

УДК 624.072.21/23

© 1993 г. А. А. ЛИВШИЦ

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С НАДРЕЗАМИ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ НА ОСНОВЕ RT-АЛГОРИТМА КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Решение задачи кручения стержней с различными поперечными сечениями, ослабленными надрезами, в рамках линейной теории упругости [1] представляет значительный теоретический интерес и имеет важное практическое значение. Такая задача является актуальной в связи с расчетом конструкций с трещинами и технологическими разрезами. Другой аспект актуальности таких задач связан с гидродинамической аналогией, в соответствии с которой геометрическая характеристика жесткости деформации  $D_0 = D - I_p$  при кручении совпадает (с точностью до знака) с присоединенным моментом инерции при вращении вокруг продольной оси цилиндрического бака, заполненного жидкостью, с тем же поперечным сечением, что и у скручиваемого стержня [2]. При этом стержень с надрезами соответствует баку с радиальными ребрами. Такие конструкции широко применяются в ракетной технике [3] и в резервуарах с перемешивающими устройствами. Для решения используется численный RT-алгоритм конформного отображения. В этом смысле настоящая работа является дальнейшим развитием [4] применительно к более сложной задаче.

1. Предварительные замечания. Задача упругого кручения стержня с поперечным сечением  $S$  сводится к определению функции  $F(z) = \varphi + i\psi$  комплексного переменного  $z = x + iy$ , голоморфной в области  $S$ . Мнимая часть функции  $F$  должна удовлетворять граничному условию

$$\psi|_{\Gamma_j} = \frac{1}{2} z\bar{z} + C^{(j)} \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

где  $\Gamma_j$  — один из простых контуров, ограничивающих область поперечного сечения  $S$ .

Для областей с разрезами решение имеет особенность в окрестностях вершины разреза, поэтому, как правило, такое решение строится с выделением особенности заданного порядка. С другой стороны, применение методов, основанных на конформном отображении области поперечного сечения  $S$  на одну из канонических областей (круг, круговое кольцо), существенно осложняется тем, что аналитические отображения существуют лишь для очень ограниченного числа областей, а численные методы конформных отображений в этом случае весьма трудны для реализации на ЭВМ.

Новые возможности численного построения отображений открывает предложенный в [4] многошаговый рекуррентный RT-алгоритм конформного отображения. RT-алгоритм представляет собой рекуррентный процесс, на каждом шаге которого используется приведенный к виду, удобному для численной реализации, вариационный принцип М. А. Лаврентьева [5], позволяющий отобразить на единичный круг область с контуром, близким к окружности. Многократным применением  $T$ -процедуры осуществляется последовательное целенаправленное варьирование преобразуемого контура.  $R$ -процедура позволяет на каждом шаге  $T$ -процедуры построить с любой заданной степенью точности отображение области, ограниченной проварьированной окружностью на единичный круг по точному

обратному отображению. Особенностью RT-алгоритма является представление отображающей функции  $z = \omega(\zeta)$  в виде суперпозиции функций, заданных в виде рядов Тейлора и Лорана. Длина каждого из рядов  $N \leq 129$ , число функций в суперпозиции для двусвязного контура равно  $2k_T$ , где  $k_T$  — число шагов  $T$ -процедуры. Для контуров различной степени сложности  $k_T$  обычно лежит в интервале от 10 до 50, поэтому длина эквивалентного ряда Лорана для отображающей функции  $10^{20} \dots 10^{100}$ . Вычисление такого числа коэффициентов с необходимой точностью не представляется возможным и не позволяет использовать для решения задачи Сен-Венана методы, основанные на интеграле Коши.

В связи с этим необходима разработка численного метода решения задачи Сен-Венана о кручении на основе RT-алгоритма конформного отображения. Такой метод описан в [3]. В [3, 6, 7] приведены решения задачи кручения для стержней с поперечными сечениями различной формы. Сопоставление полученных результатов с известными аналитическими и численными решениями показало конкурентоспособность и высокую эффективность численного метода на основе RT-алгоритма.

2. Вспомогательные аналитические преобразования. Приведение исходной области к виду, удобному для дальнейшего применения RT-алгоритма, с помощью предварительных аналитических преобразований является нетривиальной эвристической задачей. В разработанном программном комплексе RT-SOFT для ее решения широко используется интерактивный режим, при котором последовательность преобразований выбирается исследователем, а контур преобразуемой области на каждом шаге визуализируется на экране дисплея. Имеется возможность отмены последнего сделанного преобразования, если его результат не удовлетворяет исследователя.

Предусмотрена возможность применения следующих аналитических преобразований:

сдвиг с поворотом

$$w(z) = (z + z_1) z_2, \quad z(w) = \frac{w}{z_2} - z_1, \quad z_2 = e^{i\alpha_2} \quad (2)$$

где  $z_1$  — комплексное число, определяющее величину сдвига,  $\alpha_2$  — угол поворота; инверсия

$$w(z) = 1/\bar{z}, \quad z(w) = 1/\bar{w} \quad (3)$$

дробно-линейное отображение

$$w(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad z(w) = z_2 + \frac{z_2 - z_1}{w - 1} \quad (4)$$

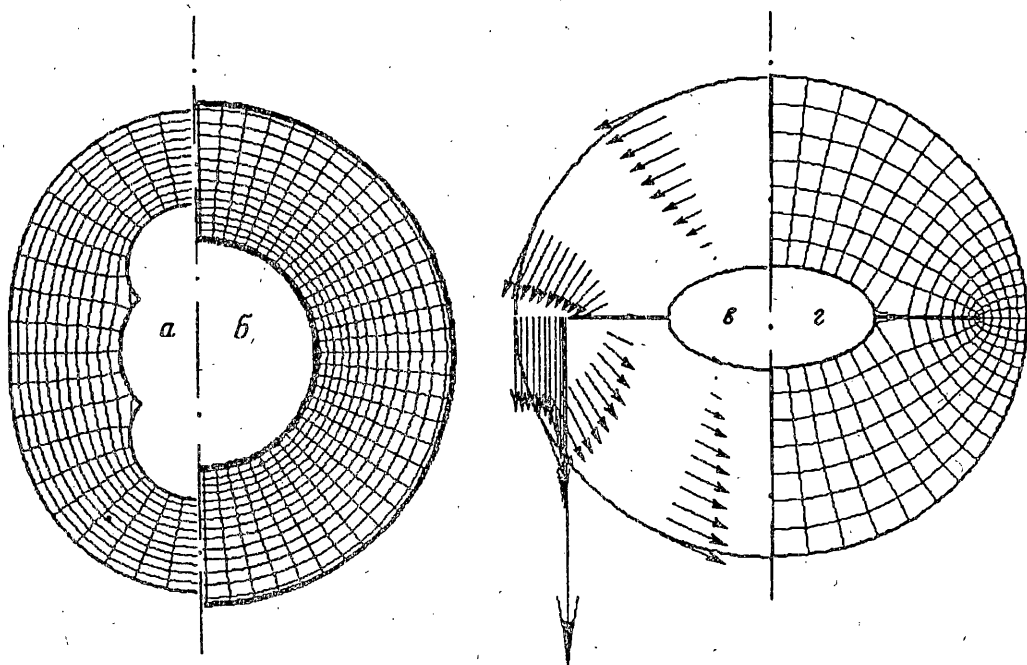
где  $z_1$  и  $z_2$  — особые точки отображения; преобразование Жуковского с особыми точками  $z_1$  и  $z_2$ :

$$w(z) = \frac{z - 1/2(z_1 + z_2) \pm [(z - 1/2(z_1 + z_2))^2 + 1/4(z_2 - z_1)^2]^{1/2}}{1/2(z_2 - z_1)} \quad (5)$$

$$z(w) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \frac{z_2 - z_1}{2} + \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Особенностью преобразования Жуковского  $w(z)$  является двулиственность отображения, требующая выбора ветвей, производимого исследователем в интерактивном режиме.

Особые точки отображения  $z_1$  и  $z_2$  обычно должны располагаться вне исследуемой области, причем должна существовать кривая, соединяющая  $z_1$  и  $z_2$  и не пересекающая исследуемую область. Об исключении из этого правила будет сказано ниже.



Фиг. 1

В качестве примера использования перечисленных преобразований рассмотрим кручение стержня с поперечным сечением в форме конфокального эллиптического кольца с фокусным расстоянием  $2c$ , ослабленного двумя симметричными прямолинейными разрезами на внутреннем контуре вдоль большой полуоси. Большую и малую полуоси внешнего эллипса обозначим через  $a$  и  $b$ , внутреннего —  $a_1$  и  $b_1$ . За характерный размер примем большую полуось внешнего эллипса  $L = a = 1$ . Для поперечного сечения с отношением больших полуосей  $\delta = a/a_1 = 0,4$ , с отношением полуосей внутреннего эллипса  $\beta_1 = b_1/a_1 = 0,5$  и вершинами разрезов в точках  $\pm e_1 = 0,8$  решение получено численным методом на основе RT-алгоритма. В качестве предварительного применяется преобразование Жуковского с особыми точками в вершинах разрезов.

При построении численного отображения были приняты следующие параметры RT-алгоритма:  $\varepsilon_R = 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_T = 6 \cdot 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,07$ . Потребовалось  $k_T = 18$  шагов T-процедуры при  $k_R = 5$  шагах R-процедуры.

На фиг. 1 для иллюстрации последовательности решения изображены сетка полярных координат на круговом кольце (б), ее конформно-эквивалентные образы после применения RT-алгоритма (а) и после преобразования Жуковского (в). Поле касательных напряжений при кручении представлено на фиг. 1, г.

Результаты расчета представлены в табл. I (первая строка), где  $D$  — жесткость при кручении,  $I_p$  — полярный момент инерции,  $D_0$  — жесткость деформации,  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) — модуль касательных напряжений в пяти характерных точках сечения соответственно, с координатами  $(a, 0)$ ,  $(0, ib)$ ,  $(0, ib_1)$ ,  $(a_1, 0)$ ,  $(e_1, 0)$ . Для сравнения в этой таблице (вторая строка) приведены результаты решения задачи кручения для такого же эллиптического кольца без разрезов. В третьей строке дается отношение характеристик.

Для оценки эффективности предлагаемого метода в более сложной ситуации решалась задача кручения стержня с поперечным сечением в форме кругового кольца с внешним радиусом  $R = 1$  и внутренним  $r = 0,5$ , ослабленного симмет-

Таблица 1

$D$	$I_p$	$D_0$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$
1,2109	1,3726	-0,1617	1,2396	0,9112	0,1734	—	8909,6
1,3633	1,3726	-0,0093	0,9472	0,9876	0,0762	0,6475	0,8473
0,89	1,00	17,39	1,31	0,92	2,27	—	10515,3

Таблица 2

$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$
1,09	0,48	0,97	1,39	8634,00
1,08	0,52	0,98	0,83	—

ричными радиальными разрезами на внутреннем контуре вдоль оси абсцисс. Вершины разрезов расположены в точках с координатами  $\pm e = 0,7$  на оси абсцисс. В качестве предварительного преобразования, как и в случае эллиптического кольца, применялось преобразование Жуковского с особыми точками, расположенными в вершинах разрезов.

Эта задача была решена в [8] модифицированным методом Шермана с помощью построения приближенного отображения для внешности внутреннего контура (с учетом разрезов) на внешность круга. Сравнение касательных напряжений  $\tau_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) в характерных точках сечения, вычисленных методом на основе RT-алгоритма (первая строка), с результатами [8] (вторая строка) представлено в табл. 2. Хорошее совпадение результатов можно рассматривать как калибровку описываемого метода в достаточно экстремальной ситуации ( $i = 1, 2, \dots, 5$  соответствуют точкам с координатами:  $(1,0; 0)$ ,  $(0,5; 0)$ ,  $(0; i)$ ,  $(0,71; 0)$ ,  $(0,7; 0)$ ).

3. Учет полярной симметрии контура поперечного сечения. Рассмотренные выше предварительные преобразования (2)–(5) представляют собой конформные отображения. В случае полярно симметричного контура поперечного сечения стержня в качестве предварительного преобразования можно использовать отображение, не являющееся конформным.

Пусть контур поперечного сечения обладает полярной симметрией степени  $m$ , т. е. выполнено условие

$$r_j(\beta + l\beta_0) = r_j(\beta) \quad (6)$$

$$\beta_0 = 2\pi/m, \quad l = 1, \dots, m-1, \quad j = 1, 2$$

где  $r = r_j(\beta)$  — уравнение контура  $\Gamma_j$  в плоскости  $z$ . Тогда можно ограничиться рассмотрением части контура, соответствующей  $0 \leq \beta \leq \beta_0$ , и перед применением RT-алгоритма сделать предварительное преобразование

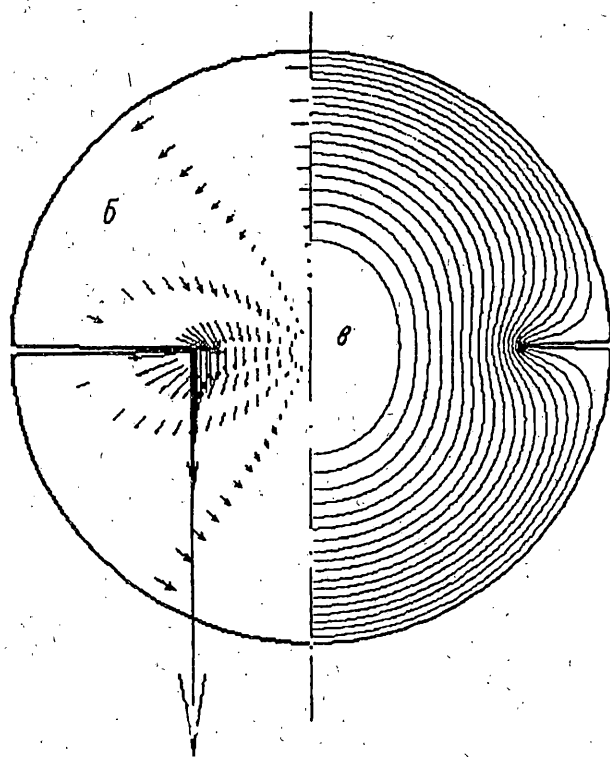
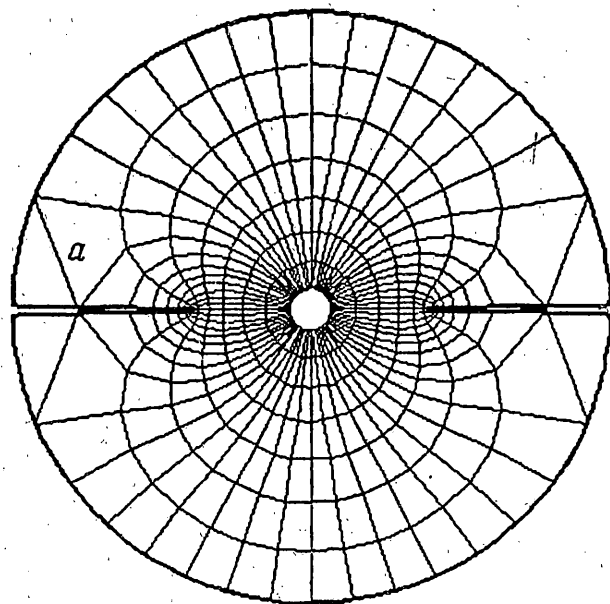
$$u = z^m \quad (7)$$

Отображение сектора  $0 \leq \beta \leq \beta_0$  на сектор круга (кругового кольца) будет иметь вид

$$\omega(\zeta) = [w(\zeta^m)]^{1/m} = [w(\xi)]^{1/m} \quad (8)$$

где  $\xi = \zeta^m$ ,  $u = w(\xi)$  — отображение, построенное с помощью RT-алгоритма.

Очевидно, что полярная симметрия контура должна сохраняться при отображении, поэтому граничное условие (формула (7) в [6]) можно записать в виде



Фиг. 2

$b$	$M$	$D$	$D/I_p$	$D_0$	$J = -D_0$
0,3	2	1,357	0,86	-0,214	0,217
	4	1,154	0,73	-0,417	0,412
	6	0,999	0,64	-0,572	0,550
0,4	2	1,211	0,77	-0,360	0,364
	4	0,933	0,59	-0,637	0,657
0,5	2	1,079	0,69	-0,492	0,500
	4	0,727	0,46	-0,844	0,865
0,6	2	0,922	0,59	-0,649	0,660
	4	0,415	0,26	-1,156	1,048

$$\psi \Big|_{\substack{\rho=p_j \\ 0 \leq \alpha \leq \beta_0}} = c_{0j} + \sum_{n=1}^N c_{nj} \cos \frac{2\pi n \alpha}{\beta_0} + d_{nj} \sin \frac{2\pi n \alpha}{\beta_0} \quad (9)$$

Комплексный потенциал представляется рядом

$$F(\zeta) = \sum_{n=1}^N q_n \zeta^{mn} + q_{-n} (\zeta/\gamma)^{-mn} \quad (10)$$

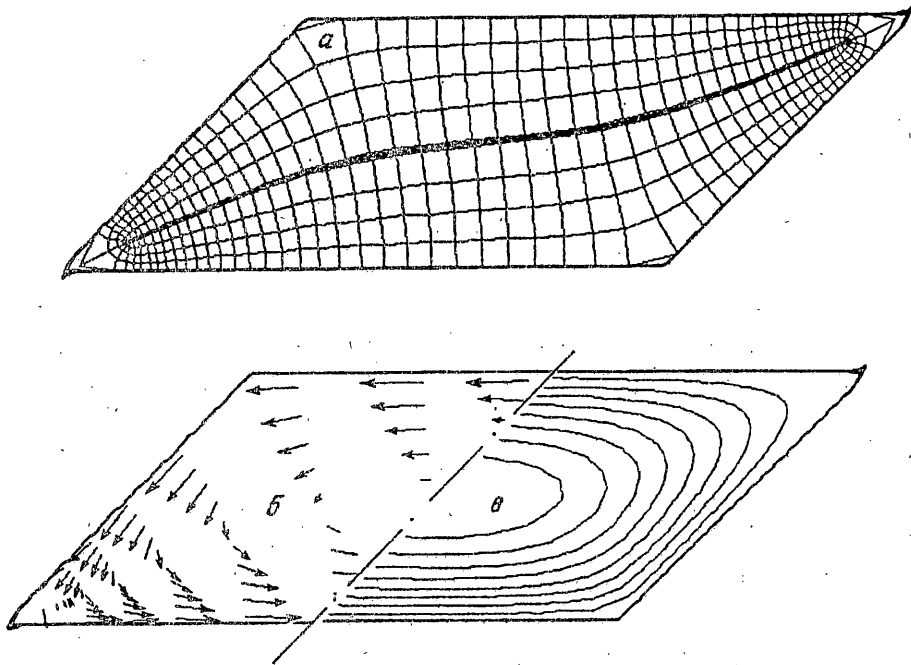
$$q_n = [d_{n1} - d_{n2} \gamma^{mn} + i(c_{n1} - c_{n2} \gamma^{mn})] / (1 - \gamma^{2mn}) \quad (11)$$

$$q_{-n} = [d_{n1} \gamma^{mn} - d_{n2} - i(c_{n1} \gamma^{mn} - c_{n2})] / (1 - \gamma^{2mn})$$

Радиус  $\gamma$  внутренней окружности на плоскости  $\zeta$  связан с радиусом  $\gamma_0$  внутренней окружности на плоскости  $\xi$  соотношением  $\gamma = \gamma_0^{1/m}$ . Если в (11) заменить  $\gamma^n$  на  $\gamma_0$ , то полученные формулы с точностью до обозначений совпадут с выражениями (8) в [6], что позволяет в программной реализации не осуществлять переход на плоскость  $\zeta$ . Указанный прием позволяет в  $m$  раз увеличить число членов ряда, так как при обычном подходе без учета симметрии все члены ряда  $q_k$ , кроме тех, для которых  $k$  кратно  $m$ , были бы равны нулю. В предлагаемом варианте все коэффициенты  $q_n$  отличны от нуля. При обычном подходе для достижения такой же точности потребовалось бы взять  $mN$  членов ряда.

Для иллюстраций метода учета полярной симметрии контура рассмотрим круглый вал с внешними радиальными надрезами. Задача кручения стержня кругового поперечного сечения, ослабленного  $M=2m$  внешними симметрично расположенными радиальными надрезами глубиной  $b$  (радиус круга принят за единицу), является более сложной, чем задача кручения стержней с двусвязными поперечными сечениями, ослабленными надрезами. Пусть два из  $2m$  надрезов расположены на оси абсцисс. Выделим из области поперечного сечения сектор, ограниченный надрезами, с центральным углом  $\beta_0 = 2\pi/m$ , ослабленный надрезом, идущим по биссектрисе центрального угла. Это означает, что, хотя рассматриваемое поперечное сечение обладает полярной симметрией степени  $2m$ , учитывается полярная симметрия степени  $m = M/2$ . Выполнив преобразование (7) (возведение в степень  $m$ ), получим круг с двумя симметричными внешними надрезами, лежащими на оси абсцисс, глубина которых  $b_0 = 1 - (1 - b)^{M/2}$ . В случае стержня, ослабленного  $M=2$  надрезами, указанное выше возведение в степень не требуется, а  $b_0 = b$ . Следующим шагом является преобразование инверсии (3). При этом круговая область с надрезами отображается на внешность единичного круга с разрезами вдоль оси абсцисс, вершины которых расположены в точках  $\pm 1/b_0$ .

После этого выполняется преобразование Жуковского (5) с особыми точками,



Фиг. 3

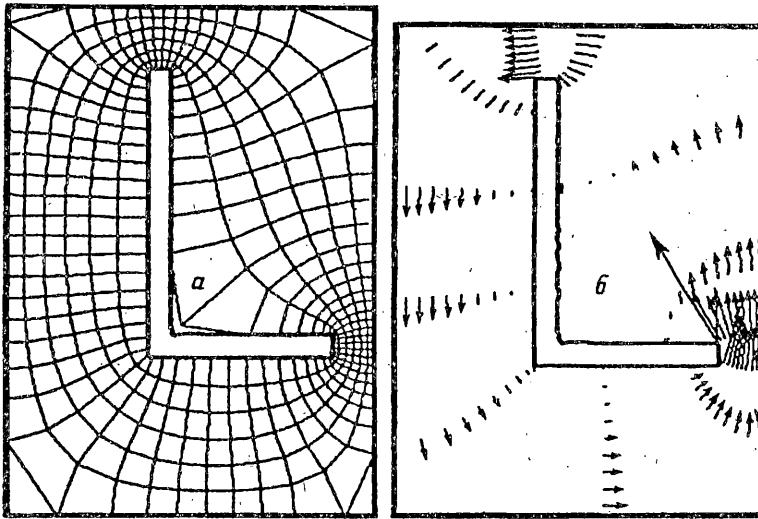
расположенными в вершинах разрезов неограниченной области. Последним вспомогательным преобразованием является инверсия, так что образом круга с надрезами становится односвязная область, ограниченная дугами окружностей, которая затем отображается на единичный круг с помощью RT-алгоритма.

На фиг. 2, а изображена ортогональная сетка, конформно-эквивалентная сетке полярных координат, для круга с двумя надрезами глубиной  $b = 0,6$ . На фиг. 2, б представлено поле касательных напряжений при кручении круглого стержня, ослабленного двумя надрезами глубиной  $b = 0,6$ .

Численным методом на основе RT-алгоритма получено решение задачи кручения круглого стержня, ослабленного  $M = 2, 4, 6$  надрезами глубиной  $b = 0,3 - 0,6$ . При построении отображения число шагов  $T$ -процедуры не превышало  $k_T = 27$  при числе шагов  $R$ -процедуры  $k_R = 3 - 5$ . При этом принимались следующие параметры отображения  $\epsilon_R = 10^{-6}$ ,  $\epsilon_T = 7 \cdot 10^{-3}$ ,  $\epsilon_0$  изменялось в пределах  $0,65 - 0,2$ . Результаты расчетов представлены в табл. 3. Влияние разрезов на уменьшение жесткости стержня на кручение характеризуется отношением безразмерной геометрической характеристики жесткости на кручение  $D$  стержня с надрезами к безразмерному полярному моменту инерции круглого стержня  $I_p = \pi/2$ .

В силу гидродинамической аналогии задача кручения стержня с надрезами эквивалентна задаче о движении идеальной жидкости в цилиндрическом баке с внутренними радиальными ребрами при его вращении вокруг продольной оси (задача Стокса — Жуковского). Присоединенный момент инерции  $J$  жидкости, заполняющей цилиндрический бак с ребрами, равен геометрической характеристике жесткости деформации  $D_0$ , взятой с обратным знаком:  $J = -D_0$ . Соответствующий приведенный момент инерции жидкости  $J$  был определен в [9]. Сравнение с результатами [9] также представлено в табл. 3 (последний столбец).

На фиг. 2, в изображены линии тока для бака с двумя ребрами шириной  $b = 0,3$ . Ввиду указанной аналогии эти кривые являются линиями касательных напряжений [2] при кручении стержня с надрезами. Линии касательных напря-



Фиг. 4

жений построены как изолинии функции напряжений  $\Psi = \psi - z\bar{z}/2$ , где мнимая часть  $\psi$  комплексного потенциала  $F$  получена из решения задачи кручения численным методом на основе RT-алгоритма.

4. Решение задачи кручения стержня с односвязным поперечным сечением с помощью отображения на круговое кольцо. Выше было указано, что при использовании преобразования Жуковского особые точки следует располагать вне исследуемой области поперечного сечения.

Однако для односвязных областей неправильной формы, вытянутых в одном направлении, весьма эффективным оказывается изменение топологии области путем превращения ее в двусвязную, что достигается преобразованием Жуковского с особыми точками, расположенными внутри области. При этом следует рассматривать отображение двух экземпляров исходной области, взятых на разных листах двулистной римановой поверхности и склеенных по разрезу, проходящему между особыми точками  $z_1$  и  $z_2$ . Преобразование Жуковского отображает такую область на криволинейное кольцо, наружный и внутренний контуры которого симметричны относительно единичной окружности, проходящей через точки  $(-1, 0)$  и  $(1, 0)$ , являющиеся образами особых точек  $z_1$  и  $z_2$  (фиг. 3, б). Криволинейное кольцо может быть далее отображено на круговое с помощью RT-алгоритма.

При этом граничное условие как на внешнем  $\gamma_1$ , так и на внутреннем  $\gamma_2$  контурах совпадает с граничным условием на исходном контуре  $\Gamma$  односвязной области с учетом упомянутого соответствия точек. Такой прием был предложен применительно к гидродинамической задаче в [10].

Задача кручения стержня решается на круговом кольце, являющемся образом двух экземпляров исходной области, склеенных по окружности. Последняя — это образ разреза на исходной области (фиг. 3, а). Следует отметить, что геометрия разреза зависит только от положения особых точек  $z_1$  и  $z_2$ , заранее неизвестна и определяется только после обратного отображения на исходную область окружности, проходящей через образы  $\zeta_1, \zeta_2$  особых точек. Границы кругового кольца симметричны относительно этой окружности, поэтому ее радиус  $\sqrt{\gamma}$  (радиус внутренней окружности  $\gamma$ , внешней — равен единице). Для определения коэффициентов разложения можно воспользоваться формулами (8) из [6] для двусвязной области.

Отметим, что искусственное изменение топологии исходной односвязной области существенно повышает точность решения. Так, для параллелограмма (фиг. 3)



в зоне возникновения наибольших касательных напряжений (во второй четверти длинной стороны, считая от тупого угла) их максимальная относительная погрешность в случае решения на кольце составляла 0,2%, что на порядок лучше, чем при решении на круге, на который параллелограмм отображается с помощью RT-алгоритма как односвязная область. В качестве критерия погрешности использовалось отклонение вектора касательного напряжения на контуре от касательной к контуру. Для длинной (горизонтальной) стороны параллелограмма относительная погрешность определялась как отношение вертикальной компоненты вычисленного напряжения к его модулю.

Эффект существенного повышения точности решения обусловлен тем, что в разложении комплексного потенциала присутствуют члены как с положительными, так и с отрицательными степенями, так что система базисных функций для односвязной области является в некотором смысле избыточной. Это приводит к уменьшению ошибок вблизи границы области сходимости рядов.

Для параллелограмма с основанием  $a = 1 + \sqrt{2}$ , высотой  $h = 1$  и острым углом  $\alpha = 45^\circ$  получена жесткость на кручение  $D = 0,633$  и максимальное касательное напряжение  $T = 0,993$ . Поле касательных напряжений и изолинии функций напряжений представлены на фиг. 3.

5. Применение аналитических преобразований при решении задачи кручения стержней с двусвязным поперечным сечением. Предварительное применение аналитических преобразований эффективно не только при наличии трещин и разрезов, но и в случае ослабления сечений вытянутыми вырезами неправильной формы. В качестве примера рассмотрим кручение стержня прямоугольного сечения, армированного угловым неравнобоким профилем (фиг. 4). Для оценки жесткости на кручение комбинированного сечения необходимо знать величину жесткости на кручение прямоугольного сечения, ослабленного угловым вырезом.

Отображение области такого вида на круговое кольцо наталкивается на большие трудности, особенно из-за сближения различных частей внутреннего контура. Предварительное применение преобразования Жуковского с особыми точками, расположенными вблизи вершин углового выреза, позволяет получить двусвязную область неправильной формы, которая отображается на круговое кольцо с помощью RT-алгоритма. На фиг. 4, а построена сетка, конформно-эквивалентная сетке полярных координат на круговом кольце, а на фиг. 4, б показано поле касательных напряжений при кручении. Для прямоугольника со сторонами  $B = 2,5$  и  $H = 3,5$  с вырезом, соответствующим угловому профилю № 20, расположенному так, что центр масс ослабленного сечения совпадает с центром прямоугольника, получена жесткость на кручение  $D = 9,26$ . Для сплошного прямоугольного сечения с теми же размерами величина жесткости на кручение равна  $D = 10,17$ , т. е. наличие выреза снижает жесткость на кручение на 9%.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. Динник А. Н. Продольный изгиб. Кручение. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 392 с.
3. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1983. 296 с.
4. Рабинович Б. И., Тюрин Ю. В. Численный метод решения плоских задач теории упругости на основе RT-алгоритма конформного отображения // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 108—115.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
6. Лившиц А. А. Применение RT-алгоритма конформного отображения для решения задачи Сен-Венана // Исследование динамики транспортных систем на электромагнитной подвеске. М.: ВНИИПИ гидротрубопровод, 1988. С. 143—149.

7. *Лившиц А. А., Соколин Е. Г.* Статические и динамические задачи кручения упругих стержней // Исследование динамики транспортных систем на электромагнитной подвеске. М.: ВНИИПИ-гидротрубопровод. 1988. С. 149—159.
8. *Кушев С. А.* Определение напряжений в скручиваемом брусе кругового кольцевого сечения с двумя разрезами // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 187—192.
9. *Докучаев Л. В.* О присоединенном моменте инерции жидкости в цилиндре с перегородками, вращающемся около продольной оси // Изв. АН СССР. МТТ. 1964. № 2. С. 168—171.
10. *Комаренко А. Н., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Тюрин Ю. В.* Решение некоторых краевых задач с помощью отображения на кольцо // Приближенные методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. С. 39—49.

Москва

Поступила в редакцию  
7.II.1991