфигурация такой связки тел при скоростях движения, превышающих критические значения, становится неустойчивой вследствие появления двух собственных значений матрицы линейного приближения с положительными действительными частями. Методами Ляпунова и Пуанкаре доказаны существование и единственность устойчивого предельного цикла при закритических скоростях, если расстояние между опорно-сцепными устройствами звеньев превосходит некоторое значение, и неустойчивого предельного цикла при докритических скоростях, если это расстояние меньше данного значения.

Двухзвенные системы имеют разнообразные практические приложения и почти столь же широкий спектр направлений теоретических исследований. Отметим, в частности, анализ свободного [3, 4] и вынужденного<sup>1</sup> плоскопараллельного движения связки двух твердых тел, соединенных идеальным цилиндрическим шарниром и моделирующих составной спутник в космическом пространстве, двухзвенный манипулятор, элемент дробильной машины. В системе Циглера [5], представляющей собой двойной маятник со следящей силой [6—10], последняя приводит к появлению неконсервативных позиционных сил. Маятниковая система, рассматриваемая ниже, обладает спецификой, состоящей в том, что диссипативные, потенциальные и неконсервативные позиционные силы имеют в ней общее физическое происхождение: они порождены рокаровскими аппроксимациями боковых реакций опорной плоскости.

Стационарные состояния пневмоколесных машин, а также их связки с одним ведомым звеном, исследовались в [1—3]. В сочлененных колесных машинах возможна колебательная форма потери устойчивости [4], а также бифуркация Андронова — Хопфа, наиболее ярко проявляющиеся при наличии нескольких ведомых звеньев. В публикуемой работе рассматривается случай двух ведомых звеньев при допущениях, исключающих влияние ведущего звена.

**1. Постановка задачи и устойчивость прямолинейного движения в некритическом случае.** Примем ведущее звено настолько массивным по сравнению с ведомыми звеньями, что воздействия последних не приводят к заметным изменениям в поведении ведущего звена. Считая движение этого звена прямолинейным и невозмущаемым, изучим колебательные движения ведомых звеньев в предположении, что точка сцепки  $O_1$  (фиг. 1, а) ведущего и первого ведомого звена движется прямолинейно с неизменной скоростью  $v$ . Аналогично можно поставить задачу о движении  $n$ -звенной [5] маятниковой системы с качением. Абсолютная ориентация звеньев определяется курсовыми углами  $\vartheta_1, \vartheta_2$ , относительная — углами складывания  $\varphi_1, \varphi_2$ , причем в рассматриваемом случае  $\vartheta_1 = \varphi_1$ . Пусть  $C_1, C_2, m_1, m_2, I_1, I_2$  — центры масс, массы и центральные моменты инерции звеньев

<sup>1</sup> Богданов А. С. Анализ движения шарнирного двухзвенника при фиксированных шарнирных моментах. М., 1990. 15 с.— Деп. в ВИНТИ, № 5677-В90; Богданов А. С. Исследование вынужденного движения шарнирного двухзвенника по заданной траектории. М., 1990. 9 с.— Деп. в ВИНТИ, № 6222-В90.



Фиг. 1

относительно вертикальных осей; \$\delta\_3, \delta\_4\$ — углы бокового увода; \$k\_3, k\_4\$ — коэффициенты сопротивления боковому уводу.

Зависимости боковых реакций \$Y\_i(\delta\_i)\$ могут быть как монотонными (фиг.1, б), так и с падающими участками (фиг. 1, в), причем последний случай приводит ко многим специфическим явлениям [6].

Поскольку феноменологический подход Рокара [1] голономизирует постановку задачи, уравнения плоскопараллельного движения двухзвенника возьмем в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \text{mom}_{O_1z_1} (Y_3 + Y_4) \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} \right) = \text{mom}_{O_1z_1} (Y_3 + Y_4) - \text{mom}_{O_2z_2} Y_4$$

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \{ (m_1 + m_2) v^2 + [J_1 + J_2 + m_2 l_1 (l_1 + 2d_2 \cos \varphi_2)] \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + \\ & + 2 (J_2 + m_2 d_2 l_1 \cos \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 2v \dot{\varphi}_1 [(m_1 d_1 + m_2 l_1) \sin \varphi_1 + \\ & + m_2 d_2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] + 2m_2 d_2 v \dot{\varphi}_2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2) \} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$J_1 = I_1 + m_1 d_1^2, \quad J_2 = I_2 + m_2 d_2^2, \quad l_1 = c_1 + d_1$$

Переходя от переменных \$\varphi\_1, \varphi\_2\$ к переменным \$\vartheta\_1, \vartheta\_2 = \varphi\_1 + \varphi\_2\$, из (1.1) и (1.2) получаем уравнения

$$\begin{aligned} (J_1 + m_2 l_1^2) \ddot{\vartheta}_1 + m_2 d_2 l_1 \ddot{\vartheta}_2 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1) = & -L_1 Y_3 - l_1 Y_4 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \\ + m_2 d_2 l_1 \ddot{\vartheta}_2 \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1) \end{aligned}$$

$$J_2 \ddot{\vartheta}_2 + m_2 d_2 l_1 \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = -L_2 Y_4 - m_2 d_2 l_1 \dot{\vartheta}_1^2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

$$L_j = b_j + d_j, \quad Y_s = Y_s(\delta_s), \quad \delta_3 = \text{arctg} \frac{v \sin \vartheta_1 + L_1 \dot{\vartheta}_1}{v \cos \vartheta_1} \quad (1.3)$$

$$\delta_4 = \text{arctg} \frac{v \sin \vartheta_2 + l_1 \dot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) + L_2 \dot{\vartheta}_2}{v \cos \vartheta_2 - l_1 \dot{\vartheta}_1 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}$$

Вследствие того, что  $Y_3(0) = 0$ ,  $Y_4(0) = 0$ , уравнения (1.3) имеют решения  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ ,  $\dot{\vartheta}_1 = \dot{\vartheta}_2 = 0$ . Назовем это решение невозмущенным и, положив  $Y_3 = k_3 \delta_3$ ,  $Y_4 = k_4 \delta_4$ , получим для него следующее уравнение в вариациях:

$$A_0 \ddot{z} + B \dot{z} + (C + P) z = 0$$

$$z = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} J_1 + m_2 l_1^2 & m_2 d_2 l_1 \\ m_2 d_2 l_1 & J_2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} k_3 L_1^2 + k_4 l_1^2 & k_4 l_1 L_2 \\ k_4 l_1 L_2 & k_4 L_2^2 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$C = \begin{pmatrix} k_3 L_1 & k_4 l_1 / 2 \\ k_4 l_1 / 2 & k_4 L_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & k_4 l_1 / 2 \\ -k_4 l_1 / 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Величины  $v$  и  $l_1$  являются параметрами, определяющими интенсивности диссипативных и неконсервативных позиционных сил соответственно. При  $l_1 = 0$  последние отсутствуют, а четырехмерная система (1.4) распадается на две независимые двумерные подсистемы, поскольку матрицы  $A_0$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $P$  становятся диагональными. С увеличением скорости  $v$  движения точки  $O_1$  диссипация в системе (1.4) уменьшается. Необходимое и достаточное условие отрицательности действительных частей корней  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  характеристического уравнения для (1.4) есть  $v < v_0$ , где

$$v_0^2 = -v(1 + \delta_0 l_1^2) P_2^{-1}(l_1^2), \quad v = k_3^2 k_4^2 L_1^2 L_2^2 (L_1 + L_2) \zeta$$

$$\zeta = k_3 J_2 L_1^2 + k_4 J_1 L_2^2, \quad \delta_0 = k_4 J_0 \zeta^{-1}, \quad J_0 = I_2 + m_2 b_2^2$$

$$P_2(l_1^2) = \alpha_0 l_1^4 + \beta l_1^2 + \gamma, \quad \alpha_0 = k_3 k_4^3 J_0 L_1 L_2 J', \quad J' = m_2 b_2 L_1 - J$$

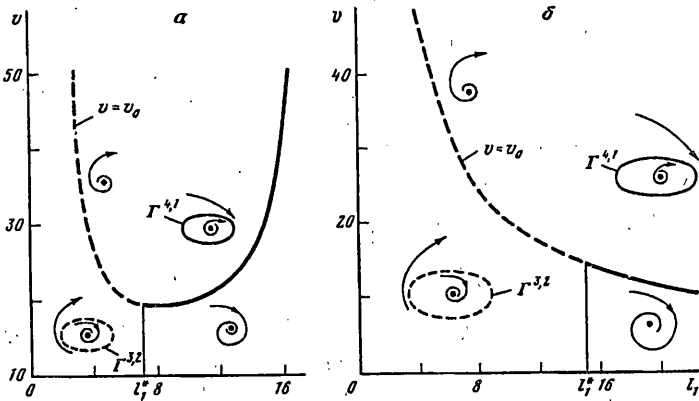
$$J = I_2 - m_2 b_2 d_2, \quad \beta = k_3 k_4^3 L_1 L_2 [J' \zeta + J_0 L_1 L_2 (k_3 J_2 + k_4 J_1) - k_3 m_2 I_2 L_1 L_2 (L_1 + L_2)^2]$$

$$\gamma = k_3 k_4 L_1^2 L_2^2 (k_3 J_2 L_1 - k_4 J_1 L_2)^2$$

Кривая  $v = v_0(l_1^2)$  (фиг. 2) является образом прямой  $\lambda = \pm i\omega$  комплексной  $\lambda$ -плоскости в пространстве параметров  $l_1$  [м] и  $v$  [м/с]. Для фиг. 2, а:  $\alpha_0 > 0$ ,  $\beta < 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\beta^2 - 4\alpha_0\gamma > 0$ , причём  $m_1 = 4905$  кг,  $m_2 = 9074$  кг,  $I_1 = 47\,580$  кг м<sup>2</sup>,  $I_2 = 147\,150$  кг м<sup>2</sup>,  $b_1 = b_2 = 3$  м,  $d_1 = d_2 = 1,5$  м,  $k_3 = k_4 = 254\,080$  Н/рад; для фиг. 2, б:  $\alpha_0 < 0$ ,  $\beta < 0$ ,  $\gamma > 0$ , причём  $m_1 = 14\,715$  кг,  $m_2 = 9810$  кг,  $I_1 = 47\,580$  кг м<sup>2</sup>,  $I_2 = 49\,050$  кг м<sup>2</sup>,  $b_1 = b_2 = 0,5$  м,  $d_1 = d_2 = 4$  м,  $k_3 = k_4 = 254\,080$  Н/рад.

2. Устойчивость движения в критическом случае. При  $v > v_0$  имеем  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ,  $\lambda_{3,4} = \kappa_0 \pm i\omega_{10}$ ,  $\kappa_0 < 0$ . Дифференциальные уравнения (1.3) инвариантны относительно замен переменных  $(t, \vartheta_1, \vartheta_2) \rightarrow (t, -\vartheta_1, -\vartheta_2)$ , поэтому тейлоровские разложения соответствующих функций содержат лишь нечетные степени переменных, а порядок главных частей нелинейностей равен трем. Положим

$$Y_3 = k_3 \delta_3 - k_3' \delta_3^3 + \dots, \quad Y_4 = k_4 \delta_4 - k_4' \delta_4^3 + \dots, \quad x = \text{col}(\vartheta_1, \dot{\vartheta}_1, \vartheta_2, \dot{\vartheta}_2)$$



Фиг. 2

и запишем систему (1.3) в виде

$$\dot{x} = Ax + P(x), \quad A = \| \| a_{jk} \| \|, \quad x \in R^4, \quad P(-x) = -P(x) \quad (2.1)$$

или в координатной форме

$$\dot{x}_j = \sum_{s=1}^4 a_{js} x_s + \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 a_{lmn}^{(j)} x_l x_m x_n + \dots \quad (2.2)$$

$$a_{lmn}^{(j)} = a_{lmn}^{(j)} = a_{nlm}^{(j)} \quad (j = 1, \dots, 4)$$

Пусть  $X^{(j)}$  — собственные векторы матрицы  $A$ , отвечающие ее собственным значениям  $\lambda_j$ , причем  $X^{(2)} = \bar{X}^{(1)}$ ,  $X^{(4)} = \bar{X}^{(3)}$ . Замена  $x = \alpha \xi$ , где

$$\alpha = \left\| \begin{array}{cccc} \operatorname{Re} X_1^{(2)} & \operatorname{Im} X_1^{(2)} & \operatorname{Re} X_1^{(4)} & \operatorname{Im} X_1^{(4)} \\ \operatorname{Re} X_2^{(2)} & \operatorname{Im} X_2^{(2)} & \operatorname{Re} X_2^{(4)} & \operatorname{Im} X_2^{(4)} \\ \operatorname{Re} X_3^{(2)} & \operatorname{Im} X_3^{(2)} & \operatorname{Re} X_3^{(4)} & \operatorname{Im} X_3^{(4)} \\ \operatorname{Re} X_4^{(2)} & \operatorname{Im} X_4^{(2)} & \operatorname{Re} X_4^{(4)} & \operatorname{Im} X_4^{(4)} \end{array} \right\|$$

преобразует уравнение (2.1) к такому

$$\dot{\xi} = G\xi + Q(\xi), \quad \xi \in R^4$$

$$G = \alpha^{-1}A\alpha = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_0 & -\omega_{10} \\ 0 & 0 & \omega_{10} & \kappa_0 \end{array} \right\|, \quad Q(\xi) = \alpha^{-1}P(\alpha \xi)$$

В новых переменных система (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -\omega_0 \xi_2 + Q_1(\xi_1, \dots, \xi_4), & \dot{\xi}_2 &= \omega_0 \xi_1 + Q_2(\xi_1, \dots, \xi_4) \\ \dot{\xi}_3 &= \kappa_0 \xi_3 - \omega_{10} \xi_4 + Q_3(\xi_1, \dots, \xi_4), & \dot{\xi}_4 &= \omega_{10} \xi_3 + \kappa_0 \xi_4 + Q_4(\xi_1, \dots, \xi_4) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$Q_j(\xi_1, \dots, \xi_4) = \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 A_{lmn}^{(j)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots; \quad A_{lmn}^{(j)} = A_{lmn}^{(j)} = A_{nlm}^{(j)}$$

Переходя в системе Ляпунова специального вида (2.3) к полярным координатам  $\xi_1 = r \cos \vartheta$ ,  $\xi_2 = r \sin \vartheta$  и исключая время  $t$ , получим [17]:

$$dr/d\vartheta = R(r, \vartheta, \xi_3, \xi_4), \quad d\xi_3/d\vartheta = Z(r, \vartheta, \xi_3, \xi_4), \quad d\xi_4/d\vartheta = S(r, \vartheta, \xi_3, \xi_4)$$

Введем величину  $\alpha_3(v) = 3/4\pi(A_{111}^{(1)} + A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)} + A_{222}^{(2)})/\omega$ , представляющую собой продолжение по параметру  $v$  в область  $v \neq v_0$  первого ляпуновского коэффициента  $\alpha_3(v_0)$ . Знак  $\alpha_3(v_0)$  определяет поведение функции последования [18]  $r(2\pi) = r_0 + \alpha_3(v_0)r_0^2 + \dots$  и устойчивость движения двухзвенника при критических скоростях.

Дополнительно к числовым значениям параметров, указанным в п. 1, примем  $k_3' = k_4' = 4\ 321\ 100$  Н. Устойчивые ( $\alpha_3(v_0) < 0$ ) участки кривой  $v = v_0(l_1^2)$  на фиг. 2 изображены сплошной линией, неустойчивые ( $\alpha_3(v_0) > 0$ ) — штриховой. Рассмотрим какую-нибудь точку неустойчивого участка. Для  $l_1 = \text{const}$  с ростом параметра  $v$  неустойчивый предельный цикл  $\Gamma^{3,2}$ , существующий при  $v < v_0$ , уменьшается в размерах и при  $v = v_0$  «садится» на начало координат четырехмерного фазового пространства. Для аналогичной же точки устойчивого участка с увеличением параметра  $v \geq v_0$  от состояния равновесия ответвляется периодическое решение  $\Gamma^{4,1}$ . Указанные динамические ситуации происходят по сценариям [19]:

$$O^{4,0} + \Gamma^{3,2} \rightarrow O^{2,2}, \quad O^{4,0} \rightarrow O^{2,2} + \Gamma^{4,1}$$

3. Применение методов Ляпунова и Пуанкаре для нахождения предельных циклов. Выбрав в качестве новых единиц измерения величины  $m, d, k_3$ , представим систему (1.3) в безразмерном виде; чтобы не усложнять записей, знак обезразмеривания параметров двухзвенника, независимой переменной и искомым функций в дальнейшем опустим. В качестве малого параметра  $\varepsilon$  при  $v \neq v_0$  примем действительную часть той пары собственных значений матрицы линейной части системы, которые являются продолжением по параметру  $v$  собственных значений  $\pm i\omega_0$ . Переходя затем к базису из собственных векторов этой матрицы, запишем систему (1.3) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \varepsilon \xi_1 - \omega \xi_2 + \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(1)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots, \\ \dot{\xi}_2 &= \omega \xi_1 + \varepsilon \xi_2 + \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(2)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots \\ \dot{\xi}_3 &= \kappa \xi_3 - \omega_1 \xi_4 + \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(3)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots, \\ \dot{\xi}_4 &= \omega_1 \xi_3 + \kappa \xi_4 + \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(4)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Введем новый масштаб измерения искомым функций в (3.1):  $\xi_k = (|\varepsilon|)^{1/2} \eta_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ). Окончательные соотношения для нахождения как устойчивого ( $\varepsilon > 0$ ), так и неустойчивого ( $\varepsilon < 0$ ) предельных циклов одинаковы при условии замены  $\varepsilon$  на  $-\varepsilon$ , поэтому далее изложение будем вести применительно к случаю  $\varepsilon > 0$ . Из (3.1) получаем

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -\omega \eta_2 + \varepsilon (\eta_1 + \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(1)} \eta_l \eta_m \eta_n) + \dots, \\ \dot{\eta}_2 &= \omega \eta_1 + \varepsilon (\eta_2 + \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(2)} \eta_l \eta_m \eta_n) + \dots \\ \dot{\eta}_3 &= \kappa \eta_3 - \omega_1 \eta_4 + \varepsilon \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(3)} \eta_l \eta_m \eta_n + \dots, \\ \dot{\eta}_4 &= \omega_1 \eta_3 + \kappa \eta_4 + \varepsilon \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(4)} \eta_l \eta_m \eta_n + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Порождающая система (при  $\varepsilon = 0$ ) имеет семейство периодических решений  $\eta_1^0 = M_0 \cos(\omega t)$ ,  $\eta_2^0 = M_0 \sin(\omega t)$ ,  $\eta_3^0 = 0$ ,  $\eta_4^0 = 0$ , причем периодическое решение системы (3.2) существует лишь для некоторых определенных значений параметра

$M_0$ . Не уменьшая общности, начальные условия для системы (3.2) возьмем в виде

$$\eta_1|_{t=0} = M_0 + \beta, \quad \eta_2|_{t=0} = 0, \quad \eta_3|_{t=0} = \beta_1, \quad \eta_4|_{t=0} = \beta_2 \quad (3.3)$$

$$\beta = \beta(\varepsilon), \quad \beta_{1,2} = \beta_{1,2}(\varepsilon), \quad \beta(0) = 0, \quad \beta_{1,2}(0) = 0$$

Периодическое решение системы (3.2) будем искать, используя метод возмущений Пуанкаре [20]:

$$\eta_1(t, \beta, \beta_1, \beta_2, \varepsilon) = M_0 \cos \omega t + B(t) \beta + D(t) \beta_1 + E(t) \beta_2 + \varepsilon C(t) + \varepsilon^2 P_1(t) + \beta^2 P_2(t) + \varepsilon \beta P_3(t) + \dots$$

$$\eta_2(t, \beta, \beta_1, \beta_2, \varepsilon) = M_0 \sin \omega t + B^*(t) \beta + D^*(t) \beta_1 + E^*(t) \beta_2 + \varepsilon C^*(t) + \varepsilon^2 Q_1(t) + \beta^2 Q_2(t) + \varepsilon \beta Q_3(t) + \dots \quad (3.4)$$

$$\eta_3(t, \beta, \beta_1, \beta_2, \varepsilon) = B_1(t) \beta + A_{11}(t) \beta_1 + A_{12}(t) \beta_2 + \varepsilon C_1(t) + \dots$$

$$\eta_4(t, \beta, \beta_1, \beta_2, \varepsilon) = B_2(t) \beta + A_{21}(t) \beta_1 + A_{22}(t) \beta_2 + \varepsilon C_2(t) + \dots$$

Подставляя (3.4) в дифференциальные уравнения (3.2) и начальные условия (3.3), получим

$$B = \cos \omega t, \quad B^* = \sin \omega t, \quad D = E = P_2 = D^* = E^* = Q_2 = B_1 = B_2 = 0$$

$$C(t) = R_1 \cos \omega t + R_2 \sin \omega t - \frac{t}{2\omega} (\gamma_1 \cos \omega t - \gamma_2 \sin \omega t) -$$

$$- \frac{1}{8\omega^2} (\gamma_3 \cos 3\omega t + \gamma_4 \sin 3\omega t)$$

$$C^*(t) = \left( R_1 + \frac{v_1 + w_1}{2\omega} \right) \sin \omega t + \left( \frac{u_1 - r_1}{2\omega} - R_2 \right) \cos \omega t -$$

$$- \frac{t}{2\omega} (\gamma_1 \sin \omega t + \gamma_2 \cos \omega t) - \frac{1}{8\omega} (u_3 + 3r_3) \cos 3\omega t - \frac{1}{8\omega} (v_3 - 3w_3) \sin 3\omega t$$

$$A_n = \exp(\kappa t) \cos \omega_1 t, \quad A_{12} = -\exp(\kappa t) \sin \omega_1 t, \quad A_{21} = \exp(\kappa t) \sin \omega_1 t$$

$$A_{22} = \exp(\kappa t) \cos \omega_1 t, \quad C_1 = \exp(\kappa t) [-(T_1 + T_2) \cos \omega_1 t + \quad (3.5)$$

$$+ (T_3 + T_4) \sin \omega_1 t] + T_1 \cos \omega t + S_1 \sin \omega t + T_2 \cos 3\omega t + S_2 \sin 3\omega t$$

$$C_2 = -\exp(\kappa t) [(T_1 + T_2) \sin \omega_1 t + (T_3 + T_4) \cos \omega_1 t] +$$

$$+ T_3 \cos \omega t + S_3 \sin \omega t + T_4 \cos 3\omega t + S_4 \sin 3\omega t$$

$$u_1 = 3/4 M_0^3 (A_{111}^{(1)} + A_{122}^{(1)}), \quad v_1 = 3/4 M_0^3 (A_{112}^{(1)} + A_{222}^{(1)})$$

$$u_3 = M_0^3 (A_{111}^{(1)} - 3A_{122}^{(1)})/4, \quad v_3 = M_0^3 (3A_{112}^{(1)} - A_{222}^{(1)})/4$$

$$w_1 = 3/4 M_0^3 (A_{111}^{(2)} + A_{122}^{(2)}), \quad r_1 = 3/4 M_0^3 (A_{112}^{(2)} + A_{222}^{(2)})$$

$$w_3 = M_0^3 (A_{111}^{(2)} - 3A_{122}^{(2)})/4, \quad r_3 = M_0^3 (3A_{112}^{(2)} - A_{222}^{(2)})/4$$

$$\gamma_1 = -\omega (2M_0 + u_1 + r_1), \quad \gamma_2 = \omega (v_1 - w_1)$$

$$\gamma_3 = \omega (3v_3 - w_3), \quad \gamma_4 = -\omega (3u_3 + r_3)$$

Пусть  $2\pi/\omega + \alpha$  — период искомого решения. Из необходимых и достаточных условий периодичности функций (3.4):

$$\eta_s(2\pi/\omega + \alpha, \beta, \beta_1, \beta_2, \varepsilon) - \eta_s(0, \beta, \beta_1, \beta_2, \varepsilon) = 0 \quad (s = 1, \dots, 4)$$

находим

$$\beta_1 = \varepsilon(T_1 + T_2) + \dots, \quad \beta_2 = \varepsilon(T_3 + T_4) + \dots$$

$$\beta = \varepsilon P_3^{-1} \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) \left\{ C^* \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) \left[ (1 + A_{111}^{(0)} M_0^2) \omega^{-1} - (2M_0)^{-1} C^* \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) \right] - P_1 \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) \right\} + \dots$$

Уравнение для определения  $\beta$  имеет решение, обращающееся в нуль при  $\varepsilon = 0$  лишь при условии  $C(2\pi/\omega) \equiv -\pi\omega^{-1}\gamma_1 = 0$ . Отсюда

$$M_0^2 = -2\pi\omega^{-1}\alpha_3^{-1}(v) \quad (3.6)$$

Так как [22]  $\alpha = -\varepsilon M_0^{-1} \omega^{-1} C^*(2\pi/\omega) + \dots$ , а для системы (3.2):

$$C^* \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) \equiv -\frac{\pi}{\omega^2} \gamma_2 = -QM_0^2, \quad Q = \frac{3\pi}{4\omega} (A_{112}^{(1)} + A_{222}^{(1)} - A_{111}^{(2)} - A_{122}^{(2)})$$

то будем иметь

$$\alpha = -2\varepsilon \pi Q \omega^{-2} \alpha_3^{-1}(v) + \dots \quad (3.7)$$

Согласно (3.6) и (3.7) получим следующую зависимость между частотой  $\Omega = \omega(1 + \alpha\omega\pi^{-1}/2)^{-1}$  и амплитудой  $M_0$  порождающего решения

$$\Omega = \omega [1 + \varepsilon Q M_0^2 (2\pi)^{-1} + \dots]^{-1} \quad (3.8)$$

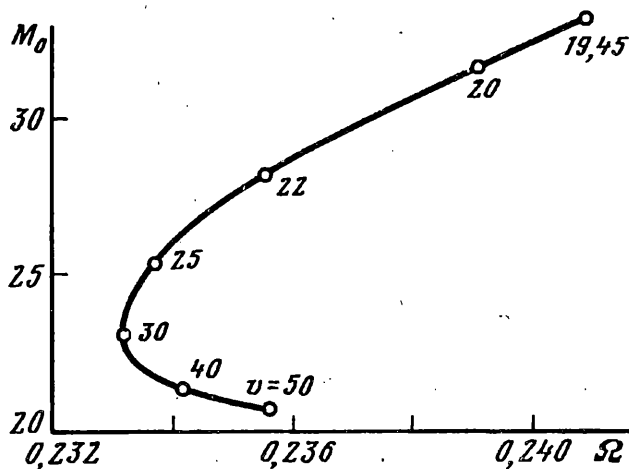
Величины  $R_1, R_2, u_1, v_1, \dots, r_3$  в (3.5) выражаются через  $\omega, A_{lmn}^{(1)}, A_{lmn}^{(2)}$  ( $l, m, n = 1, 2$ ); такими же являются, следовательно, функции  $C(t)$  и  $C^*(t)$ , а также  $\beta$ . Величины  $\beta_1, \beta_2$  и функции  $C_1(t), C_2(t)$  выражаются через  $\omega, \kappa, \omega_1, A_{lmn}^{(3)}, A_{lmn}^{(4)}$  ( $l, m, n = 1, 2$ ). Следовательно, при интегрировании четырехмерной системы (3.2) ее можно декомпозировать на две двумерные подсистемы не только в нулевом относительно  $\varepsilon$  приближении, но и при нахождении составляющей решения, пропорциональной первой степени  $\varepsilon$ .

Для каждого значения  $v > v_0$  можно найти согласно (3.6) единственное значение  $|M_0|$ , которому отвечают единственные и притом аналитические функции  $\beta(\varepsilon), \beta_1(\varepsilon), \beta_2(\varepsilon), \alpha(\varepsilon)$  и, в силу (3.4), единственное периодическое решение системы (3.2). Это формальное решение является аналитическим относительно  $\varepsilon$ ; таков же и период  $2\pi/\omega + \alpha$  этого решения. Из (3.7) и (3.8) в силу непрерывной зависимости от параметра следует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) = \alpha(0) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega(\varepsilon) = \Omega(0) = \omega$$

Для значений параметров двухзвенника, указанных при описании фиг. 2,  $a$ , и  $l_1 = 9$  м, на фиг. 3 приведена амплитудная кривая, отвечающая безразмерным значениям амплитуды  $M_0$  порождающего решения и частоты  $\Omega$ . По характеру зависимости частоты от амплитуды двухзвенник является жесткой колебательной системой.

Отметим, что в отличие от [20, 21] в данной работе матрица линейной части системы приводится к жордановой нормальной форме не только по критическим переменным, но и по некритическим; такой подход иницирован работой [18],



Фиг. 3

он также применялся с использованием идеи о центральном многообразии в [6—10] при анализе дивергентно-флаттерных бифуркаций двойного маятника со следящей силой. Это позволило, во-первых, конкретизировать зависимость величин  $\beta$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  от параметров системы и получить явные выражения для них в первом приближении и, во-вторых, декомпозировать систему четвертого порядка на две подсистемы второго порядка.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: Изд-во инстр. лит., 1959. 287 с.
2. Лобас Л. Г., Вербицкий В. Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. Киев: Наук. думка, 1990. 232 с.
3. Мохамед Э. А., Смольников Б. А. Свободное движение шарнирной связки двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 28—33.
4. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Относительные колебания и вращения плоской шарнирной связки двух твердых тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 8—17.
5. Пановко Я. Г., Сорокин С. В. О квазиустойчивости упруговязких систем со следящими силами // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 135—139.
6. Scheidl R., Troger H., Zeman K. Coupled flutter and divergence bifurcation of a double pendulum // Int. J. Non-Linear Mech. 1984. V. 19. No. 2. P. 163—176.
7. Lindtner E., Steindl A., Troger H. Stabilitätsverlust der gestreckten Lage eines räumlichen Doppelpendels mit elastischer Endlagerung unter einer Folgelast // ZAMM. 1987. V. 67. No. 4. P. 105—107.
8. Stribersky A., Troger H. Globales Verzweigungsverhalten am Beispiel eines längselastischen Doppelpendels unter Folgelast // ZAMM. 1988. V. 68. No. 4. P. 126—128.
9. Jin J.-D., Matsuzaki Y. Bifurcations in a two — degree — of — freedom elastic system with follower forces // J. Sound and Vibr. 1988. V. 126. No. 2. P. 265—277. |
10. Matsuzaki Y., Futura S. Codimension three bifurcation of a double pendulum subjected to a follower force with imperfection // AIAA Dyn. Spec. Conf., Long Beach, Calif., Apr. 5—6, 1990.— Washington, 1990. P. 387—394.
11. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Бифуркации и устойчивость стационарных движений пневмоколесных машин в постоянных силовых полях // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 28—33.
12. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Многообразие стационарных состояний двухзвенного автопоезда и их устойчивость // Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 2. С. 97—104.
13. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Бифуркации стационарных состояний связки абсолютно твердых и катящихся упругих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 30—37.



14. Лобас Л. Г. Курсовая устойчивость двухзвенных колесных машин // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 4. С. 104—111.
15. Лобас Л. Г. Математическая модель связанных систем с качением // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 6. С. 80—87.
16. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Метод определения особых точек и их характера в задаче о плоском движении колесного экипажа // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 944—948.
17. Ляпунов А. М. Собр. соч. В 3 т. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. 473 с.
18. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 384 с.
19. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фурфуров Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
20. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 244 с.
21. Веретенников В. Г. Об одном алгоритме построения периодических решений систем Ляпунова // Прикл. механика. 1991. Т. 27. № 2. С. 91—95.

Киев

Поступила в редакцию  
25.XI.1991