

УДК 539.3

© 1993 г. В. В. ПОВИСОК, М. П. ФЕДУРУК, В. Н. ХУДИК

ТЕРМОДЕФОРМАЦИЯ ДВУХСЛОЙНОГО
БИМЕТАЛЛИЧЕСКОГО ДИСКА
ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

Способность слабовыпуклых термометаллических дисков резко изменять направление прогиба (выхлопывать) при достижении критических температур [1] позволяет использовать их в качестве основных конструктивных элементов в температурных переключателях и реле [2].

В работе построены рабочие характеристики диска в случае неравенства коэффициентов Пуассона материалов, составляющих диск, а также при наличии внешней нагрузки на основе численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих деформацию тонкой упругой осесимметричной биметаллической оболочки.

Уравнения, описывающие осесимметричные деформации пологих биметаллических оболочек, были получены в общем виде в [3] и независимо в [4]. Принятие гипотез Кирхгофа — Лява сводит задачу о деформации биметаллического диска как трехмерного тела к задаче о деформации поверхности спая, что существенно упрощает рассмотрение.

1. Основные уравнения. Рассмотрим диск радиуса a , составленный из двух материалов, толщины которых δ_1, δ_2 , модули Юнга — E_1, E_2 , коэффициенты Пуассона — σ_1, σ_2 , а коэффициенты теплового расширения — α_1, α_2 . Предполагается, что общая толщина $\delta = \delta_1 + \delta_2 \ll a$.

Следуя [31], выпишем уравнения равновесия элемента диска

$$N_0 = \frac{d}{dr} (rN_r) \equiv (rN_r)' \quad (1.1)$$

$$rN_r \frac{d}{dr} (w + H_s) + \frac{d}{dr} (rM_r) - M_0 = \Phi(r) \quad (1.2)$$

Здесь N_r, N_0 и M_r, M_0 — соответственно удельные силы и моменты в сечениях диска, w — осевое смещение поверхности спая диска, $H_s = H_s(r)$ — уравнение начальной ненапряженной поверхности спая, а функция $\Phi(r)$ определяется внешним давлением

$$\Phi(r) = - \int_0^r p(r') r' dr' \quad (1.3)$$

После ряда преобразований для функций w и N_r можно получить замкнутую систему уравнений

$$rw'''' + w'' - \frac{w'}{r} + \frac{BC_1 - B_1C}{2(BD - C^2)} (H'^2 - H_s'^2) - \frac{B}{BD - C^2} (rN_r H' + \Phi) = 0$$

$$\frac{B}{B^2 - B_1^2} [r(rN_r)'' + (rN_r)' - N_r] + \quad (1.4)$$

$$+ \frac{BC_1 - B_1C}{B^2 - B_1^2} \left(rw'' + w' - \frac{w'}{r} \right) + \frac{1}{2} (H'^2 - H_s'^2) = 0$$

где $H(r) = w(r) + H_s(r)$ — функция, описывающая деформированную поверхность спая, а значения коэффициентов B, B_1, C, C_1, D, D_1 приведены в [3].

Граничные условия для этой системы зависят от конкретной задачи. В случае, когда края диска заделаны таким образом, что он опирается ими о плоскость $z = 0$, должны выполняться следующие граничные условия (при $r = a$):

$$w(a) = 0, N_r(a) = 0 \quad (1.5)$$

$$M_r(a) = 0 \quad (1.6)$$

В центре диска при ($r = 0$) функции w, N_r должны быть ограниченными.

Всюду ниже начальная форма диска будет считаться сферической, так что $H_s(r) = -H_0(1 - r^2/a^2)$, H_0 — начальное отклонение центра диска от плоскости $z = 0$.

Переход к переменным

$$h = \frac{H}{H_0}, \quad \eta = \frac{r^2}{a^2}, \quad \delta^* = \left[\frac{2(BD - C^2)}{B^2 - B_1^2} \right]^{1/2}$$

$$U = \frac{a^2 B}{BD - C^2} N_r, \quad F = \frac{a^2 B}{BD - C^2} \frac{\Phi}{\delta^*}$$

где δ^* по порядку величины совпадает с толщиной диска, позволяет упростить уравнения (1.4):

$$4 \frac{d^2}{d\eta^2} \eta W = \frac{\gamma}{2} (W_s^2 - W^2) + UW - \frac{F}{\eta} \quad (1.7)$$

$$4 \frac{d^2}{d\eta^2} \eta U = \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} \right) (W_s^2 - W^2) - \gamma \left(UW - \frac{F}{\eta} \right) \quad (1.8)$$

$$\gamma = \frac{2^{1/2} (BC_1 - B_1C)}{[(B^2 - B_1^2)(BD - C^2)]^{1/2}}, \quad W_s = \frac{2H_0}{\delta^*}$$

Здесь функция W связана с функцией h , описывающей поверхность спая диска, соотношением

$$dh/d\eta = W/W_s \quad (1.9)$$

Условия (1.5) сводятся теперь очевидно к граничным условиям

$$h(1) = 0, \quad U(1) = 0 \quad (1.10)$$

После простых, но довольно громоздких преобразований условие (1.6) может быть записано в виде [3, 4]:

$$\tau = 1 - W_s^{-1} (W(1) + \frac{2}{1 + \sigma} W'(1) - \frac{\gamma}{1 + \sigma^*} U'(1)) \quad (1.11)$$

Здесь коэффициенты σ, σ^* лежат между коэффициентами Пуассона σ_1, σ_2 :

$$\min(\sigma_1, \sigma_2) \leq \sigma^* \leq \sigma \leq \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

$$\sigma = (V_{+1} - V_{-1}) / (V_{+1} + V_{-1}), \quad \sigma^* = (V_{+1} - V_0) / V_0 \quad (1.12)$$

$$V_n = (D + nD_1) - (C + nC_1)^2 / (B + nB_1)$$

а τ пропорционально температуре диска

$$\tau = T/T_0$$

$$T_0 = \left(\frac{4}{3} + \frac{\delta_1 \delta_2 (s_1 - s_2)^2}{3\delta^2 s_1 s_2} \right) \frac{\delta h_0}{a^2 (\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad s_n = \frac{E_n \delta_n^2}{1 - \sigma_n} \quad (1.13)$$

В случае, когда внешнее давление p не зависит от отклонения поверхности диска от плоскости $z=0$ (т. е. F не зависит от h), система уравнений (1.7), (1.8) является замкнутой и функции W , U однозначно определяются граничными условиями (1.10), (1.11). После вычисления W функция h находится простым интегрированием

$$h = -\frac{1}{W_s} \int_{\eta}^1 W d\eta \quad (1.14)$$

В переключающихся устройствах, однако, функция F , вообще говоря, зависит от h и форма поверхности диска определяется совместным интегрированием всех трех уравнений (1.7)—(1.9) с граничными условиями (1.10), (1.14).

2. Деформация биметаллического диска при отсутствии внешних сил. Деформация биметаллического диска, вызванная только изменением температуры, наиболее просто находится при равенстве коэффициентов Пуассона ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$) у материалов, составляющих диск. Константа γ , пропорциональная разности $\sigma_1 - \sigma_2$, в этом случае обращается в нуль и задача определения деформации диска сводится к решению уравнений

$$4 \frac{d^2}{d\eta^2} \eta \bar{W} = \bar{U} \bar{W}, \quad 4 \frac{d^2}{d\eta^2} \eta \bar{U} = W_s^2 - \bar{W}^2 \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$\bar{U}(1) = 0, \quad \bar{\tau} = 1 - \left[\bar{W}(1) + \frac{2}{1+\sigma} \bar{W}'(1) \right] W_s^{-1} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) с условиями (2.2) достаточно подробно исследованы в [4]. Выяснено, в частности, что при изменении температуры деформация биметаллического ненагруженного диска существенно зависит от начального прогиба диска H_0 , т. е. от параметра W_s . При различных значениях W_s построена зависимость температуры $\tau = T/T_0$ от относительного отклонения $h_0 = H(0)/H_0$ центра диска от плоскости $z=0$ и обнаружено, что, начиная с некоторого критического значения $W_s = W_*(\sigma)$, эта зависимость перестает быть монотонной и производная $d\tau/dh_0$ в окрестности точки $h_0 = 0$, $\tau = 1$ меняет знак [4]. Состояния диска на участке немонотонности являются неустойчивыми и, таким образом, при $W_s > W_*$ существуют температуры τ_1 , τ_2 :

$$\tau_1 = \bar{\tau}_1(W_s), \quad \tau_2 = 1 - (\bar{\tau}_1(W_s) - 1) \quad (2.3)$$

резкого перескока центра диска в устойчивое состояние.

Для полноты картины отметим, что найденное в [4] значение W_* является лишь первым в ряду критических значений $W_*^{(n)}$. При превышении параметром W_s следующего критического значения $W_*^{(2)}$ картина качественно усложняется и на участке неустойчивых состояний диска появляется участок относительной устойчивости. В общем случае можно показать, что деформированное состояние диска при малых отклонениях от плоскости $z=0$ (т. е. вблизи точки $h_0 = 0$, $\tau = 1$) является устойчивым относительно достаточно малых возмущений для значений параметра W_s , удовлетворяющих неравенствам

$$W_*^{(n)} \leq W_s \leq W_*^{(n+1)} \quad (n = 2, 4, 6 \dots) \quad (2.4)$$

причем критические значения практически не зависят от коэффициента Пуассона σ :

$$W_*^{(n)} = 8\sqrt{2} (n - 1/6) \quad (2.5)$$

Рассмотрим теперь деформацию диска при разных коэффициентах Пуассона материалов, составляющих диск ($\sigma_1 \neq \sigma_2$). Для константы γ и коэффициентов σ, σ^* , характеризующих теперь биметалл, могут быть получены соотношения

$$\gamma^2 \leq \frac{3|\sigma_1 - \sigma_2|^2}{8(1 - |\sigma_1 - \sigma_2|^2 - \sigma_1\sigma_2)} \quad (2.6)$$

$$\sigma - \sigma^* = \frac{1}{2} \gamma^2 (1 + \sigma) \quad (2.7)$$

из которых видно, что даже при довольно большом разбросе коэффициентов Пуассона, например при $|\sigma_1 - \sigma_2| \leq 0,1$; $1/2(\sigma_1 + \sigma_2) \approx 0,3$, параметр γ весьма мал ($\gamma \leq 0,075$), а различие между σ и σ^* и вовсе незначительно ($\sigma - \sigma^* \leq 0,004$). Вследствие этого разницу между коэффициентами Пуассона достаточно учесть лишь в линейном по γ приближении. Представим общее решение уравнений (1.7), (1.8) в виде

$$W(\eta) = \bar{W}(\eta) + \gamma W_\gamma(\eta), \quad U(\eta) = \bar{U}(\eta) + \gamma U_\gamma(\eta) \quad (2.8)$$

где \bar{W}, \bar{U} — решение уравнений (2.1), описывающее биметаллический диск с температурой $\bar{\tau}$ и отклонением центра \bar{h}_0 , материалы которого имеют один и тот же коэффициент Пуассона σ . Решению (2.8) соответствует температура диска

$$\tau = \bar{\tau} + \gamma \tau_\gamma, \quad \tau_\gamma = - \left[W_\gamma + \frac{2}{1 + \sigma} \frac{d}{d\eta} W_\gamma - \frac{1}{1 + \sigma} \frac{d}{d\eta} \bar{U} \right] W_s^{-1} \Big|_{\eta=1} \quad (2.9)$$

и отклонение центра диска

$$h(0) = \bar{h}(0) + \gamma h_\gamma(0), \quad h_\gamma(0) = - \int_0^1 \frac{W_\gamma d\eta}{W_s} \quad (2.10)$$

Линеаризуя по γ (1.7), (1.8), можно получить следующие уравнения для поправочных функций W_γ, U_γ :

$$4 \frac{d^2}{d\eta^2} \eta W_\gamma = \frac{1}{2} (W_s^2 - \bar{W}^2) + U_\gamma \bar{W} + \bar{U} W_\gamma \quad (2.11)$$

$$4 \frac{d^2}{d\eta^2} \eta U_\gamma = -2\bar{W} W_\gamma - \bar{U} \bar{W}$$

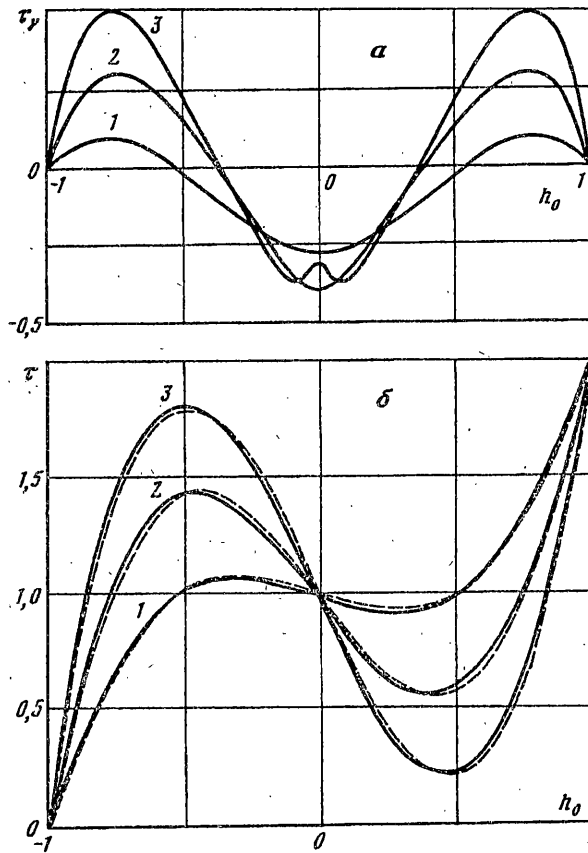
Аналитическое вблизи начала координат решение системы (2.11) представим в виде рядов Тейлора

$$W_\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} W_{\gamma n} \eta^n, \quad U_\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} U_{\gamma n} \eta^n \quad (2.12)$$

в которых все коэффициенты с номерами $n \geq 1$ выражаются через коэффициенты $W_{\gamma 0}, U_{\gamma 0}$. Таким образом, конечные при $\eta = 0$ решения образуют двухпараметрическое семейство. Один из параметров определяется из условия

$$U_\gamma(1) = 0 \quad (2.13)$$

а для определения второго параметра будем считать, что решению (2.8) соответствует то же отклонение центра диска, что и невозмущенному решению



Фиг. 1

\bar{W}, \bar{U} , т. е. потребуем выполнения условия

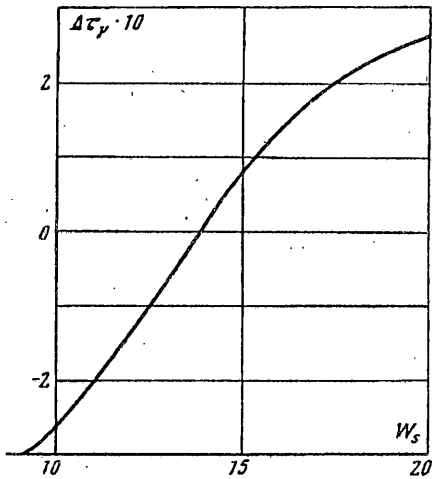
$$h_\gamma(0) = - \int_0^1 W_\gamma d\eta / W_s \quad (2.14)$$

Условиями (2.13), (2.14) решение определяется однозначно и может быть найдено численным интегрированием системы уравнений (2.11). После этого можно вычислить поправку τ_γ к температуре как функцию отклонения центра диска h_0 . Из свойств симметрии функций $\bar{U}, \bar{W}, U_\gamma, W_\gamma$ следует, что эта функция является четной $\tau_\gamma(h_0) = \tau_\gamma(-h_0)$. Она обращается в нуль при $h_0 = \pm 1$ (т. е. при $H = \pm H_0$), так как при этих значениях h_0 решением уравнений (2.11) с условиями (2.13), (2.14) являются тривиальные функции $W_\gamma = 0, U_\gamma = 0$.

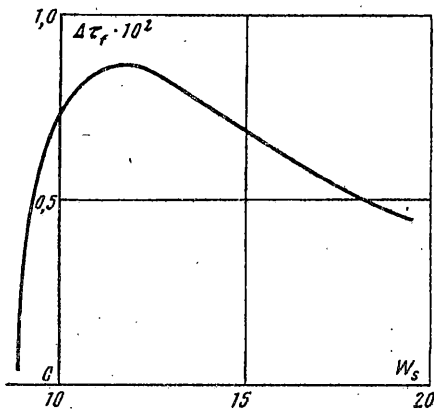
На фиг. 1,а приведена зависимость $\tau_\gamma = \tau_\gamma(h_0)$ при различных значениях параметра W_s (1 — $W_s = 10,5$; 2 — $W_s = 14,5$; 3 — $W_s = 18,5$; $\sigma = 0,3$), а на фиг. 1,б — зависимость температуры от отклонения центра биметаллического диска, для которого $\gamma = 0,075$ (штриховые линии соответствуют случаю $\gamma = 0$).

Отметим, что в линейном по γ приближении температуры перескока τ_1, τ_2 отличаются соответственно от $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$ на одну и ту же величину $\tau_1(W_s) - \bar{\tau}_1(W_s) \approx \tau_2(W_s) - \bar{\tau}_2(W_s) = \gamma \Delta\tau_\gamma(W_s)$, где $\Delta\tau_\gamma$ — поправка к температуре перескока, возникающая вследствие неравенства коэффициентов Пуассона. График функции $\Delta\tau_\gamma(W_s)$ приведен на фиг. 2.

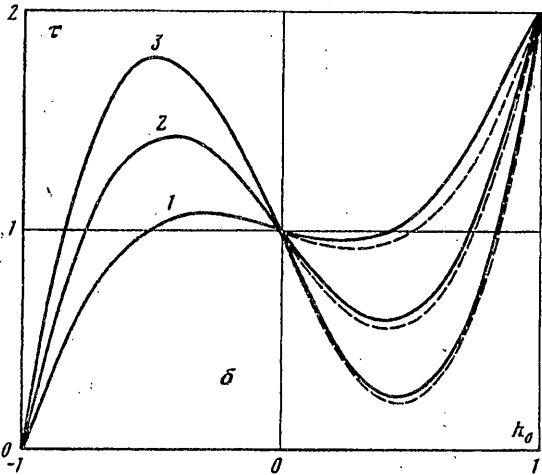
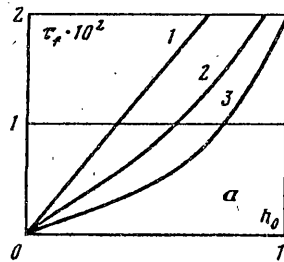
Отметим, что учет нелинейных по γ поправок при изменении параметра γ в практически интересном диапазоне совершенно не существен, так, например,



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

при $\gamma = 0,075$ график функции $\tau = \tau(h_0) + \gamma\tau_\gamma(h_0)$ на фиг. 1,б сливается с графиком функции $\tau = \tau(h_0)$, полученной путем численного интегрирования точных уравнений (1.7), (1.8).

3. Деформация биметаллического диска в переключающем устройстве. Пусть биметаллический диск является элементом температурного переключателя. При достижении прибором критической температуры центр диска резко меняет свое положение, оказывая давление на пружину, размыкающую контакты электрической цепи. Предположим, что контактная пружина имеет достаточно малую площадь в поперечном сечении, так что воздействие ее на диск эквивалентно приложению некоторой силы F к центру диска. Далее, будем считать, что пружина установлена таким образом, что эта сила отлична от нуля только при положительных отклонениях центра диска:

$$F = \begin{cases} 0, & H(0) \leq 0 \\ -kH(0), & H(0) > 0 \end{cases}$$

где k — жесткость пружины, $H(0)$ — отклонение центра диска от плоскости $z = 0$. Это означает, что функция $F(\eta)$ в уравнениях (1.7), (1.8), будучи постоянной во всех точках $\eta > 0$, уже не равна тождественно нулю

$$F = \frac{f(h_0 + |h_0|)}{2} \equiv \begin{cases} 0, & h_0 \leq 0 \\ fh_0, & h_0 > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$f = \frac{W_s}{4\pi} \frac{a^2 B}{(BD - C^2)} k \quad (3.2)$$

Для простоты рассмотрения ниже всюду предполагается, что коэффициенты Пуассона материалов, составляющих биметалл, одинаковы. Состояние диска в этом случае описывается уравнениями

$$4 \frac{d^2}{d\eta^2} \eta W = UW - \frac{1}{2} \frac{f(h_0 + |h_0|)}{\eta} \quad (3.3)$$

$$4 \frac{d^2}{d\eta^2} \eta U = W_s^2 - W^2 \quad (3.4)$$

$$dh/d\eta = W/W_s \quad (3.5)$$

решение которых должно удовлетворять граничным условиям в центре $h(0) = h_0$ и на краю диска

$$h(1) = 0, \quad U(1) = 0 \quad (3.6)$$

$$\tau = 1 - \left[W(1) + \frac{2}{1 + \sigma} W'(1) \right] W_s^{-1} \quad (3.7)$$

При критической температуре τ_c диск переходит из состояния с $h_0 < 0$ в состояние с $h_0 > 0$. Ясно, что температура τ_c остается неизменной, какой бы ни была жесткость контактной пружины, так как при выбранной конструкции переключателя наличие пружины вообще не сказывается на деформации диска при отрицательном положении его центра. При критической температуре τ_c диск переходит из состояния с $h_0 > 0$ в состояние с $h_0 < 0$, так что теперь ситуация радикально меняется. Решая уравнения (3.3)—(3.5), вычислим при разных жесткостях пружины такие важные характеристики переключателя, как критическую температуру τ_c и силу, с которой диск давит на пружину вплоть до момента отрыва.

Анализируя уравнения вблизи точки $\eta = 0$, обратим внимание на то, что поверхность плоского диска с опертыми краями, к центру которого приложена достаточно малая сила F , описывается формулой [5]:

$$H(\eta) = \frac{Fa^2}{16\pi D} \left[\frac{3 + \sigma}{1 + \sigma} (1 - \eta) + 2\eta \ln \eta \right]$$

Таким образом, решения системы (3.3)—(3.5) вблизи центра диска может быть разложено в двойные ряды по степеням η^n , $\ln^m \eta$. Выделяя наиболее существенные при малых η члены, эти ряды можно записать в виде

$$h = h_0 - \frac{fh_0}{4W_s} (\eta \ln \eta - \eta) + \frac{W_0}{W_s} \eta + \eta^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} h_{n+2,m} \eta^n \ln^m \eta \quad (3.8)$$

$$W = W_0 - \frac{fh_0}{4} \ln \eta + \eta \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{n+1,m} \eta^n \ln^m \eta \quad (3.9)$$

$$U = U_0 + \eta \sum_{n,m=0}^{\infty} U_{n+1,m} \eta^n \ln^m \eta \quad (3.10)$$

причем все коэффициенты $h_{n,m}$, $W_{n,m}$, $U_{n,m}$ в рядах (3.8)—(3.10) выражаются через константы h_0 , W_0 , U_0 . Это означает, что множество решений, имеющих

конечное отклонение центра диска h_0 , является трехпараметрическим. Эти параметры находятся из трех условий (3.6), (3.7), и так как в последнее условие входит температура, в итоге, таким образом, определяется зависимость между τ и h_0 .

Предельный случай малых значений безразмерной жесткости f может быть исследован точно так же, как рассмотренный выше случай малых γ . Общее решение уравнений (3.3)—(3.5) представим в виде

$$h(\eta) = \bar{h}(\eta) + fh_f(\eta) \quad (3.11)$$

$$W(\eta) = \bar{W}(\eta) + fW_f(\eta), \quad U(\eta) = \bar{U}(\eta) + fU_f(\eta)$$

где функции \bar{h} , \bar{W} , \bar{U} описывают биметаллический диск с температурой $\bar{\tau}$ и отклонением центра $\bar{h}_0 > 0$ при отсутствии внешних сил. Решению (3.11) соответствует температура диска

$$\tau = \bar{\tau} + f\tau_f, \quad \tau_f = - \left(W_f + \frac{2}{1+\sigma} W_f' \right) W_s^{-1} \quad (3.12)$$

а уравнения для поправочных функций h_f , W_f , U_f получаются линеаризацией по f уравнений (3.3)—(3.5)

$$4 \frac{d^2}{d\eta^2} \eta W_f = U_f \bar{W} + \bar{U} W_f - \frac{1}{2} \frac{(h_0 + |h_0|)}{\eta} \quad (3.13)$$

$$4 \frac{d^2}{d\eta^2} \eta U_f = -2\bar{W} W_f, \quad \frac{dh_f}{d\eta} = \frac{W_f}{W_s}$$

Решения уравнений (3.13) должны удовлетворять граничным условиям

$$h_f(0) = 0, \quad h_f(1) = 0, \quad U_f(1) = 0 \quad (3.14)$$

Они находятся путем численного интегрирования системы (3.13), после чего вычисляется поправка τ_f к температуре как функция отклонения центра диска h_0 . На фиг. 3,а приведена зависимость $\tau_f = \tau_f(h_0)$ при различных значениях параметра W_s (1 — $W_s = 10,5$; 2 — $W_s = 14,5$; 3 — $W_s = 18,5$; $\sigma = 0,3$), а на фиг. 3,б — зависимость температуры от отклонения центра диска при коэффициенте безразмерной жесткости $f = 5,0$.

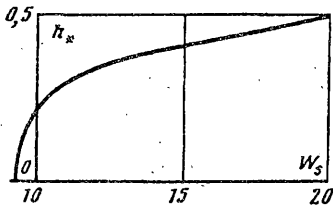
Зависимость критической температуры τ_2 от параметра W_s при малых жесткостях пружины имеет вид

$$\tau_2(W_s) = \bar{\tau}_2(W_s) + f\Delta\tau_f(W_s) \quad (3.15)$$

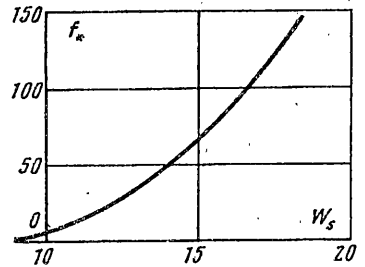
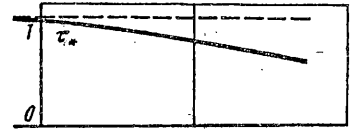
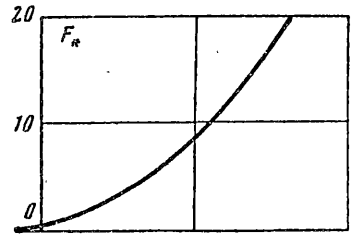
График функции $\Delta\tau_f(W_s)$ приведен на фиг. 4.

Определим теперь безразмерную силу $F = F_*$ в момент перескока в линейном по f приближении. Для этого в формуле (3.1) в качестве h_0 достаточно взять то значение отклонения центра диска h_* , при котором достигается критическая температура $\bar{\tau}_2$ ($\bar{\tau}_2$ — критическая температура при отсутствии внешних сил). При различных значениях параметра W_s эти значения $h_* = F_*/f$ найдены численным интегрированием уравнений (2.1) и результаты приведены на фиг. 5. Отметим очевидный результат, что при жесткости $f \rightarrow 0$ сила F_* также стремится к нулю.

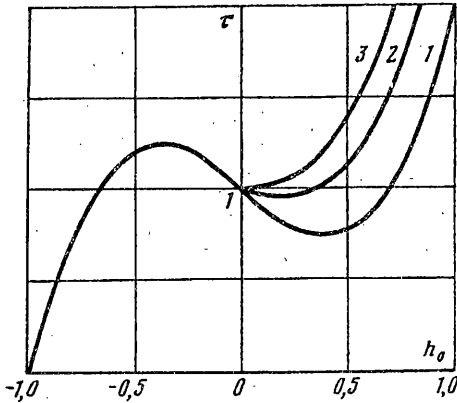
В противоположном предельном случае очень жесткой пружины сила F_* в момент перескока также обращается в нуль. Для уяснения этого обратимся к фиг. 6, на которой приведена зависимость температуры τ от отклонения центра диска h_0 при различных значениях жесткости f (1 — $f = 0$; 2 — $f = 30$; 3 — $f = 50$; $\sigma = 0,3$). Эта зависимость получена путем численного интегрирования точных уравнений (3.3)—(3.5) с граничными условиями (3.6), (3.7). Из фигуры видно,



Фиг. 5



Фиг. 7



Фиг. 6

что при достаточно больших f критическая температура τ_2 в точности равна единице, причем h_0 в точке перескока и сила F_* равны нулю. Вследствие этого пружины с такой большой жесткостью совершенно не пригодны для использования в переключающих устройствах.

Видно, что сила F_* , рассматриваемая как функция жесткости f (при каждом фиксированном значении параметра W_s), достигает максимума $F = F_{\max}$ при некотором значении $f = f_{\max}$.

Температура перескока τ_2 при этом равна некоторому значению τ_{\max} . Проведя необходимые вычисления, можно построить зависимость величин F_{\max} , f_{\max} , τ_{\max} от параметра W_s (см. фиг. 7). Таким образом, сила в момент перескока, с которой диск давит на пружину, не превосходит величины $F_{\max}(W_s)$, какой бы ни была жесткость пружины.

Отметим, что линейное приближение во всяком случае применимо, если жесткость $f \leq f_{\max}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кашпар Ф. Термобиметаллы в электротехнике. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1964. 448 с.
2. Тимошенко К. Д., Минаев В. Н., Гордиенко С. Я. Приборы контроля и регулирования температуры с термобиметаллическим диском. М.: Машиностроение, 1982. 113 с.
3. Григоров Э. И. Тонкие биметаллические оболочки и пластины // Инж. сб. 1954. Т. 18. С. 89—98.
4. Wittrick W. H., Myers D. M., Blunden W. H. Stability of bimetallic disk // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1953. V. 6. No. 1. P. 15—31.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
6. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы: Введение в теорию. М.: Наука, 1977. 439 с.