

УДК 539.3

© 1993 г. В. Н. ЮРКОВ

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РЕШЕНИИ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК, СОДЕРЖАЩИХ ТРЕЩИНЫ-РАЗРЕЗЫ

Рассматриваются линейные и геометрически нелинейные двухмерные и трехмерные задачи теории трещин в оболочках. Материал рассматриваемых оболочек может обладать свойствами ортотропного, трансверсально-изотропного или изотропного материала. Для вычисления основной характеристики сингулярного поля напряжений в вершине трещины-разреза в оболочке — коэффициента интенсивности напряжений — предложены энергетические методы: метод дифференциальной жесткости (метод податливости) и метод виртуального роста трещины. Эти методы реализуются при помощи МКЭ и сочетания МКЭ и МГЭ. Причем МКЭ применяется для расчета двумерных геометрически линейных и нелинейных краевых задач неклассической теории оболочек с трещинами-разрезами, а сочетания МКЭ и МГЭ для расчета линейных задач теории трещин, но в трехмерной постановке.

Поведение оболочек с трещинами-разрезами описывается геометрически нелинейной теорией типа Тимошенко в квадратичном приближении при малых удлинениях и сдвигах [1].

1. Постановка задачи. Сформулируем вариационную краевую задачу неклассической теории типа Тимошенко ортотропных оболочек, содержащих трещины-разрезы.

Рассмотрим тонкую ортотропную оболочку, ослабленную сквозной прямолинейной в плане трещиной-разрезом длиной $2L$, расположенной вдоль оси x . Система координат x , y и z совпадает с линиями пересечения плоскостей упругой симметрии и отнесена к срединной поверхности оболочки, начало которой находится в центре разреза. На внешнюю поверхность оболочки с трещиной-разрезом действует равномерно распределенная нагрузка q_1 и растягивающая нагрузка q_2 , действующая вдоль оси y , приложенная по нормали боковых граней.

Вариационная постановка задачи теории оболочек с трещинами-разрезами, заключается в следующем: определить стационарное значение функционала V , выражающего потенциальную энергию оболочки с трещиной-разрезом, исходя из условия, что вариация функционала $\delta V = 0$, по всем независимым функциональным аргументам, удовлетворяющим граничным условиям на контуре оболочки

$$u = u^0, v = v^0, w = w^0, \varphi = \varphi^0, \psi = \psi^0$$

$$N = N^0, S = S^0, Q = Q^0, M = M^0, H = H^0 \quad (1.1)$$

где u , v и w — физические компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности, φ и ψ — углы поворота нормали к срединной поверхности в плоскостях xz и yz , N , S и Q — растягивающая, сдвигающая и перерезывающая силы, а M и H — изгибающий и крутящий моменты, действующие в поперечном нормальном сечении оболочки, перемещения и усилия, обозначенные в степени нуль — это заданные граничные условия; краевым условиям на поверхности разреза $|x| \leq L$ при $y = 0$:

$$N = 0, S = 0, Q = 0, M = 0, H = 0 \quad (1.2)$$

а также условиям затухания возмущений на «бесконечности»

$$u|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad v|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad w|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

$$\phi|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \psi|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

где ρ — расстояние от вершины трещины-разреза.

Решение рассматриваемой вариационной задачи теории трещин в оболочках в основном сводится к определению локального поля сингулярных напряжений в вершине трещины-разреза. Амплитуда этого поля оценивается коэффициентами интенсивности напряжений. В работе рассматриваются задачи только с симметричным полем напряжений около трещин-разрезов в оболочках, характеризуемые коэффициентом интенсивности напряжений нормального отрыва K_I [2].

2. Метод решения. Для вычисления коэффициентов K_I при различной длине трещины-разреза в оболочке предлагаются энергетические методы: метод податливости и метод виртуального роста трещины.

Метод податливости описывается следующими формулами: потенциальная энергия оболочек с трещинами-разрезами вычисляется по теореме Клапейрона

$$V = \frac{1}{2} \left(\iint_{S_1} q_1 r_1 dS_1 + \iint_{S_2} q_2 r_2 dS_2 \right) \quad (2.1)$$

где r_1 и r_2 — векторы перемещений точек срединной поверхности оболочки с трещиной-разрезом, появляющиеся в результате соответствующих нагрузок; S_1 и S_2 — поверхности, на которых действуют нагрузки q_1 и q_2 . При вычислении потенциальной энергии V , согласно (2.1), удовлетворяются условия (1.1), а условия (1.2) выполняются, если внешнюю нагрузку, действующую на оболочку, расположить в непосредственной близости от берегов трещины-разреза.

Интенсивность освобождающейся энергии G_I вычисляется, согласно концепции Гриффитса

$$G_I = \partial V / \partial L \quad (2.2)$$

и тем самым автоматически удовлетворяются условия (1.3).

Так как модель Тимошенко позволяет объединить коэффициент интенсивности напряжений при растяжении и изгибе¹, то для определения коэффициента K_I получим зависимость его среднеквадратичного значения от интенсивности G_I . Для этого примем гипотезу: поверхностный слой оболочки у вершины трещины-разреза на растягиваемой стороне локально ведет себя аналогично пластине, подверженной растяжению. На основании этой гипотезы выразим интенсивность G_I как предел, к которому стремится работа сил $\sigma_y dx$ на перемещениях v

$$G_I = 2 \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\delta_1} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{\delta_1} \frac{1}{2} \sigma_y v dx dz \quad (2.3)$$

где δ_1 — величина продвижения трещины-разреза, σ_y — нормальное напряжение, действующее в поверхностном слое оболочки в вершине разреза, т. е. в точке $z = -h/2$, v — перемещение в той же точке, h — толщина оболочки.

Асимптотическое выражение для напряжений при $\theta = 0$, где θ — угол между осью x и радиусом-вектором, начало которого находится в вершине неподвижного разреза, не зависит от упругих характеристик материала и, согласно [2] имеет вид

$$\sigma_y = K_I / \sqrt{2\pi x} \quad (2.4)$$

Введенная гипотеза позволяет уравнения в перемещениях, описывающие поведение ортотропных пологих оболочек типа Тимошенко, представить в виде

¹ Юрков В. Н. Метод податливости в задачах о напряженно-деформированном состоянии пластин, содержащих трещины. Автореферат дисс. канд. техн. наук: 01.02.04. Киев, 1990. 24 с.

двух независимых систем: первая — описывает плоское напряженное состояние (неизвестные u и v), а вторая — изгиб (неизвестные w , φ и ψ) [2]. На основании этого можно получить асимптотическое выражение для перемещений при $\theta = \Pi$ ($\rho = \delta_1 - x$); согласно [3] имеем

$$v = 4K_1 \sqrt{\frac{\delta_1 - x}{2\pi}} \left\{ \left(\frac{a_{11}a_{22}}{2} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{a_{22}}{a_{11}} \right)^{1/2} + \frac{2a_{12} + a_{66}}{2a_{11}} \right]^{1/2} \right\} \quad (2.5)$$

$$a_{11} = 1/E_x, \quad a_{22} = 1/E_y, \quad a_{12} = -\nu_{xy}/E_x, \quad a_{66} = \mu_{xy}$$

где E_x , E_y — модули упругости Юнга в направлении осей x и y , μ_{xy} — модуль сдвига в плоскости xy , ν_{xy} — коэффициент Пуассона.

После подстановки (2.4) и (2.5) в (2.3) и интегрирования, получаем искомую зависимость

$$K_1^2 = G_1 / \left\{ \left(\frac{a_{11}a_{22}}{2} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{a_{22}}{a_{11}} \right)^{1/2} + \frac{2a_{12} + a_{66}}{2a_{11}} \right] \right\} \quad (2.6)$$

Если в формулу (2.6) подставить упругие характеристики трансверсально-изотропного или изотропного материалов, то получим следующую зависимость

$$K_1^2 = G_1 E \quad (2.7)$$

которую будем использовать для трансверсально-изотропных и изотропных оболочек с трещинами-разрезами.

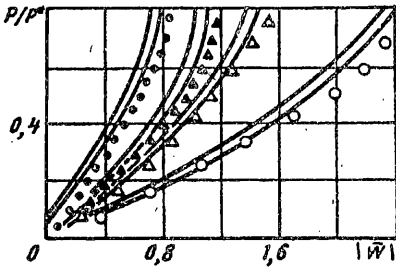
Таким образом, формулами (2.1), (2.2), (2.6) или (2.7) определяется метод податливости.

Метод виртуального роста трещины аналогичен методу податливости, но является более точным и экономичным. Это достигается за счет того, что для вычисления интенсивности G_1 (2.2) используется следующая процедура: вместо аппроксимации точного оператора дифференцирования приближенным конечно-разностным оператором, так как это делается в методе податливости, получение приращения потенциальной энергии оболочки с трещиной-разрезом $V(\Delta L) = V(L + \Delta L) - V(L)$ осуществляется не путем увеличения длины трещины на одну или несколько ячеек сетки, а за счет изменения координаты вершины трещины во внутрь ячейки. В результате этой операции изменяется жесткость элементов, непосредственно прилегающих к вершине трещины; учитывая это, путем исключения решаются системы линейных и нелинейных уравнений. Эта особенность позволяет вычислять за одно решение изменение энергии и тем самым достигаются указанные преимущества.

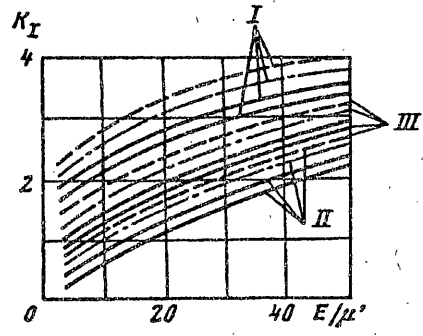
Основной трудностью в обоих вышеописанных методах является вычисление компонентов векторов перемещений. Для их определения используется МКЭ в варианте перемещений. На основании [4] выведена матрица жесткости суперпараметрического треугольного конечного элемента из ортотропного материала для геометрически нелинейной теории типа Тимошенко пологих оболочек.

Известно, что в действительности всегда существуют эффекты трехмерности в локальной области у вершины трещины-разреза. Поэтому очень важно уметь решать трехмерные задачи теории трещин в оболочках. Для решения этих задач теории трещин используется сочетание МКЭ и МГЭ [5, 6]. Опишем этот прием.

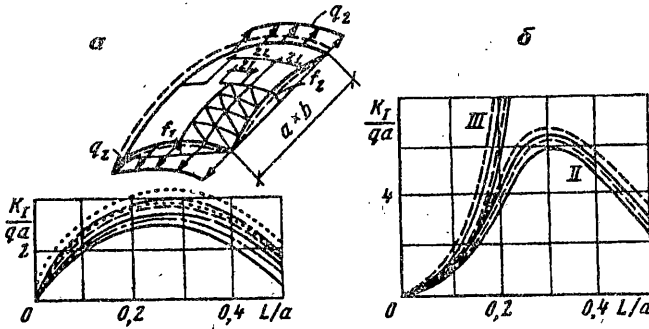
Оболочка с трещиной-разрезом дискретизируется треугольными конечными элементами. В узлах МКЭ определяются перемещения и напряжения; напряжения — $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$, а деформация — $\varepsilon_z = -\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$, где ν — коэффициент Пуассона для изотропного материала. Затем определяется прямоугольной формы граница необходимой области вокруг трещины-разреза, имеющая узлы с известными граничными параметрами и при помощи МГЭ уточняются перемещения в узлах выделенной области. После этого, используя метод податливости, в котором уже интенсивность



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

энергии (2.2) дифференцируется по F , где F — площадь одной из поверхностей разреза, вычисляется K_I . Для увеличения точности сгущается сетка элементов.

В МГЭ используется следующее основное уравнение:

$$r_i(t) + \iint_{S_0} A_{ij}(t, \xi) r_j(\xi) dS_0 = \iint_{S_0} B_{ij}(t, \xi) f_j(\xi) dS_0 \quad (2.8)$$

где $r_i(t)$ — вектор перемещений в произвольной точке области вокруг трещины-разреза, $r_j(\xi)$ и $f_j(\xi)$ — значения перемещений и напряжений на границе области, $A_{ij}(t, \xi)$ и $B_{ij}(t, \xi)$ — ядра уравнений, вычисляемые по формулам, приведенным в [6], S_0 — поверхность выделенной области.

Рассмотренный прием позволяет избежать недостатка, отмеченного в [6], связанного с влиянием моделирования обеих компланарных поверхностей трещины на вычислительный процесс.

3. Численные примеры. На численном эксперименте фиг. 1 иллюстрируется сходимость результатов, полученных на основании МКЭ с экспериментальными данными, приведенными в [7].

Согласно эксперименту, для ортотропной цилиндрической оболочки с двумя симметричными трещинами, расположенными вдоль направляющей оси симметрии, и относительной длиной $2a_1 = 0,25$ (светлые точки и треугольники) и $2a_1 = 0,4$ (темные точки и треугольники), где $2a_1 = 2L/PR$, определялись нормальные перемещения у берега разреза, причем максимальные перемещения обозначены точками, а треугольниками — прогибы в центре разреза. Оболочка находилась под действием осевых сил P , нагружения которых осуществлялось по схеме «мертвого груза».

На фиг. 1 представлены графики, полученные МКЭ на основании выведенной

№	$E_x/E_y = 2$	5	10	20	40	60
1	3,664	3,669	3,667	3,667	3,668	3,668
	3,842	3,845	3,847	3,847	3,846	3,846
2	3,798	3,796	3,796	3,795	3,795	3,796
	3,981	3,983	3,983	3,984	3,984	3,984
3	3,817	3,816	3,817	3,817	3,819	3,819
	4,085	4,087	4,087	4,086	4,086	4,088

матрицы жесткости, при разбивке полуосей симметрии вышеописанной оболочки с трещинами на $n = 13$ и $n = 25$ узлов. Относительная погрешность между значениями, полученными при сгущении сетки не превышает 6%, а между значениями, вычисленными при $n = 25$ узлов и данными эксперимента не более 4%. На основании этих расчетов можно сделать вывод, что матрица жесткости выведена верно и ею можно пользоваться при расчетах. Численный эксперимент подтверждает нелинейную зависимость прогибов от осевых сил.

Рассмотрим нелинейчатую изотропную оболочку (фиг. 2), представляющую собой прямоугольную в плане поверхность круговой двойкой кривизны, свободно опертую по контуру и содержащую вдоль меньшей оси симметрии три случая расположения трещины-разреза: I — в центре; II — с боку; III — коллинеарно с обеих сторон. Ее геометрические и физические характеристики следующие: $h/R_1 = 0,05$; $h/R_2 = 0,025$, $a = 0,30$ м; $b = 2a$, $f_1 = 0,0678$ м, $f_2 = 0,1356$ м, $\nu = 0,3$, нагрузки q_1 и q_2 .

Решение рассматриваемой задачи сводится к вычислению коэффициента K_1 . Для его определения применяются: метод податливости и метод виртуального роста трещины, причем первый метод используется для решения задач с менее густой сеткой.

На фиг. 2, а для первого случая расположения разреза представлены графики, иллюстрирующие зависимость коэффициента K_1 от L/a . Для построения графиков, изображающих линейное решение (сплошные линии), четверть оболочки с разрезом дискретизировалась конечными элементами при разбивке ее полуосей симметрии на $n = 13$ и $n = 25$ узлов. Относительная погрешность между численными расчетами не превосходит 5%. Для сравнения полученных численных результатов с аналитическими решениями представлен расчет коэффициента K_1 по формулам, приведенным в [8]. Относительная погрешность между аналитическим и численным ($n = 25$ узлов) расчетами составляет менее 3%. График, изображающий решение, полученное на основании [8], показан штриховой линией.

Штрихпунктирной линией на фиг. 2, а представлен график, показывающий расчет коэффициента K_1 по пространственной теории на основании сочетания МКЭ и МГЭ, при разбивке полуосей симметрии оболочки с трещиной-разрезом на $n = 13$ и $n = 25$ узлов. Относительная погрешность между соответствующими графиками не превышает 4%.

Точками, изображены графики, построенные на основании геометрически нелинейной двумерной теории оболочек, при той же разбивке полуосей симметрии.

На фиг. 2, б приведены графики, полученные на основании линейной (сплошные линии) и нелинейной (штриховые линии) теориям для второго и третьего случаев расположения разреза, при разбивке оси симметрии оболочки с разрезом на $n = 13$ и $n = 25$ узлов. Относительная погрешность между соответствующими графиками как для линейной, так и для нелинейной теорий составляет менее 5%.

В отношении использования формулы (2.3) в нелинейной теории можно сказать следующее: применение ее к вычислению коэффициента K_1 базируется на теореме [9] о том, что главная часть энергетического решения вокруг вершины трещины определяется линейной частью задачи. Если подойти к решению не-

линейных задач с позиций предложенной теории, то можно ограничиться вычислением интенсивности энергии.

Представим расчет коэффициентом K_1 для вышеописанной нелинейной оболочки с трещинами-разрезами, материал которой обладает трансверсально-изотропными свойствами.

На фиг. 3 изображены графики, показывающие изменение зависимости коэффициентов K_1 от параметра μ' , где μ' — показывает изменение трансверсальности по толщине оболочки. Для всех случаев расположения трещины-разреза построены графики при $h/L=1$. Графики построены при способе разбивки аналогичном предыдущему расчету. Относительная погрешность, при всех положениях трещины-разреза, между значениями соответствующих графиков не более 5%.

На основании проведенных численных расчетов можно сделать вывод, что коэффициент интенсивности напряжений существенно зависит от трансверсальности материала по толщине оболочки.

Штрихпунктирной линией на фиг. 3 показан расчет коэффициентов K_1 , проведенный на основании пространственной теории ($n=25$ узлов). Относительная погрешность между значениями графиков, полученных на основании двухмерной и трехмерной теориям не превышает 4%.

Штриховой линией на фиг. 3 показаны графики, полученные на основании геометрически нелинейной теории оболочек, при разбивке ее оси симметрии, для всех случаев расположения трещины-разреза, $n=25$ узлов.

Приведем численное исследование влияния степени ортотропии E_x/E_y на величину коэффициента K_1 для рассматриваемой нелинейчатой оболочки с первым случаем расположения трещины-разреза, материал которой стеклопластик. Результаты расчета представлены в таблице по трем теориям: № 1 — линейная двухмерная, № 2 — линейная пространственная, № 3 — нелинейная двухмерная ($h/L=1$). Первые строки соответствуют $n=13$, а вторые $n=25$ узлов.

Из анализа данных, приведенных в таблице, следует, что степень ортотропии E_x/E_y не влияет на величину коэффициента интенсивности напряжений. Имеющаяся относительная погрешность относится к вычислительной погрешности и густоте сетки.

Таким образом, предложенные энергетические методы позволяют эффективно и достаточно точно вычислять коэффициент K_1 для линейных и нелинейных двумерных и трехмерных краевых задач теории оболочек, содержащих трещины-разрезы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворovich И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 373 с.
2. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка, 1985. 221 с.
3. Си Г., Либовец Г. Математическая теория хрупкого разрушения//Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 83—203.
4. Утку С. Матрица жесткостей для тонких треугольных элементов ненулевой гауссовой кривизны//Ракетн. техника и космонавтика. 1967. Т. 5. № 9. С. 150—159.
5. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
6. Метод граничных интегральных уравнений/Под ред. Т. Круза, Ф. Риццо, М.: Мир, 1978. 210 с.
7. Моссаковский В. И., Ободан Н. И., Прокопало Е. Ф. Влияние геометрической нелинейности на разрушение тонкостенных конструкций с трещинами//Докл. АН СССР. 1989. Т. 308. № 5. С. 1079—1081.
8. Си Дж. Ч., Хагендорф Г. Ч. Новая теория сферических оболочек с трещинами//Тонкостенные оболочечные конструкции. М.: Машиностроение, 1980. С. 509—533.
9. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещины. М.: Наука, 1984. 255 с.