МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1993

УДК 539.3

© 1993 г. В. Л. МОНДРУС

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ В СЛУЧАЙНОМ ПРОЦЕССЕ

Задачи о распространении волн в средах с флуктуирующими параметрами решаются, в основном, приближенными методами, так как дифференциальные уравнения для амплитуды волны содержат в качестве коэффициентов случайные функции координат, описывающие параметры флуктуирующей среды. Причем характер приближения зависит от условий задачи: слабо или сильно флуктуируют параметры среды, каково соотношение между длиной волны и размерами неоднородностей [1—4].

Эти задачи считаются решенными, если определено математическое ожидание амплитуды волны, взаимная корреляционная функция флуктуаций амплитуды волны и неоднородностей среды распространения, а также автокорреляционная функция флуктуаций амплитуды волны. Последняя представляет особый интерес, так как дает возможность практически беспрепятственно оценить дисперсию флуктуаций амплитуды волны.

В публикуемой работе решена задача об определении автокорреляционной функции флуктуаций амплитуды волны непосредственно, так хак в прикладных задачах этот вопрос встает наиболее часто.

Кроме того решено отказаться от исследования проблемы, выделяя неоднородности параметров либо по времени, либо по координатам, а рассмотреть процесс в целом, используя понятие спектра пространственных корреляций $S_u(x, x'|\omega)$ [1, 2].

Эти функции, являясь преобразованием Фурье по времени автокорреляционной функции $K_u(x, x'|\tau)$, обладают по координатам свойствами корреляционных функций, а по частоте — свойствами спектральных плотностей, причем граничные условия для спектра пространственных корреляций $S_u(x, x'|\omega)$ остаются такими же, как и для корреляционной функции $K_u(x, x'|\tau)$ [1, 2].

1. Рассмотрим одномерное волновое уравнение, позволяющее в наиболее простой форме исследовать распространение волнового фронта в средах со случайными неоднородностями параметров, причем в ряде случаев [1, 3, 5] такая задача представляет самостоятельный интерес.

$$\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

где $W(x, t)$ — смещение, $b = (E/\rho)^{1/2}$ — скорость распространения волны, E — модуль упругости среды, ρ — плотность среды.

Если постоянные E и ρ имеют случайные пространственные отклонения от номинального значения, то скорость распространения волны представляется как случайная функция координаты x:

$$b^{-2} = k_0^2 + c(x) \tag{1.2}$$

где k_0^2 — математическое ожидание или среднее значение волнового числа; $c(x)$ — флуктуации параметров.

Величину смещения $W(x, t)$ представим в виде случайной функции по параметрам x и t.

$$W(x,t) = u_0(x,t) + v(x,t) \tag{1.3}$$

где $u_0(x, t)$ — математическое ожидание, $v(x, t)$ — флуктуации.

Подставляя (1.2) и (1.3) в (1.1), получим

$$\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - k_0^2 \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2} - k_0^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - c(x) \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2} - c(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1.4}$$

Осредняя (1.4) по множеству реализаций, будем иметь

$$\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} - k_0^2 \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle c(x)\, v(x,t) \rangle = 0 \tag{1.5}$$

где угловыми скобками <......> показана операция осреднения.

Вычитая из (1.4) (1.5) и отбрасывая члены, сравнимые с нулем, получим

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - k_0^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = c(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \tag{1.6}$$

Переходя в (1.6) от параметров x и t к x' и t', придем к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 v(x',t')}{(\partial x')^2} - k_0^2 \frac{\partial^2 v(x',t')}{(\partial t')^2} = c(x) \frac{\partial^2 v(x',t')}{(\partial t')^2} \tag{1.7}$$

Перемножив (1.6) и (1.7), осредняя по множеству реализаций, будем иметь

$$\frac{\partial^4 K_u(x, x' \mid t, t')}{\partial x^2 (\partial x')^2} - k_0^2 \left[\frac{\partial^4 K_u(x, x' \mid t, t')}{\partial x^2 (\partial t')^2} - \frac{\partial^4 K_u(x, x' \mid t, t')}{(\partial x')^2 \partial t^2} \right] + k_0^2 \frac{\partial^4 K_u(x, x \mid t, t')}{\partial t^2 (\partial t')^2} = \frac{\partial^4 K_u(x, x' \mid t, t')}{\partial t^2 (\partial t')^2} K_c(x, x') \tag{1.8}$$

где $K_u(x, x' \mid t, t') = \langle v(x, t) v(x', t') \rangle$ — автокорреляционная функция амплитуды волны, $K_c(x, x') = \langle c(x) c(x') \rangle$ — корреляционная функция среды распространения волнового фронта.

Полагая, что неоднородности среды экспоненциально коррелированы, представим $K_c(x, x')$ в виде

$$K_c(x, x') = \sigma_c^2 \exp(-\alpha |x' - x|) \tag{1.9}$$

где σ_c^2 — дисперсия неоднородностей, α — коэффициент широкополосности, характеризующий корреляционную зависимость между ординатами процесса.

Если $x' - x \geq 0$ (выбранное положительное направление распространения волнового фронта), то (1.9) примет вид

$$K_c(x, x') = \sigma_c^2 \exp[-\alpha (x' - x)] \tag{1.10}$$

2. Решение уравнения (1.8) осуществим, считая исследуемый процесс стационарным по времени. Для этого перейдем в (1.8) от дифференцирования по t и t' к дифференцированию по $\tau = t' - t$. Замечая, что $\partial/\partial t' = \partial/\partial\tau$, $\partial/\partial t = -\partial/\partial\tau$, получим на основании (1.8) с учетом (1.10):

$$\frac{\partial^4 K_u(x, x' \mid \tau)}{\partial x^2 (\partial x)^2} - k_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[\frac{\partial^2 K_u(x, x' \mid \tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K_u(x, x' \mid \tau)}{(\partial x')^2} \right] + k_0^4 \frac{\partial^4 K_u(x, x' \mid \tau)}{\partial \tau^4} = \frac{\partial^4 K_u(x, x' \mid \tau)}{\partial \tau^4} \sigma_c^2 \exp[-\alpha (x' - x)] \tag{2.1}$$

Для дальнейшего решения задачи перейдем от автокорреляционной функции

$K_u(x, x'|\tau)$ к спектру пространственных корреляций $S_u(x, x'|\omega)$ [1, 2] на основании временных преобразований Фурье

$$S_u(x, x'|\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_u(x, x'|\tau)[\exp(-i\omega\tau)]\,d\tau \tag{2.2}$$

$$K_u(x, x'|\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(x, x'|\omega)[\exp(i\omega\tau)]\,d\omega \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.1), получим

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^4 S_u(x, x'|\omega)}{\partial x^2(\partial x')^2} + k_0^2\omega^2\left[\frac{\partial^2 S_u(x, x'|\omega)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_u(x, x'|\omega)}{(\partial x')^2}\right] + \\ &+ \omega^4 S_u(x, x'|\omega)\{k_0^4 - \sigma_c^2\exp[-\alpha(x'-x)]\}\end{aligned} \tag{2.4}$$

Не нарушая общности изложения введем полярные координаты $x = r\cos\varphi$, $x' = r\sin\varphi$. Экспоненту в (2.4) преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned}&\exp[-\alpha(x'-x)] = \exp[-\alpha r(\sin\varphi - \cos\varphi)] = \exp[\alpha r(\cos\varphi - \sin\varphi)] = \\ &= \exp[\alpha r\sqrt{2}\cos(\varphi + \pi/4)] = f(r, \varphi)\end{aligned} \tag{2.5}$$

Тогда уравнение (2.4) примет вид

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8}\frac{\partial^4 S(r, \varphi|\omega)}{\partial r^4}(1 - \cos 4\varphi) + \frac{1}{4r}\frac{\partial^3 S(r, \varphi|\omega)}{\partial r^3}(1 + 3\cos 4\varphi) + \\ &+ \frac{\partial^2 S(r, \varphi|\omega)}{\partial r^2}\left(k_0^2\omega^2\cos 2\varphi - \frac{1 + 15\cos 4\varphi}{8r^2}\right) - \\ &- \frac{1}{r}\frac{\partial S(r, \varphi|\omega)}{\partial r}\left(K_0^2\omega^2\cos 2\varphi - \frac{1 + 15\cos 4\varphi}{8r^2}\right) + \frac{1}{8r^4}\frac{\partial^4 S(r, \varphi|\omega)}{\partial\varphi^4}(1 - \cos 4\varphi) - \\ &- \frac{1}{4r^4}\frac{\partial^3 S(r, \varphi|\omega)}{\partial\varphi^3}(2\sin 2\varphi - 3\sin 4\varphi) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S(r, \varphi|\omega)}{\partial\varphi^2}\left(k_0^2\omega^2\cos 2\varphi - \right. \\ &\left. - \frac{1 + 11\cos 4\varphi}{2r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial S(r, \varphi|\omega)}{\partial\varphi}\left(2k_0^2\omega^2\sin 2\varphi + \frac{2\sin 2\varphi - 3\sin 4\varphi}{r^2}\right) + \\ &+ \omega^4 S(r, \varphi|\omega)\{K_0^2 - \sigma_c^2\exp[\alpha r\sqrt{2}\cos(\varphi + \pi/4)]\}\end{aligned} \tag{2.6}$$

Спектр пространственных корреляций $S(r, \varphi|\omega)$ и экспоненту (2.5) представим в виде рядов Фурье

$$S(r, \varphi|\omega) = A(r, \omega) + \sum_j B_j\cos J\varphi + \sum_j D_j\sin J\varphi \tag{2.7}$$

$$f(r, \varphi) = M + \sum_j N_j\cos J\varphi + \sum_j K_j\sin J\varphi \tag{2.8}$$

$$M = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r, \varphi)\,d\varphi\right] = I_0(\alpha r\sqrt{2}) \tag{2.9}$$

Последнее выражение получено с учетом (2.5) на основании интегрального представления функции $I_0(\alpha r\sqrt{2})$ — модифицированной функции Бесселя первого рода нулевого порядка [6, 7].

Подставляя ряды (2.7) и (2.8) в (2.6), получим, сохраняя только первые члены разложения для осесимметричного случая изотропной среды (исключаются члены, содержащие дифференцирование по φ):

$$\frac{1}{8}\frac{\partial^4 A(r,\omega)}{\partial r^4}+\frac{1}{4r}\frac{\partial^3 A(r,\omega)}{\partial r^3}-\frac{1}{8r^2}\frac{\partial^2 A(r,\omega)}{\partial r^2}+\frac{1}{8r^3}\frac{\partial A(r,\omega)}{\partial r}+$$
$$+\omega^4(k_0^4-\sigma_c^2 M)A(r,\omega)=0 \tag{2.10}$$

где M — определяется согласно (2.9).

3. Решение (2.10) будем искать по аналогии с решением уравнения Бесселя в виде ряда [6, 8]:

$$A=r^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}a_k r^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k r^{\nu+k} \tag{3.1}$$

где ν — постоянная, подлежащая определению вместе с коэффициентами a_k.

Подставляя ряд (3.1) в уравнение (2.10), получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(\nu+k)(\nu+k-2)]^2 a_k r^{\nu+k-1}+8\omega^4\sum_{k=0}^{\infty}(k_0^4-\sigma_c^2 M)\,a_k r^{\nu+k+3}=0 \tag{3.2}$$

Тождественное выполнение (3.2) дает две пары значений величины ν: $\nu_1=0$, $\nu_2=-2$ и $\nu_3=0$, $\nu_4=2$, при которых выполняется условие равенства нулю всех коэффициентов при различных степенях r.

Причем в случае первой пары $\nu_{1,2}$ следует положить $a_0=0$, $a_2\neq 0$; в случае второй $\nu_{3,4}$ — $a_0\neq 0$, $a_2=0$. В результате получаем решение в следующей форме:

$$\begin{aligned}A_1&=a_2 r^{\circ}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{[8\omega^4(k_0^4-\sigma_c^2 M)]^k}{[4\cdot 6\cdot 8\ldots 4k(4k+2)]^2}r^{4k+2}a_2\\ A_2&=a_2 r^{-2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{[8\omega^4(k_0^4-\sigma_c^2 M)]^k}{[2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots(4k-2)\,4k]^2}r^{4k}a_2\end{aligned} \tag{3.3}$$

при $a_0=0$, $a_2\neq 0$.

$$\begin{aligned}A_3&=a_0 r^{\circ}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{[8\omega^4(k_0^4-\sigma_c^2 M)]^k}{[2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots(4k-2)\,4k]^2}r^{4k}a_0\\ A_4&=a_0 r^{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{[8\omega^4(k_0^4-\sigma_c^2 M)]^k}{[4\cdot 6\cdot 8\ldots 4k(4k+2)]^2}r^{4k+2}a_0\end{aligned} \tag{3.4}$$

при $a_0\neq 0$, $a_2=0$, где M — определяется согласно (2.9).

Задавая для каждой пары A_i значения коэффициентов a_2 и a_0 соответственно, получим выражения, напоминающие функции Бесселя, сами содержащие модифицированную функцию Бесселя первого рода нулевого порядка.

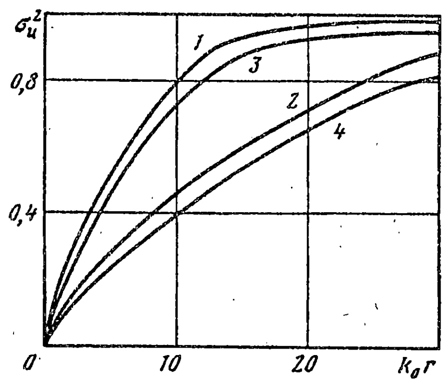
Полученное решение предлагается назвать «обобщенными функциями Бесселя».

Линейная независимость A_1-A_4 позволяет записать решение в виде:

$$A=(C_1A_1+C_2A_2)|_{a_0=0}+(C_3A_3+C_4A_4)|_{a_2=0} \tag{3.5}$$

где константы C_1-C_4 определяются из граничных условий с учетом a_0 и a_2.

Заметим, что граничные условия для спектра пространственных корреляций $S(r,\varphi|\omega)\to A(r,\omega)$ остаются такими, как и для корреляционной функции $K_u(x,x'|\tau)$, так как $S(r,\varphi|\omega)$ обладает по координатам свойствами корреляционной функции [1, 2].



В точке $x = x' = 0$ $(r = 0)$ для детерминированного возбуждения $K_u'(x, x' | \tau) = 0$. Следовательно, должно выполняться условие

$$A(r, \omega)|_{r=0} = 0 \tag{3.6}$$

Перед подстановкой (3.5) в (3.6) следует положить $C_2 = 0$, так как при $r = 0$ A_2 не определено.

Учитывая, что в первой паре слагаемых выражения (3.5) $a_2 \neq 0$, а во второй паре $a_0 \neq 0$, получим $C_1 = C_3 = 0$. Следовательно, будем иметь

$$A(r, \omega) = C_4 A_4 = C\left\{r^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{[8\omega^4 (k_0^4 - \sigma_c^2 M)]^k}{[4\cdot 6\cdot 8 \ldots 4k(4k+2)]^2} r^{4k+2}\right\} \tag{3.7}$$

где $C = C_4 a_0$ — произвольная константа.

Подставляя (3.7) в (2.3), полагая на месте $S(x, x' | \omega)$ величину $A(r, \omega)$, найдем выражение для автокорреляционной функции стационарного по времени и неоднородного по координатам случайного процесса

$$K_u = C \int_{-\infty}^{\infty} \left\{r^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{[8\omega^4 (k_0^4 - \sigma_c^2 M)]^k}{[4\cdot 6\cdot 8 \ldots 4k(4k+2)]^2} r^{4k+2}\right\} [\exp(i\omega\tau)]\, d\omega \tag{3.8}$$

Результаты численного анализа приведены на фигуре. Кривые *1* и *2* построены на основе традиционного анализа распространения волн в случайно-неоднородной среде по методике, предложенной в [3], а кривые *3* и *4* — в соответствии с формулой (3.8). Все графики соответствуют одному значению параметра σ_c^2 — дисперсии неоднородностей среды распространения волнового фронта; по оси абсцисс отложены безразмерные координаты $k_0 r$; по оси ординат — значения величины σ_u^2, легко определяемой из (3.8).

Приведенные зависимости подтверждают данные экспериментов [5], определяющих, что по мере удаления от источника возбуждения растет значение флуктуационных составляющих, доля которых оценивается величиной σ_u^2 — дисперсией флуктуаций амплитуды волны.

Найденное решение позволяет достаточно быстро и эффективно оценить корреляционную функцию и дисперсию амплитуды волны для каждого конкретного случая на практике, не прибегая к обычным для таких процедур необходимых поисков целого ряда статистических характеристик [3, 5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
2. *Болотин В. В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1982. 352 с.

3. *Макаров Б. П.* Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов. М.: Машиностроение, 1983. 240 с.
4. *Соболев Д. Н.* К расчету конструкций, лежащих на статистически неоднородном основании//Строит. механика и расчет сооружений. 1965. № 1. С. 1—4.
5. *Макаров Б. П., Кочетков Б. Е.* Расчет фундаментов сооружений на случайно-неоднородном основании при ползучести. М.: Стройиздат, 1987. 256 с.
6. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. I, II. М.: Иностр. лит-ра, 1949. 456 с., 471 с.
7. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977. 224 с.
8. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 288 с.

Красногорск

Поступила в редакцию
9.IV.1992