МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1993

УДК 531.8:534.1

© 1993 г. Е. М. ПОТАПЕНКО

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Современные управляемые динамические системы обычно описываются дифференциальными уравнениями очень высоких порядков (вплоть до бесконечности), что затрудняет синтез систем управления. Задача усугубляется тем, что часть коэффициентов уравнений движения точно не известны. В связи с этим возникает задача разработки систем управления по усеченным (редуцированным, основным) уравнениям, обладающих определенными показателями качества и сохраняющих работоспособность при учете отброшенной при синтезе (присоединенной, второстепенной) подсистемы, параметры которой неточно известны. Такая система управления называется робастной.

Разработку робастных систем управления проводят в частотной [1, 2] или временной областях [3, 4]. Во втором случае матричное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее систему, приводят к форме Коши, вследствие чего требуется обращение часто плохо обусловленных матриц, теряется обычно имеющая место на практике симметричность матриц, а их порядок увеличивается в два раза [5].

В публикуемой работе описываются методы синтеза робастного по отношению к присоединенной подсистеме регулятора, обеспечивающего при отсутствии присоединенной подсистемы заданную степень устойчивости. Особенностью является то, что синтез осуществляется по матричному дифференциальному уравнению второго порядка.

1. Уравнения движения. Для подавляющего большинства механических систем уравнения движения выводятся естественным образом в виде матричного дифференциального уравнения второго порядка

$$M^\circ x^{\cdot\cdot} + R^\circ x^{\cdot} + K^\circ x = Bu, \quad y^p = C^p x, \quad y^r = C^r x^{\cdot}, \quad x \in R^N \tag{1.1}$$

$$u \in R^{m_a}, \quad y^p \in R^{m_p}, \quad y^r \in R^{m_r}; \quad M^\circ, \ R^\circ, \ K^\circ \in R^{N\times N}$$

где x, u, y^p, y^r — векторы позиционных координат, управления, измерения положения и скорости соответственно; M^0 — массовая матрица; R^0 — матрица демпфирования и гироскопических сил; K^0 — матрица потенциальных и циркуляционных сил. По физическому смыслу $M^0 > 0$, но может быть плохо обусловленной.

Регулятор, формирующий на основании измерений сигнал u, может представлять собой как статическое, так и динамическое звено. Динамический регулятор можно формировать в виде матричного дифференциального уравнения второго порядка, которое можно объединить с уравнением (1.1), в результате чего уравнения сводятся к уравнениям со статическим регулятором. При этом в векторы измерения должны быть включены векторы позиционных и скоростных координат динамического регулятора. Поэтому в дальнейшем будет рассматриваться статический регулятор

$$u = -H^p y^p - H^r y^r \tag{1.2}$$

Подстановка (1.2) в (1.1) дает уравнение

$$Mx^{\cdot\cdot} + Rx^{\cdot} + Kx = 0 \tag{1.3}$$

$$M = M^{\circ},\ R = R^{\circ} + BH^{r}C^{r},\ K = K^{\circ} + BH^{p}C^{p} \tag{1.4}$$

На практике динамическая система (1.3) может иметь очень высокий порядок. Поэтому с целью упрощения синтеза системы управления из полной системы выделяется основная и второстепенная подсистемы, причем последней пренебрегают.

Пусть x_1 и x_2 векторы соответственно основной и второстепенной подсистем. Тогда уравнения (1.1) представляются в виде

$$\left\|\begin{matrix} M_{11}^{\circ} & M_{12}^{\circ} \\ M_{21}^{\circ} & M_{22}^{\circ}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} x_1^{\cdot\cdot} \\ x_2^{\cdot\cdot}\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} R_{11}^{\circ} & R_{12}^{\circ} \\ R_{21}^{\circ} & R_{22}^{\circ}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} x_1^{\cdot} \\ x_2^{\cdot}\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} K_{11}^{\circ} & K_{12}^{\circ} \\ K_{21}^{\circ} & K_{22}^{\circ}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} B_1 \\ B_2\end{matrix}\right\| u \tag{1.5}$$

$$y^{p} = C_1^{p}x_1 + C_2^{p}x_2,\ y^{r} = C_1^{r}x_1^{\cdot} + C_2^{r}x_2^{\cdot},\ x_1 \in R^{n},\ x_2 \in R^{N-n}$$

В соответствии с принятым расчленением системы уравнение (1.3) принимает вид

$$\left\|\begin{matrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} x_1^{\cdot\cdot} \\ x_2^{\cdot\cdot}\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} x_1^{\cdot} \\ x_2^{\cdot}\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2\end{matrix}\right\| = 0 \tag{1.6}$$

$$R_{ij} = R_{ij}^{\circ} + B_iH^{r}C_j^{r},\ K_{ij} = K_{ij}^{\circ} + B_iH^{p}C_j^{p}\ (i=j=1,\ 2;\ i=1,\ j=2;\ i=2,\ j=1 \tag{1.7}$$

Недиагональные блоки в (1.7) представляют собой матрицы взаимовлияния подсистем. Если синтезировать асимптотически устойчивую систему по усеченному уравнению

$$M_{11}x_1^{\cdot\cdot} + R_{11}x_1^{\cdot} + K_{11}x_1 = 0 \tag{1.8}$$

то полная система (1.6) может оказаться неустойчивой из-за характера взаимодействия подсистем. Поэтому задача сводится к синтезу такой системы управления, которая обеспечивает заданные показатели качества усеченной системы и асимптотическую устойчивость полной системы.

2. Синтез усеченной системы с заданной степенью устойчивости. Характеристическое уравнение для уравнения (1.8) имеет вид

$$\det\,(M_{11}p^2 + R_{11}p + K_{11}) = 0 \tag{2.1}$$

Имеют место следующие теоремы [6].

Теорема 1. Если матрицы M_{11}, R_{11}, K_{11} являются определенно положительными, то корни уравнения (2.1) имеют отрицательные действительные части.

Теорема 2. Если матрица M_{11} является определенно положительной, матрицы R_{11} и K_{11} неотрицательно определенными, то уравнение (2.1) не имеет корней с положительной действительной частью.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. Если

$$M_{11} > 0,\ R_{11} - 2M_{11}\alpha \geq 0,\ K_{11} + M_{11}\alpha^2 - R_{11}\alpha \geq 0 \tag{2.2}$$

то действительные части $-\alpha_i$ корней уравнения (2.1) удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_1 \geq \alpha \quad (i = 1, 2, \ldots, 2n) \tag{2.3}$$

Доказательство. В уравнении (2.1) вводится смещение корней по зависимости

$$p = -\alpha + p_* \tag{2.4}$$

в результате чего уравнение (2.1) принимает вид

$$\det (M_{11}p_*^2 + R_{11}^* p_* + K_{11}^*) = 0 \tag{2.5}$$

$$R_{11}^* = R_{11} - 2M_{11}\alpha, \quad K_{11}^* = K_{11} + M_{11}\alpha^2 - R_{11}\alpha$$

В соответствии с теоремой 2 корни уравнения (2.5) не будут иметь положительных действительных частей при выполнении условий $M_{11} > 0$, $R_{11}^* \geq 0$, $K_{11}^* \geq 0$. При этом в соответствии с (2.4) действительные части корней уравнения (2.1) будут удовлетворять соотношениям (2.3), что и требовалось доказать.

Для синтеза системы по теореме 3 следует подставить R_{11} и K_{11} из (1.7) в (2.2) и по соотношениям (2.2) подобрать неизвестные матрицы H^p и H^r. При этом полезен будет достаточный критерий определенной положительности, который гласит [7, 8]: если для квадратной матрицы (a_{ij}) порядка n выполняются условия

$$0 < a_{ii} > \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.6}$$

то она является определенно положительной. В случае неотрицательности и симметричности матрицы (a_{ij}) неравенства (2.6) заменяются на соотношения [6, с. 80; 7, с. 109]:

$$a_{ii} \geq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| > 0$$

3. Робастность. На основании теоремы 1 для асимптотической устойчивости полной системы (1.6) достаточно, чтобы матрицы коэффициентов в (1.6) были определенно положительными. Для выявления определенной положительности блочных матриц докажем лемму.

Лемма. Если матрица H представлена в блочном виде

$$H = \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix}$$

причем A и D квадратные, то для положительной определенности матрицы H необходимо и достаточно выполнение одного из условий

$$A_c > 0, \quad D_c - 1/4\,(B^T + C)\,A_c^{-1}\,(B + C^T) > 0$$

$$D_c > 0, \quad A_c - 1/4\,(B + C^T)\,D_c^{-1}\,(B^T + C) > 0$$

$$A_c = 1/2\,(A + A^T), \quad D_c = 1/2\,(D + D^T)$$

Доказательство. Матрицу H можно представить в виде, где

$$H_1 = \begin{Vmatrix} A_c & E \\ E^T & D_c \end{Vmatrix}, \quad H_2 = \begin{Vmatrix} A_k & F \\ -F^T & D_k \end{Vmatrix}, \quad A_k = 1/2\,(A - A^T), \quad D_k = 1/2\,(D - D^T)$$

$$E = 1/2\,(B + C^T), \quad F = 1/2\,(B - C^T)$$

Матрица H_2 является кососимметрической, т. е. $H_2^T = -H_2$.

Рассмотрим квадратичную форму $W = x^T H_2 x$. Так как W является скаляром, то $W = W^T$. Следовательно, $(x^T H_2 x) = x^T H_2^T x = -x^T H_2 x$. Но скаляр равен своему противоположному по знаку значению только в том случае, когда он равен нулю. Поэтому положительная (отрицательная) определенность (полуопределенность) матрицы H целиком определяется свойствами симметрической матрицы H_1.

Теорема 4 [8]: для того, чтобы матрица H_1 при квадратных матрицах A_c и

D_c была определенно положительной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух условий:

1) $A_c > 0, \quad D_c - E^T A_c^{-1} E > 0$, 2) $D_c > 0, \quad A_c - E D_c^{-1} E^T > 0$

С помощью этой теоремы можно убедиться в справедливости доказываемой леммы. Как следует из леммы, матрицы коэффициентов в (1.6) будут определенно положительными, а вся система асимптотически устойчива при выполнении условий

$$
\begin{aligned}
&M_{1s} > 0, \quad M_{2s} - M_s^T M_{1s}^{-1} M_s > 0, \quad M_s = 1/2\,(M_{12} + M_{21}^T)\\
&R_{1s} > 0, \quad R_{2s} - R_s^T R_{1s}^{-1} R_s > 0, \quad R_s = 1/2\,(R_{12} + R_{21}^T)\\
&K_{1s} > 0, \quad K_{2s} - K_s^T K_{1s}^{-1} K_s > 0, \quad K_s = 1/2\,(K_{12} + K_{21}^T)\\
&A_{js} = 1/2\,(A_{jj} + A_{jj}^T), \quad j = 1, 2, \quad A = M, R, K
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Это позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 5. Если выполняются условия (3.1), то система (1.8), (1.7) робастна по отношению к присоединенной системе.

Нетрудно убедиться в том, что при выполнении условий (2.2) и $\alpha > 0$, матрицы M_{11}, R_{11}, $K_{11} > 0$. Поэтому при синтезе системы управления по теореме 3 условия (3.1) могут быть реализованы.

Покажем, что для обеспечения робастности требование $R > 0$ можно ослабить до $R \geq 0$. Умножение слева уравнения (1.6) на $\| x_1^{\cdot T}, \; x_2^{\cdot T} \|$ дает

$$V^{\cdot} = - x_1^{\cdot T} R_{11} x_1^{\cdot} - x_1^{\cdot T} 2 R_s x_2^{\cdot} - x_2^{\cdot T} R_{22} x_2^{\cdot} \tag{3.2}$$

$$2V = x^{\cdot T} M x^{\cdot} + x^T K x \tag{3.3}$$

В дальнейшем будет предполагаться, что

$$R_{11} > 0, \quad 2R_s = R_{12} + R_{21}^T = 0, \quad R_{22} \geq 0; \quad M, \; K > 0 \tag{3.4}$$

вследствие чего функция V определенно положительная, а функция $V^{\cdot}$ знакоотрицательная. Для того, чтобы найти условия асимптотической устойчивости с помощью теоремы Барбашина—Красовского [9], надо найти условия, при которых ни на одной траектории уравнения (1.6), кроме $x^T = \| x_1^T x_2^T \| \equiv 0$, не выполняется условие $V^{\cdot} \equiv 0$.

Пусть $V^{\cdot} \equiv 0$. Тогда из (3.2), (3.4) следует $x_1^{\cdot} \equiv x_1^{\cdot\cdot} \equiv 0$, $x_1 = x_1^{\circ} = \mathrm{const}$. При этих условиях уравнение (1.6) распадается на два уравнения

$$
\begin{aligned}
&M_{12} x_2^{\cdot\cdot} + R_{12} x_2^{\cdot} + K_{12} x_2 = - K_{11} x_1^{\circ}\\
&M_{22} x_2^{\cdot\cdot} + R_{22} x_2^{\cdot} + K_{22} x_2 = - K_{21} x_1^{\circ}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Уравнения (3.5) должны быть совместными, т. е. должны иметь одно и то же решение. Решение этих уравнений складывается из постоянной составляющей x_2°, являющейся частным решением, и из общего решения соответствующих однородных уравнений. Частному решению соответствуют уравнения $K_{12} x_2^{\circ} = -K_{11} x_1^{\circ}$, $K_{22} x_2^{\circ} = -K_{21} x_1^{\circ}$. Эти уравнения можно собрать в одно уравнение

$$K x^{\circ} = 0, \quad x^{\circ} = [(x_1^{\circ})^T \, (x_2^{\circ})^T]^T \tag{3.6}$$

Поскольку $K > 0$, то $\det K \neq 0$ [6—10]. Поэтому уравнение (3.6) имеет единственное решение $x^0 \equiv 0$.

Проделанные выкладки и теорема Барбашина—Красовского позволяют сформулировать следующую промежуточную теорему.

Теорема 6. Если для уравнения (1.6) выполняются условия (3.4), то его нулевое решение асимптотически устойчиво по части переменных x_1, $x_1^{\bullet}$.

Продолжим исследование робастности при условии $R \geq 0$. Однородная система для системы (3.5) имеет вид

$$M_{12}x_2^{\bullet\bullet} + R_{12}x_2^{\bullet} + K_{12}x_2 = 0 \tag{3.7}$$

$$M_{22}x_2^{\bullet\bullet} + R_{22}x_2^{\bullet} + K_{22}x_2 = 0 \tag{3.8}$$

Для выполнения условий теоремы Барбашина — Красовского применительно к уравнению (1.6) необходимо, чтобы система (3.7), (3.8) допускала только нулевое решение $x_2 \equiv 0$. Таким образом, может быть сформулирована

Теорема 7. Если выполняются условия (3.4) и кроме того система (3.7), (3.8) допускает только нулевое решение $x_2 \equiv 0$, то нулевое решение уравнения (1.6) является асимптотически устойчивым, а система (1.8), (1.7) робастна по отношению к присоединенной системе.

Примечание. Определенную положительную матриц M и K можно проверить по зависимостям (3.1).

Сама по себе теорема 7 неконструктивна. Поэтому рассмотрим частные случаи.

Следствие 1. Если для уравнения (1.6) $2N > 2n \geq n$, имеют место соотношения (3.4) и выполняется хотя бы одно из следующих сочетаний условий:

$$R_{12} = R_{22} = 0, \quad \operatorname{rank}\,(K_{12} - M_{12}M_{22}^{-1}K_{22}) = N - n \tag{3.9}$$

$$R_{12} = R_{22} = 0, \quad \operatorname{rank}\,(M_{12} - K_{12}K_{22}^{-1}M_{22}) = N - n$$

$$M_{12} = K_{12} = 0, \quad \operatorname{rank} R_{12} = N - n$$

то нулевое решение уравнения (1.6) является асимптотически устойчивым, а система (1.8), (1.7) робастна по отношению к присоединенной системе.

Доказательство. Поскольку в (3.4) $M, K > 0$, то $M_{22}, K_{22} > 0$ [8] и, следовательно $\det M_{22} \neq 0$, $\det K_{22} \neq 0$. Тогда из (3.8) при $R_{22} = 0$ $x_2^{\bullet\bullet} = -M_{22}^{-1}K_{22}x_2$. Подстановка $x_2^{\bullet\bullet}$ в уравнение (3.7) при $R_{12} = 0$ дает уравнение

$$(K_{12} - M_{12}M_{22}^{-1}K_{22})\,x_2 = 0 \tag{3.10}$$

Это уравнение имеет единственное решение $x_2 \equiv 0$ тогда и только тогда, когда выполняется первое ранговое условие в (3.9). Таким образом, первая часть следствия 1 доказана.

Из уравнения (3.8) при $R_{22} = 0$ $x_2 = -K_{22}^{-1}M_{22}x^{\bullet\bullet}$, а это совместно с уравнением (3.7) при $R_{12} = 0$ дает уравнение

$$(M_{12} - K_{12}K_{22}^{-1}M_{22})\,x_2^{\bullet\bullet} = 0 \tag{3.11}$$

Из (3.11) при выполнении второго рангового условия в (3.9) следует $x_2^{\bullet\bullet} \equiv 0$, а из уравнения (3.8) при $x_2^{\bullet\bullet} \equiv 0$ $x_2 \equiv 0$. В результате доказана вторая часть следствия 1.

Пусть теперь выполняются условия третьей части следствия 1.

Тогда из уравнения (3.7) следует, что $x_2^{\bullet} \equiv 0$ при $\operatorname{rank} R_{12} = N - n$. Из тождества $x_2^{\bullet} \equiv 0$ следует $x_2^{\bullet\bullet} \equiv 0$, $x_2 = \mathrm{const}$. При $x_2^{\bullet} \equiv x_2^{\bullet\bullet} \equiv 0$ из уравнения (3.8) следует $x_2 \equiv 0$, в результате чего доказана третья часть следствия 1.

Предыдущие рассуждения относились к случаю $2n > N$. Пусть теперь на n накладывается только естественное ограничение $n < N$.

Следствие 2. Если для уравнения (1.6) имеют место условия (3.4) и кроме того $R_{12} = R_{22} = 0$, матрицы M_{22}, K_{22} являются диагональными или $K_{22} = M_{22}\Lambda$, или $K_{22} = \Lambda M_{22}$, где $\Lambda > 0$ и является диагональной, совокупность всех корней характеристического уравнения для уравнения (3.8) содержит k групп кратных корней с кратностями m_s $(s = 1, 2, ..., k)$ и $\operatorname{rank} U_s = m_s$, для всех s, где U_s — матрица, составленная из столбцов матрицы

$$U = \left\| \begin{matrix} K_{12} - M_{12}M_{22}^{-1}K_{22} \\ M_{12} - K_{12}K_{22}^{-1}M_{22} \end{matrix} \right\| \qquad (3.12)$$

с номерами, соответствующими номерам элементов векторов x_2, относящихся к группе кратных корней с номером s, то тривиальное решение уравнения (1.6) является асимптотически устойчивым, а система (1.7), (1.8) робастна по отношению к присоединенной системе.

Доказательство. Как было показано при доказательстве следствия 1, M_{22}, $K_{22} > 0$. При выполнении условий следствия 1 в отношении матриц R_{12}, R_{22}, M_{22}, K_{22} корни характеристического уравнения для уравнения (3.8) будут определяться выражениями [10] $p_i = j\lambda_i$, $p_{N-n+i} = -j\lambda_i$, $j = \sqrt{-1}$. Пусть все корни простые. Тогда решение уравнения (3.8) представимо в виде

$$x_2^T = \| X_1 \sin(\lambda_1 t + \varphi_1) \ldots X_n \sin(\lambda_n t + \varphi_n) \| \qquad (3.13)$$

где X_1, X_2, ..., X_n, φ_1, φ_2, ..., φ_n — постоянные. Поскольку все λ_i различны, то элементы строки (3.13) будут линейно независимыми функциями. В этом случае каждая из строк уравнения (3.10) представляет собой линейную комбинацию линейно независимых функций. И если ни один из коэффициентов этой строки не равен нулю, то эта строка может быть равна нулю только при $x_2 \equiv 0$. Поэтому, если ни один из столбцов матрицы $K_{12} - M_{12}M_{22}^{-1}K_{22}$ не является нулевым, то уравнение (3.10) возможно только при $x_2 \equiv 0$. Как следует из (3.13), при линейной независимости элементов x_2 линейно независимыми будут и элементы векторов $\dot{x}_2$ и $\ddot{x}_2$. Рассуждая аналогично в отношении уравнения (3.11), можно убедиться в справедливости следствия 2 при простых корнях характеристического уравнения для уравнения (3.8).

Пусть теперь указанное характеристическое уравнение имеет k групп корней с кратностями m_s $(s = 1, 2, ..., k)$. Уравнение $Ux_2 = 0$ возможно только тогда, когда проекции x_2, соответствующие простым корням, равны нулю. В результате уравнение $Ux_2 = 0$ распадается на ряд уравнений $U_s x_{2s} = 0$, где x_{2s} — составляющая вектора x_2, соответствующая кратным корням группы s, U_s — матрица, составленная из столбцов матрицы U с номерами, соответствующими номерам проекций вектора x_2, входящих в вектор x_{2s}. Чтобы $x_{2s} \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank} U_s = \dim x_{2s} = m_s$. Сказанное свидетельствует о справедливости следствия 2.

Следствие 3. Если для уравнения (1.6) выполняются условия (3.4), матрицы M_{22}, R_{22}, K_{22} являются диагональными или хотя бы в одной из пар матриц $M_{22}^{-1}K_{22} > 0$ и $M_{22}^{-1}R_{22} \geq 0$, $K_{22}M_{22}^{-1} > 0$ и $R_{22}M_{22}^{-1} \geq 0$ обе матрицы диагональные, совокупность всех корней характеристического уравнения, соответствующего уравнению (3.8), содержит k групп кратных корней с кратностями m_s $(s = 1, 2, ..., k)$ и имеет место одно из трех сочетаний условий

$$M_{12} = R_{12} = 0, \quad \operatorname{rank} K_{12}^s = m_s; \quad M_{12} = K_{12} = 0$$

$$\operatorname{rank} R_{12}^s = m_s; \quad R_{12} = K_{12} = 0, \quad \operatorname{rank} M_{12}^s = m_s$$

для всех s, где через K_{12}^s, R_{12}^s, M_{12}^s обозначены матрицы, составленные из тех столбцов соответственно матриц K_{12}, R_{12}, M_{12}, номера которых соответствуют номерам элементов вектора x_2, относящихся к группе кратных корней с номером

s, то тривиальное решение уравнения (1.6) является асимптотически устойчивым, а система (1.7), (1.8) робастна по отношению к присоединенной системе.

Здесь кратность корней может быть равна единице. Доказательство проводится аналогично доказательству следствия 2.

Пусть для системы (3.8) существует такое неособое преобразование $x_2 = Tz$, что матрицы $T^*M_{22}T = m_{22}$, $T^*R_{22}T = r_{22}$, $T^*K_{22}T = k_{22}$ являются действительными диагональными. (Здесь звездочка означает или обращение, или транспонирование матрицы.) Тогда система (3.7), (3.8) принимает вид

$$m_{12}z^{\cdot\cdot} + r_{12}z^{\cdot} + k_{12}z = 0, \quad m_{12} = M_{12}T, \quad r_{12} = R_{12}T \tag{3.14}$$

$$m_{22}z^{\cdot\cdot} + r_{22}z^{\cdot} + k_{22}z = 0, \quad k_{12} = K_{12}T$$

Для системы (3.14) можно применить следствия 2 и 3.

В случае $2n = N$ уравнения (3.7) и (3.8) можно поменять ролями и получить еще ряд условий, гарантирующих асимптотическую устойчивость тривиального решения уравнения (1.6).

Как следует из результатов публикуемой работы, синтез и анализ робастных систем управления по матричным уравнениям второго порядка гораздо проще, чем по уравнениям движения в форме Коши [3, 4].

Рассмотрим пример из [11], где исследуются методы обеспечения асимптотической устойчивости гравитационного спутника с магнитной системой демпфирования на экваториальной орбите. При этом, как следует из уравнения (10) из [11], матрица демпфирования и гироскопических сил будет постоянно положительной. Переход от обозначений в [11] к обозначениям данной статьи осуществляется по зависимостям

$$x_1 = \left\| \begin{matrix} \varphi \\ \psi \end{matrix} \right\|, \quad x_2 = \vartheta, \quad M = \left\| \begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|c} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_z \end{array} \right\|$$

$$R = \left\| \begin{array}{c|c} R_{11} & R_{12} \\ \hline R_{21} & R_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|c} k & [(I_x + I_z - I_y)\nu - K_y] & K_z \\ -[(I_x + I_z - I_y)\nu - K_y] & k & -K_x \\ \hline -K_z & K_x & 0 \end{array} \right\|$$

$$K = \left\| \begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|c} [4(I_y - I_z)\nu + K_y]\nu & 0 & 0 \\ 0 & [(I_y - I_x)\nu + K_y]\nu & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3\nu^2(I_x - I_z) \end{array} \right\|$$

Нетрудно убедиться, что применение следствия 1 теоремы 7 (третье условие в (3.9)) сразу дает следующие условия асимптотической устойчивости системы: $I_x > I_z$, $4(I_y - I_z)\nu + K_y > 0$, $(I_y - I_x)\nu + K_y > 0$, $k > 0$, $K_z \neq 0$ и (или) $K_x \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hyland D. C. and Collins E. G.* An M-Matrix and Majorant Approach to Robust Stability and Performance Analysis for Systems with Structured Uncertainty//IE EE Trans. Automatic Control. 1989. V. 34. N. 7. P. 699—710.
2. *Joshi S. M.* Robustness Properties of Collocated Conrtollers for Flexible Spacecraft//J. Guidance, Control and Dynamics. 1986. V. 9. N. 1. P. 85—91.
3. *Yeung Yam, Jonson T. L., Lang J. H.* Flexible System Model Reduction and Control System Design

Based Upon Actuator and Sensor Influence Functions//IE EE Trans. Automatic Control. 1987. V. 32. N. 7. P. 573—582.

4. *Mori T.* Estimales for measure of stability robustness via Lyapunov matrix equation//Internal. J. of Control. 1989. V. 50. N. 1. P. 435—438.
5. *Хашемипур X. P., Лауб А. Дж.* Фильтр Калмана для моделей второго порядка//Аэрокосмическая техника. 1989. N 1 . С. 127—133.
6. *Белман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
7. *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983. 336 с.
8. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989, 655 с.
9. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
11. *Потапенко Е. М.* О работоспособности магнитных систем демпфирования на экваториальных орбитах//Космич. исследования. 1972. Т. X. Вып. 4. С. 623—625.

Запорожье

Поступила в редакцию
23.II.1990