МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1993

УДК 539.3

© 1993 г. А. А. АБРАМОВ, Г. И. ПШЕНИЧНОВ, В. И. УЛЬЯНОВА

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ РАСТЯНУТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Исследуется задача поперечного изгиба тонкой упругой изотропной пластины, растянутой в двух направлениях различными по величине равномерно распределенными погонными силами. Пластина жестко закреплена на прямоугольном контуре.

Решение задачи строится численно на основе итерационного метода [1]. Методом декомпозиции [2] получено также приближенное аналитическое решение, обладающее достаточной для практических целей точностью.

Дана оценка области изменения параметров задачи, при которых наличие растягивающих усилий можно не учитывать. С другой стороны, выделена область параметров (растягивающие силы достаточно велики), при которых можно использовать простые формулы, полученные на основе асимптотического анализа.

Составлены таблицы результатов для широкого диапазона изменения безразмерных параметров задачи.

1. Рассматриваемая краевая задача при обычных обозначениях имеет вид

$$D\Delta\Delta w - \left(p_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = q \quad \text{в} \quad \Omega \tag{1.1}$$

$$w = \partial w / \partial n = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega$$

Здесь Ω — прямоугольник $\{-a/2 \le x \le a/2,\ -b/2 \le y \le b/2\}$, p_1, p_2, q — заданные числа $(p_1 \ge 0, p_2 > 0)$. Введем обозначения $\alpha = x/a$, $\beta = y/a$, $\lambda = b/a$, $\gamma^2 = p_1/p_2$, $\varepsilon^2 = D/(a^2 p_2)$, $w = qa^2 u/p_2$.

Тогда задача (1.1) преобразуется к следующей:

$$\varepsilon^2 \Delta\Delta u - \left(\gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) = 1 \quad \text{в} \quad \Omega' \tag{1.2}$$

$$u = \partial u / \partial n = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega' \tag{1.3}$$

где Ω' — прямоугольник $\{-1/2 \le \alpha \le 1/2,\ -\lambda/2 \le \beta \le \lambda/2\}$.

2. Задача (1.2), (1.3) симметрична относительно оси α и относительно оси β. Поэтому ее можно заменить задачей: уравнение (1.2) рассматривается в прямоугольнике Ω'' $(0 \le \alpha \le 1/2,\ 0 \le \beta \le \lambda/2)$, на двух сторонах Ω'' (при $\alpha = 1/2$ и при $\beta = \lambda/2$) ставится условие (1.3), а на двух других (при $\alpha = 0$ и при $\beta = 0$) условия, соответственно $\partial u/\partial\alpha = \partial^3 u/\partial\alpha^3 = 0$ и $\partial u/\partial\beta = \partial^3 u/\partial\beta^3 = 0$.

Эта задача решалась методом, являющимся модификацией метода, предложенного в [1]. Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение (1.2) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$-\frac{2\varepsilon^2}{1+\gamma^2} \Delta u + u = v \tag{2.1}$$

$$\Delta v = -\frac{2}{1+\gamma^2} + \frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) \tag{2.2}$$

Систему (2.1), (2.2) дополняем граничными условиями

$$\partial u/\partial n = 0 \text{ на } \partial\Omega'' \tag{2.3}$$

$$v = v_0 \text{ при } \alpha = 1/2 \text{ и при } \beta = \lambda/2 \tag{2.4}$$

$$\partial v/\partial n \text{ при } \alpha = 0 \text{ и при } \beta = 0 \tag{2.5}$$

где v_0 — пока неизвестная функция на указанной выше части $\partial\Omega''$. Эта функция должна быть выбрана так, чтобы выполнялось условие

$$u = 0 \text{ при } \alpha = 1/2 \text{ и при } \beta = \lambda/2 \tag{2.6}$$

Возникшая для системы (2.1), (2.2) задача решалась следующим итерационным методом. Возьмем в Ω'' какое-либо приближение $u^{(0)}$ искомой функции u и какое-либо приближение $v_0^{(0)}$ искомой функции v_0. Подставим это $u^{(0)}$ в правую часть (2.2) и решим (2.2) при граничных условиях (2.5) и (2.4), где в качестве v_0 взято $v_0^{(0)}$; тогда получим в Ω'' некоторую функцию $v^{(0)}$. Подставив это $v^{(0)}$ в правую часть (2.1), решим (2.1) при граничных условиях (2.3); в результате получим в Ω'' некоторую функцию $u^{(1)}$. Возьмем $v_0^{(1)} = v_0^{(0)} - u^{(1)} + \varepsilon^2\partial^2 u^{(1)}/\partial s^2$, где $\partial^2/\partial s^2$ — вторая производная по длине дуги вдоль границы Ω''. Переход от пары $u^{(0)}, v_0^{(0)}$ к паре $u^{(1)}$, $v_0^{(1)}$ — один шаг предлагаемого здесь итерационного метода. Новым по сравнению с [1] является выбранная здесь форма итераций по u в правой части уравнения (2.2) (в [1] рассматриваются другие возможности, менее эффективные при не малых ε^2).

Итерации проводятся до тех пор, пока с нужной точностью не установится правая часть уравнения (2.2) и не будет выполняться условие (2.6). Здесь не приводится исследование сходимости предлагаемого итерационного метода. Расчеты, результаты которых приводятся в публикуемой работе, показали хорошую сходимость излагаемого итерационного метода. Метод особенно быстро сходится при небольших ε^2 и $(1-\gamma^2)/(1+\gamma^2)$, в этом случае для получения требуемой точности понадобилось всего несколько итераций.

Для непосредственной численной реализации использовался метод сеток. Бралась равнсмерная сетка с равными шагами по α и по β. Входящие в (2.1) и (2.2) вторые производные во внутренних узлах аппроксимировались простейшим способом: соответствующими разделенными центральными вторыми разностями. Для аппроксимации условий (2.3) и (2.5) как обычно добавлялись заграничные точки, прилегающие к границе; условия (2.3) и (2.5) заменялись симметрией относительно границы, отсюда получаются выражения, аппроксимирующие нужные вторые производные в граничных точках. Стандартная аппроксимация $\partial^2 u^{(1)}/\partial s^2$ проводилась однотипно также и в угловой точке $(1/2, \lambda/2)$, в которой $\partial\Omega''$ имеет излом.

Для решения возникающих на каждом итерационном шаге разностных задач, аппроксимирующих (2.2) $\wedge$ (2.4) $\wedge$ (2.5) и (2.1) $\wedge$ (2.3) во внутренних точках Ω'' искомые функции и правые части уравнений представляются конечными суммами Фурье по α с коэффициентами, зависящими от β; нужные тригонометрические функции (свои для каждой из двух задач) определяются типом граничных условий при $\alpha = 0$ и при $\alpha = 1/2$. Для коэффициентов этих разложений возникают независимые друг от друга разностные одномерные (по β) задачи, они легко решаются методом прогонки (см., например, [3]). Так как окончательные ответы (значения функции u и ее вторых производных в некоторых точках) появляются только в конце, то для перехода от задачи (2.2) $\wedge$ (2.4) $\wedge$ (2.5) к задаче (2.1) $\wedge$ (2.3) и обратно проводится непосредственный пересчет (с постоянной матрицей перехода) от одного вида представления Фурье используемых функций к другому, минуя вычисление самих этих функций по их представлению и вычисление коэффициентов представления по значениям функций.

Для реализации указанных выше вычислений составлена на языке АЛГОЛ-60 универсальная программа; вычисления проводились на ЭВМ БЭСМ-6, точность окончательных ответов контролировалась сопоставлением результатов, полученных с разными шагами сетки и с разной контрольной точностью, определяющей окончание итераций.

Результаты расчетов в зависимости от значений ε^2 и γ^2 приведены в табл. 1—3 (соответственно для $\lambda = 1$; 1,5; 2). В этих таблицах даны безразмерные значения максимальных прогибов u_0, которые возникают в центре пластины (первые строки), и изгибающих моментов

$$M_0 = \max_{\alpha, \beta} \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \right| \right\}$$

где ν — коэффициент Пуассона материала (вторые строки). Вычисления значения M_0 показали, что во всех случаях точки максимума расположены на контуре пластины в точках с координатами $\alpha = \pm 1/2$, $\beta = 0$ или $\alpha = 0$, $\beta = \pm \lambda/2$ (цифры отмечены звездочкой). Поэтому M_0 от ν не зависит.

Размерные величины прогибов и изгибающих моментов вычисляются по формулам $w = qa^2 u_0/p_1$, $M = -qDM_0/p_1$.

3. Получим приближенное аналитическое решение задачи (1.2), (1.3) методом декомпозиции [2].

В соответствии с этим методом введем в рассмотрение три вспомогательные задачи, из которых первые две — краевые.

Первая вспомогательная задача

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^4 u^{(1)}}{\partial \alpha^4} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \alpha^2} = f^{(1)}(\alpha, \beta) \tag{3.1}$$

$$u = \partial u/\partial \alpha = 0 \text{ при } \alpha = \pm 1/2$$

Вторая вспомогательная задача

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^4 u^{(2)}}{\partial \beta^4} - \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial \beta^2} = f^{(2)}(\alpha, \beta) \tag{3.2}$$

$$u = \partial u/\partial \beta = 0 \text{ при } \beta = \pm \lambda/2$$

Третья вспомогательная задача — решение дифференциального уравнения

$$\Phi(\alpha, \beta) = \varepsilon^2 \frac{\partial^4 u^{(3)}}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + f^{(1)}(\alpha, \beta) + f^{(2)}(\alpha, \beta) - 1 \equiv 0 \tag{3.3}$$

Решение исходной задачи (1.2), (1.3) будет совпадать с решением задач (3.1)—(3.3) при условии их равенства, т. е.

$$u = u^{(1)} = u^{(2)} = u^{(3)} \tag{3.4}$$

Эти условия позволяют, в частности, определить неизвестные функции $f^{(1)}(\alpha, \beta)$ и $f^{(2)}(\alpha, \beta)$.

Задачу (3.1)—(3.4) будем решать приближенно, принимая

$$f^{(1)}(\alpha, \beta) = f_0^{(1)}(\beta) + \alpha^2 f_2^{(1)}(\beta), \quad f^{(2)}(\alpha, \beta) = f_0^{(2)}(\alpha) + \beta^2 f_2^{(2)}(\alpha) \tag{3.5}$$

Решив краевые задачи (3.1), (3.2) при условиях (3.5) и используя равенство $u^{(1)} = u^{(2)}$ из (3.4), получим

$$u^{(1)} = u^{(2)} = c_1 \psi_1(\alpha) \psi_3(\beta) + c_2 \psi_1(\alpha) \psi_4(\beta) + c_3 \psi_2(\alpha) \psi_3(\beta) + c_4 \psi_2(\alpha) \psi_4(\beta) \tag{3.6}$$

$$\psi_1(\alpha) = \varphi_1(\alpha, \gamma, 1), \quad \psi_2(\alpha) = \varphi_2(\alpha, \gamma, 1)$$

$$\psi_3(\beta) = \varphi_1(\beta, 1, \lambda), \quad \psi_4(\beta) = \varphi_2(\alpha, 1, \lambda)$$

$$\varphi_1(z, \delta, \eta) = \frac{\eta^2 - 4z^2}{8\delta^2} - \frac{\eta(\operatorname{ch} g\eta/2 - \operatorname{ch} gz)}{2g\delta^2 \operatorname{sh} g\eta/2}, \quad g = \frac{\delta}{\varepsilon}$$

Таблица 1

γ^2	$\varepsilon^2 = 0{,}001$	0,005	0,03	0,15	0,6	1	2	3
1	0,064	0,052	0,026	0,0075	0,0021	0,0012	0,00063	0,00042
	10	4,0	1,2	0,31	0,083	0,051	0,025	0,017
0,8	0,071	0,056	0,027	0,0076	0,0021	0,0012	0,00063	0,00042
	10*	4,3*	1,3*	0,32*	0,084*	0,051*	0,025*	0,017
0,6	0,079	0,062	0,028	0,0077	0,0021	0,0013	0,00063	0,00042
	11*	4,6*	1,3*	0,32*	0,084*	0,051*	0,025*	0,017*
0,4	0,089	0,068	0,029	0,0078	0,0021	0,0013	0,00063	0,00042
	12*	5,0*	1,4*	0,32*	0,084*	0,051*	0,025*	0,017*
0,2	0,10	0,076	0,031	0,0079	0,0021	0,0013	0,00063	0,00042
	14*	5,5*	1,4*	0,33*	0,084*	0,051*	0,026*	0,017*
0	0,12	0,087	0,032	0,0080	0,0021	0,0013	0,00063	0,00042
	15*	6,1*	1,5*	0,33*	0,085*	0,051*	0,026*	0,017*

Таблица 2

γ^2	$\varepsilon^2 = 0{,}001$	0,005	0,03	0,15	0,6	1	2	3
1	0,089	0,074	0,040	0,013	0,0035	0,0022	0,0011	0,00073
	12	5,2	1,7	0,45	0,12	0,074	0,037	0,025
0,8	0,10	0,084	0,043	0,013	0,0036	0,0022	0,0011	0,00073
	13	5,5	1,7	0,46	0,12	0,074	0,037	0,025
0,6	0,12	0,097	0,046	0,013	0,0036	0,0022	0,0011	0,00073
	14	5,9	1,8	0,46	0,12	0,075	0,038	0,025
0,4	0,15	0,12	0,050	0,013	0,0036	0,0022	0,0011	0,00073
	15	6,3	1,9	0,47	0,12	0,075	0,038	0,025
0,2	0,19	0,14	0,054	0,014	0,0036	0,0022	0,0011	0,00073
	18*	6,9*	2,0	0,48	0,12	0,075	0,038	0,025
0	0,28	0,18	0,059	0,014	0,0036	0,0022	0,0011	0,00073
	22*	8,3*	2,1	0,48	0,12	0,075	0,038	0,025

Таблица 3

γ^2	$\varepsilon^2 = 0{,}001$	0,005	0,03	0,15	0,6	1	2	3
1	0,10	0,084	0,045	0,014	0,0041	0,0025	0,0013	0,00084
	14	5,7	1,8	0,49	0,13	0,081	0,041	0,027
0,8	0,12	0,097	0,049	0,015	0,0041	0,0025	0,0013	0,00084
	15	6,1	1,9	0,50	0,13	0,082	0,041	0,027
0,6	0,15	0,12	0,054	0,015	0,0041	0,0025	0,0013	0,00084
	16	6,7	2,0	0,51	0,14	0,082	0,041	0,027
0,4	0,19	0,14	0,059	0,016	0,0042	0,0025	0,0013	0,00084
	18	7,4	2,1	0,52	0,14	0,082	0,041	0,028
0,2	0,27	0,19	0,066	0,016	0,0042	0,0025	0,0013	0,00085
	21	8,4	2,3	0,53	0,14	0,082	0,041	0,028
0	0,48	0,27	0,074	0,017	0,0042	0,0025	0,0013	0,00085
	31*	9,9	2,5	0,54	0,14	0,082	0,041	0,028

$$\varphi_2(z, \delta, \eta) = \frac{\eta^4 - 16z^4}{192\delta^2} - \frac{\eta^3(\operatorname{ch} g\eta/2 - \operatorname{ch} gz)}{24g\delta^2 \operatorname{sh} g\eta/2} + \frac{2}{g^2}\varphi_1(z, \delta, \eta)$$

где $\overline{c_1, c_4}$ — произвольные постоянные.

Принимая во внимание условия (3.4) и используя (3.6), определим значения произвольных постоянных путем приближенного решения уравнения (3.3). Для этого используем следующие четыре условия [4]:

$$\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} = \frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} = 0 \text{ при } \alpha = \beta = 0 \tag{3.7}$$

Итак, на основании (3.4) принимаем (3.6) за приближенное решение исходной задачи, в котором произвольные постоянные c_1, c_4 определяются из условий (3.7).

Проверка точности этого решения выполнялась путем сопоставления результатов с их значениями, приведенными в табл 1—3. При этом выяснилось, что результаты, полученные изложенными выше двумя методами, практически совпадают.

Вполне очевидно, что существует значение $\varepsilon_*^2 = \varepsilon_*^2(\gamma^2, \lambda)$ такое, что при $\varepsilon^2 \geq \varepsilon_*^2$ для получения приближенного решения краевой задачи (1.2), (1.3) можно дифференциальное уравнение (1.2) заменить бигармоническим, отбросив в нем члены со вторыми частными производными (силы p_1 и p_2 достаточно малы и их можно не учитывать). Легко установить, что в этом случае значения $\varepsilon^2 u_0$, $\varepsilon^2 M_0$ практически от ε зависеть не будут. На этом основании при изменении параметров γ^2 и λ в диапазоне таблиц 1—3 было получено

$$\varepsilon_{\max}^2 = \max_{(\gamma^2, \lambda)} \varepsilon_*^2(\gamma^2, \lambda) = 0{,}5$$

4. Покажем, что существует $\varepsilon_0^2 = \varepsilon_0^2(\gamma^2, \lambda)$ такое, что при $\varepsilon^2 \leq \varepsilon_0^2$ приближенные значения искомых величин u_0, M_0 могут быть получены на основе асимптотического анализа [5] (при старших производных присутствует малый параметр).

Приближенное решение дифференциального уравнения (1.2) при достаточно малом значении ε^2 можно представить в виде суммы двух решений $u(\alpha, \beta) = u_1(\alpha, \beta) + u_2(\alpha, \beta)$, где функция $u_1(\alpha, \beta)$ — решение вырожденного уравнения ($\varepsilon = 0$):

$$\partial^2 u_1/\partial\alpha^2 + \gamma^2\partial^2 u_1/\partial\beta^2 = -1 \tag{4.1}$$

а функция $u_2(\alpha, \beta)$ — решение однородного уравнения (1.2) с большой изменяемостью.

Чтобы получить асимптотические формулы для значений u_0, M_0 достаточно рассмотреть средние сечения пластины $\alpha = 1/2$ и $\beta = \lambda/2$ (начало координат перенесено в угловую точку пластины).

Рассмотрим отдельно случай $\beta = \lambda/2$. За функцию $u_2(\alpha, \beta)$ примем затухающее в глубь области пластины решение уравнения $\partial^2 u/\partial\alpha^2(\varepsilon^2\partial^2 u_2/\partial\alpha^2 - \gamma^2 u_2) = 0$, которое получается из (1.2), если сохранить в нем лишь старшие производные по α с малым параметром и без него, а правую часть считать равной нулю. Из этого уравнения следует, что для окрестности точки контура пластины с координатами $\alpha = 0$, $\beta = \lambda/2$ решение имеет вид погранслоя

$$u_2(\alpha, \beta) = \psi(\beta)\exp(-\gamma\alpha/\varepsilon) \tag{4.2}$$

где $\psi(\beta)$ — медленно меняющаяся функция.

Функция $u_2(\alpha, \beta)$ в отличие от $u_1(\alpha, \beta)$ при дифференцировании по α сильно возрастает. Поэтому из условия выполнения (2.3) следует, что

$$u \approx u_1, \quad \partial u/\partial\alpha \approx \partial u_1/\partial\alpha + \partial u_2/\partial\alpha, \quad \partial^2 u/\partial\alpha^2 \approx \partial^2 u_2/\partial\alpha^2 \tag{4.3}$$

Следовательно, функция u_1 определяется независимо от u_2 как решение уравнения (4.1) с учетом первого из краевых условий (1.3). Это решение легко записывается в виде двойного тригонометрического ряда.

Обозначим $C_1 = \partial u_1/\partial \alpha$ при $\alpha = 0$, $\beta = \lambda/2$, $C_3 = \psi(\lambda/2)$. Тогда, используя (4.2), второе из равенств (4.3) и второе из краевых условий (1.3), для точки контура $\alpha = 0$, $\beta = \lambda/2$ получаем $C_3 = \varepsilon C_1/\gamma$. Поэтому для этой точки в соответствии с третьим из равенств (4.3) находим $\partial^2 u/\partial \alpha^2 = \gamma C_1/\varepsilon$.

Аналогично из рассмотрения сечения пластины $\alpha = 1/2$ получим, что в точке контура $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$, $\partial^2 u/\partial \beta^2 = C_2/\varepsilon$, где $C_2 = \partial u_1/\partial \beta$ при $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$.

Окончательно находим

$$u_0 = u_1(1/2, \lambda/2), \quad M_0 = \max\left\{\frac{\gamma C_1}{\varepsilon}, \frac{C_2}{\varepsilon}\right\} \tag{4.4}$$

Приведем значения u_0, C_1, C_2, соответствующие решению для $u_1(\alpha, \beta)$:

$$u_0 = \frac{16\lambda^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{m=1}^{\infty}{}' (-1)^x \frac{1}{nm(\gamma^2\lambda^2 m^2 + n^2)}$$

$$C_1 = \frac{16\lambda^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{m=1}^{\infty}{}' (-1)^{1/2(n-1)} \frac{1}{n(\gamma^2\lambda^2 m^2 + n^2)}$$

$$C_2 = \frac{16\lambda}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{m=1}^{\infty}{}' (-1)^{1/2(m-1)} \frac{1}{m(\gamma^2\lambda^2 m^2 + n^2)}$$

где $x = 1/2\,(n + m - 2)$, штрихи у знаков суммирования означают, что n и m принимают лишь нечетные значения.

Численный анализ результатов, полученных асимптотическим методом и методом декомпозиции, позволил установить, что в диапазоне табл 1—3:

$$\varepsilon^2_{\min} = \min_{(\gamma^2, \lambda)} \varepsilon_0^2(\gamma^2, \lambda) = 10^{-4}$$

На основании полученных результатов можно сделать некоторые выводы, имеющие важное прикладное значение: в случае, когда $\varepsilon^2 \geq 0{,}5$, в расчетах пластины наличие растягивающих усилий можно не учитывать (при этом могут быть использованы имеющиеся в литературе таблицы); если $\varepsilon^2 \leq 10^{-4}$ при расчетах пластины можно использовать формулы (4.4), полученные на основании асимптотического анализа (растягивающие усилия достаточно велики); в случае, когда $10^{-4} \leq \varepsilon^2 \leq 0{,}5$, следует пользоваться табл. 1—3, а для значений γ^2 и λ, которые не охвачены этими таблицами, можно использовать приближенное аналитическое решение, полученное в публикуемой работе методом декомпозиции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов А. А., Ульянова В. И.* Об одном методе решения уравнения типа бигармонического с сингулярно входящим малым параметром//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 4. С. 567—575.
2. *Пшеничнов Г. И.* Метод декомпозиции решения уравнений и краевых задач//ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 792—794.
3. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.
4. *Галишникова В. В., Пшеничнов Г. И.* Решение задачи изгиба прямоугольной пластинки с упругим контуром методом декомпозиции//Расчеты на прочность. М.: Машиностр., 1990. Вып. 32.
5. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. Научн.-теор. пособие. М.: Высш. шк., 1990. 208 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.III.1992