

УДК 532.546

© 1993 г. О. П. АЛЕКСЕЕНКО, А. М. ВАЙСМАН

НАГНЕТАНИЕ ПСЕВДОПЛАСТИКА
 В КРУГОВУЮ ТРЕЩИНУ ГИДРОРАЗРЫВА

Изучается развитие в упругом пространстве круговой трещины при заполнении под давлением ее полости жидкостью разрыва со степенным законом сопротивления. Предложен алгоритм решения безразмерной задачи, не требующий конкретизации режимов нагнетания. Рассмотрены два примера: трещина в невесомой среде и трещина с плавным смыканием.

1. Распространение трещины в невесомой среде. Пусть в невесомой среде, характеризуемой модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν , имеется плоская круговая трещина с текущим радиусом L . Из точечного источника, расположенного в центре, в нее нагнетается с расходом Q_0 несжимаемая и нефилтрующая жидкость со степенным реологическим законом, который в случае осесимметричного растекания в узкой щели имеет вид $\tau = \mu(\dot{\gamma})^\alpha$, где $\dot{\gamma}$ — скорость радиального сдвига, τ — касательные напряжения в плоскости (X, Z) , X, Z — радиальная и вертикальная координаты цилиндрической системы координат. μ и α — константы [1].

Система уравнений, описывающая рост такой трещины, уже формулировалась для различных реологических моделей текучего материала и достаточно хорошо известна (см., например, [2—4]). Связь раскрытия $2W(X)$ трещины с профилем давления $P(X)$ на ее берегах дается формулой Снеддона [5], однако в задачах гидроразрыва более удобным оказывается некоторое ее видоизменение¹

$$W(X) = -\frac{2}{\pi D} \int_0^\Gamma P'(X_1) \left\{ (L^2 - X^2)^{1/2} - \int_{\max(X, X_1)}^L dX_2 \left(\frac{X_2^2 - X_1^2}{X_2^2 - X^2} \right)^{1/2} \right\} dX_1 \quad (1.1)$$

$$D = 1/2 E (1 - \nu^2)^{-1}$$

где Γ — радиус зоны заполнения трещины, $P'(X)$ — радиальный градиент давления.

На кромке растущей трещины выполнено условие [6]:

$$\lim_{X \rightarrow L} W(X)(L - X)^{-1/2} = (2/\pi)^{1/2} K/D \quad (1.2)$$

где K — критическое значение коэффициента интенсивности напряжений, которое считается постоянным.

Течение псевдопластической жидкости в узкой трещине описывается в безынерционном приближении уравнением [7]:

$$P' = -\frac{\mu}{W} \left(\frac{(1 + 2\alpha)Q}{4\pi\alpha X W^2} \right)^\alpha \quad (1.3)$$

Здесь $Q(X)$ — объемный расход через цилиндрическое сечение радиусом X ,

¹ Алексеевко О. П. Точные решения некоторых задач механики управляемого разрыва горных пород идеально пластическим флюидом: Дис. канд. физ.-мат. наук. Новосибирск. 1989. 133 с.

который связан с производительностью источника Q_0 и объемом Ω (X) центральной части полости трещины соотношением

$$Q = Q_0 - \Omega', \quad \Omega(X) = 4\pi \int_0^X X_1 W(X_1) dX_1 \quad (1.4)$$

При $X = \Gamma$ объем $\Omega(\Gamma)$ равен объему Ω_γ жидкости в трещине. В предположении квазиравновесия мгновенных состояний трещины и малости скорости изменения Q_0 первую формулу (1.4) можно преобразовать к виду [8]:

$$Q = Q_0 q, \quad q = 1 - \partial\Omega/\partial\Omega_\gamma \quad (1.5)$$

Для удобства анализа сформулированной системы уравнений перейдем к безразмерным переменным. Величины X , Γ будем измерять в угловых единицах по формулам $X = L \sin \varphi$, $\Gamma = L \sin \gamma$. Для основных параметров трещины введем масштабные множители, зависящие от текущего радиуса, обозначив их теми же буквами со звездочкой

$$W_* = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\beta + 2}{4} Q_0 L^{2\beta-1} \left(\frac{2\mu}{D} \right)^\beta \right]^\alpha, \quad (\alpha\beta = 1, \frac{1}{\alpha} = 2(1 + \beta)) \quad (1.6)$$

$$P_* = \frac{\mu L}{W_*} \left[\frac{\beta + 2}{4\pi} \frac{Q_0}{LW_*^2} \right]^\alpha, \quad \Omega_* = 4\pi L^2 W_*$$

Для радиуса L определим масштаб, не меняющийся с ростом трещины

$$L_* = [1/4 (\beta + 2) Q_0 (2\mu)^\beta D^{\beta+2} K^{-2(\beta+1)}]^{1/\alpha}, \quad L = L_* l \quad (\beta \neq 2, l^{-1} = 2 - \beta) \quad (1.7)$$

и запишем формулы обезразмеривания

$$P = P_* p, \quad W = W_* w \cos \varphi, \quad \Omega = \Omega_* \omega, \quad \Omega_\gamma = \Omega_* \omega_\gamma \quad (1.8)$$

Строчными буквами здесь обозначены соответствующие безразмерные величины.

После некоторых преобразований система уравнений (1.1)–(1.4) в новых переменных будет иметь вид

$$v(\varphi) = \int_0^\gamma A(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi, \quad f(\psi) = \frac{1}{v(\psi)} \left[\frac{q(\psi)}{v^2(\psi) \sin \psi \cos^2 \psi} \right]^\alpha \quad (1.9)$$

$$A(\varphi, \psi) = 1 - \cos^{-1} \varphi \int_{\max(\varphi, \psi)}^{\pi/2} \cos \eta \left[\frac{\sin^2 \eta - \sin^2 \psi}{\sin^2 \eta - \sin^2 \varphi} \right]^{1/2} d\eta \quad \left(\varphi \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.10)$$

$$p(\varphi) = \int_\varphi^\gamma f(\psi) d\psi, \quad \varphi \leq \gamma \quad (1.11)$$

$$l = v_*^{-1}, \quad v_* \equiv v \left(\frac{\pi}{2} \right) = \int_0^\gamma (1 - \cos \psi) f(\psi) d\psi \quad (1.12)$$

$$\delta = 2(1 + \beta)/(2 - \beta), \quad \beta \neq 2$$

$$\omega = \int_0^\varphi v \theta d\psi, \quad \omega_\gamma = \int_0^\gamma v \theta d\psi, \quad \theta(\psi) = \sin \psi \cos^2 \psi \quad (1.13)$$

Нетрудно видеть, что решение задачи фактически сводится к отысканию решения уравнения (1.9) на интервале $\varphi \leq \gamma$. Чтобы из (1.9) получить уравнение относительно v , необходимо выразить q через v . Используя формулу (1.12) и пронося Q_0 за знак дифференциала (последнее возможно в силу плавности режима закачки), приводим после некоторых преобразований соотношение (1.5) к виду

$$q = 1 - \frac{\xi u_* \omega + v_* \omega_\gamma - v_* \delta \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\xi u_* \omega_\gamma + v_* \omega_{\gamma\gamma}} \quad (1.14)$$

$$\omega_{\gamma\gamma} = \int_0^\varphi u \theta d\psi + v(\gamma) \theta(\gamma), \quad \omega_\gamma = \int_0^\gamma u \theta d\psi$$

$$u = v_\gamma, \quad u_* = v_{*\gamma}, \quad \xi = \frac{3(2\beta + 1)}{2 - \beta}$$

Встречающийся в этих выражениях индекс γ после запятой означает дифференцирование по параметру γ . Предполагая слабую зависимость q от u и повторяя рассуждения, аналогичные изложенным в [9], несложно получить приближенное выражение для q :

$$q \simeq q_0 = 1 - \omega_\gamma^{-1} (\omega - 0,4v \sin^2 \varphi \cos \varphi) \quad (1.15)$$

которое не содержит производных по γ .

Можно показать, что в случае режима нагнетания вида $Q_0 = \kappa L^2 - \beta$ ($\kappa = \text{const}$) выражение (1.15) для q является точным. При этом параметр γ не меняется с ростом трещины, т. е. соответствующее решение автомодельно. Заметим также, что при $\beta = 2$ равенство $q = q_0$ имеет место для любого плавного режима закачки. В этом случае при обезразмеривании переменных не вводятся масштаб L_* и параметр l (см. формулу (1.7)), а вместо первого уравнения (1.12) используется выражение

$$v_* = K (4\mu^2 Q_0 D^4)^{-1/6} \quad (1.16)$$

которое является следствием (1.2).

Подстановка (1.15) в (1.9) дает одномерное нелинейное интегральное уравнение относительно v . Полагая $f = [q_0 / (\theta v^2)]^{\alpha} v^{-1}$ и ограничиваясь рассмотрением интервала $\varphi \leq \gamma$, запишем уравнение в виде

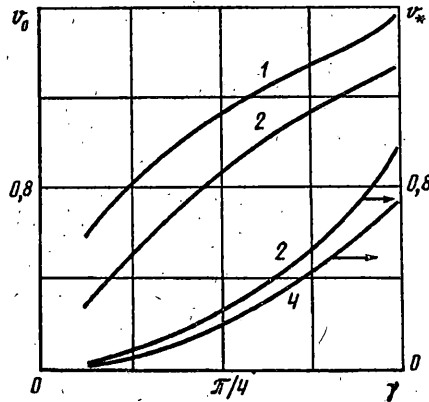
$$v = A_0^{\alpha}, \quad A_0 = v^{1+2\alpha}(\varphi) \int_0^\gamma A(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi, \quad \frac{1}{\xi} = 2(1 + \alpha) \quad (1.17)$$

Очевидно, что A_0 обладает свойством однородности нулевой степени при действии на v , т. е. $A_0(\alpha v) = A_0(v)$ при $\alpha = \text{const}$. Это позволяет успешно применять для решения (1.17) метод последовательных приближений [8]. После нахождения v на интервале $\varphi \leq \gamma$ остальные неизвестные: $v(\varphi)$ при $\gamma \leq \varphi \leq \pi/2$, $p(\varphi)$, l , u_* , ω , ω_γ определяются интегрированием по формулам (1.9)–(1.13).

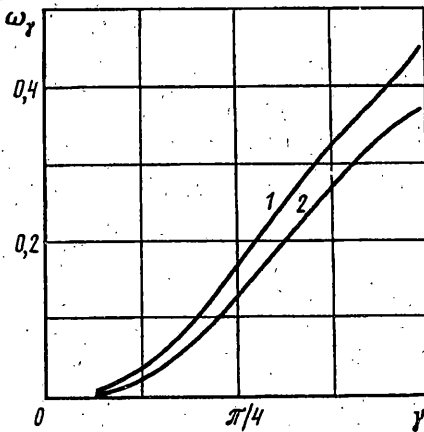
Способами, аналогичными изложенным в [9], данное приближение v нетрудно уточнить. Однако в большинстве случаев это нецелесообразно, поскольку можно показать, что максимальная погрешность при определении v , возникающая вследствие использования приближенной формулы (1.15) вместо (1.14), не превышает 3%.

На фиг. 1 представлены зависимости от степени заполнения γ значений функции v в центре трещины ($v = v_0$) и у ее края ($v = v_*$) для $\alpha = 0,5$ (кривые 1 и 2) и $\alpha = 0,1$ (кривые 3 и 4). Зависимость безразмерного объема ω_γ от γ показана на фиг. 2. Кривая 1 соответствует $\alpha = 0,5$, а кривая 2 — $\alpha = 0,1$. На фиг. 3 изображены профили давления для $\alpha = 0,5$ (кривые 1, 3, 5) и $\alpha = 0,1$ (кривые 2, 4, 6) при некоторых значениях γ : кривые 1 и 2 — при $\gamma = 1,5$; кривые 3 и 4 — при $\gamma = 1,1$; кривые 5 и 6 — при $\gamma = 0,8$.

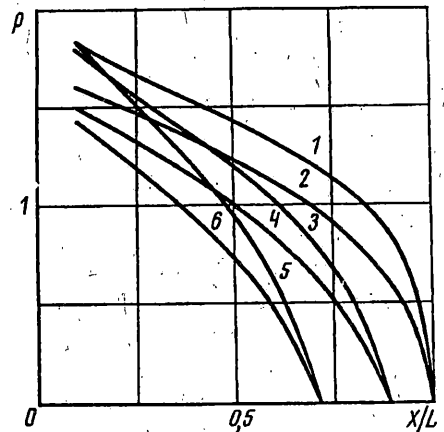
Решение задачи в безразмерных переменных зависит от единственного параметра состояния — степени заполнения γ . Для вычисления масштабных множителей W_* , P_* , Ω_* , L_* необходимо знать еще и Q_0 . Таким образом, состояние трещины в каждый момент определяется парой (γ, Q_0) . На практике вместо γ



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

естественнее задавать параметр режима нагнетания, например Ω_γ . Переход от пары (Q_0, Ω_γ) к (Q_0, γ) задается соотношением

$$\omega_\gamma(\gamma) v_*^\xi(\gamma) = \Omega_\gamma \Omega_l^{-1}, \quad \xi = \frac{3(1+2\beta)}{2-\beta} \quad (\beta \neq 2)$$

$$\Omega_l = 4\pi L_*^2 W_l, \quad W_l = 1/\sqrt{\pi} [1/4(2+\beta) Q_0 L_*^{2\beta-1} (2\mu/D)^\beta]^\beta$$

полученным на основании (1.12) и формул безразмеривания. При $\beta = 2$ параметр γ находится из (1.16), а затем с помощью последней формулы (1.8) определяется значение радиуса L , входящего в выражение (1.6) для масштабных множителей. После этого нетрудно рассчитать масштабные множители и размерные параметры трещины.

Представляет интерес установить, как нелинейность реологического закона влияет на характер гидроразрыва. Ограничимся для простоты анализом режима закачки с постоянным расходом Q_0 . Из приведенных выше результатов видно, что существеннее всего это влияние сказывается на изменении степени заполнения с ростом трещины: В частности, уже указывалось, что $\gamma = \text{const}$ при $\alpha = 0,5$. Соответствующие расчеты показывают, что при $\alpha > 0,5$ степень заполнения растет, а при $\alpha < 0,5$ — уменьшается со временем.

2. Трещина с плавным смыканием берегов. Рассмотрим заполнение уже

существующей трещины псевдопластической жидкостью. До тех пор пока линия смыкания берегов трещины не достигнет ее кромки, концентрация напряжений на радиусе смыкания L отсутствует, и уравнение (1.2) вырождается в однородное

$$\lim_{x \rightarrow L} (L - X)^{-1/2} W(X) = 0 \quad (2.1)$$

Условие (2.1) используется также при рассмотрении трещин больших размеров, когда силы сцепления на разрыве слабо сказываются на профиле трещины [6].

Считая, что трещина расположена горизонтально на большой глубине, будем, как обычно [5], моделировать горное давление P_g на этой глубине вертикальными сжимающими силами P_g , приложенными на бесконечности. Их действие учитывается добавлением к правой части (1.1) со знаком минус величины

$$W_g = 2 (\pi D)^{-1} (L^2 - X^2)^{1/2} P_g \quad (2.2)$$

Уравнения (1.3)–(1.5) применительно к данной задаче останутся прежними. Введем безразмерные переменные соотношениями (1.6), (1.8) с добавлением следующих формул:

$$P_g = P_* v_g, \quad W_g = W_* v_g \cos \varphi, \quad L = L_* l \quad (2.3)$$

$$L_* = \left(\frac{\pi}{4 P_*^2} \right)^\eta [1/4 (\beta + 2) Q_0 (2\mu)^\beta D^{\beta+2}]^{1/3}, \quad l = v_g^{2\eta}, \quad \eta = 1/3 (1 + \beta)$$

В новых переменных уравнение (1.1) с учетом (2.2) будет выглядеть следующим образом:

$$v(\varphi) = -v_g + \int_0^\gamma A(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi \quad (2.4)$$

Условие (2.1) принимает вид $v_* = 0$. Полагая $\varphi = \pi/2$ в (2.4), получаем отсюда уравнение

$$v_g = \int_0^\gamma (1 - \cos \psi) f(\psi) d\psi \quad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5) имеем

$$v(\varphi) = \int_0^\gamma G(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi, \quad G(\varphi, \psi) = A(\varphi, \psi) - (1 - \cos \psi) \quad (2.6)$$

На участке $\varphi < \gamma$ интегральное уравнение (2.6) запишем в виде, подобном (1.17):

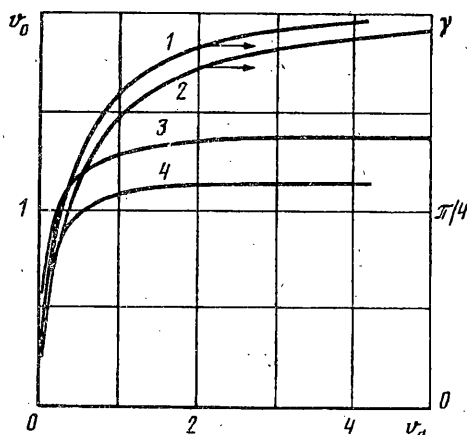
$$v = G_0^\zeta, \quad G_0 = v^{2\alpha+1}(\varphi) \int_0^\gamma G(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi, \quad \frac{1}{\zeta} = 2(1 + \alpha) \quad (2.7)$$

Аналогично тому, как это было сделано в п.1, выводятся точная и приближенная формулы для локального расхода ($u_g = v_{g,\gamma}$):

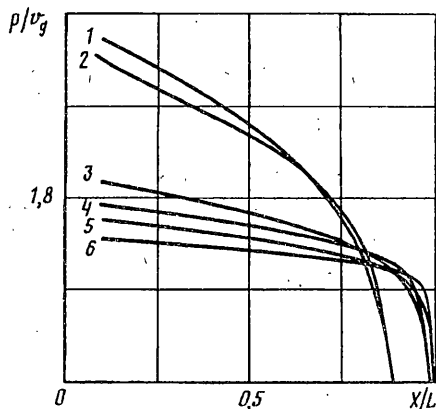
$$q = 1 - \frac{(2\beta + 1) u_g \omega + v_g \omega_{,\gamma} - 2/3 (1 + \beta) u_g v \sin^2 \varphi \cos \varphi}{(2\beta + 1) u_g \omega_* + v_g \omega_{*,\gamma}} \quad (2.8)$$

$$q \approx q_0 = 1 - \omega_*^{-1} (\omega - 1/3 v \sin^2 \varphi \cos \varphi) \quad (2.9)$$

Можно показать, что при режиме нагнетания $Q_0 = \kappa L^3$ ($\kappa = \text{const}$) формула (2.9) является точной, а решение задачи, соответствующее данному режиму, — автомодельным ($\gamma = \text{const}$). Размер L трещины при этом будет расти экспоненциально со временем. Поэтому условие квазистатичности может выполняться



Фиг. 4



Фиг. 5

лишь на начальном участке ее экспоненциального развития. Аналогичное авторемодельное решение для вязкой жидкости получено в [6].

После решения относительно v нелинейного интегрального уравнения, получающегося при подстановке (2.9) в (2.7), остальные безразмерные переменные находятся интегрированием по соответствующим формулам (2.4), (2.5), (1.11), (1.13). Можно показать, что относительная ошибка при определении v с использованием выражения (2.9) вместо (2.8) не превышает 8%.

На фиг. 4 представлены зависимости значений v_0 функции v в центре трещины и степени заполнения γ от параметра v_g для $\alpha = 0,1$ (кривые 1 и 4) и $\alpha = 0,5$ (кривые 2 и 3).

Из формул (1.8), (2.3) следует $P = P_g v_g^{-1} p$.

Профили безразмерного давления $p v_g^{-1}$ для $\alpha = 0,1$ (кривые 1, 3, 5) и $\alpha = 0,5$ (кривые 2, 4, 6) изображены на фиг. 5. Кривые 1 и 2 соответствуют $\gamma = 1,1$; кривые 3 и 4 — $\gamma = 1,4$; кривые 5 и 6 — $\gamma = 1,5$.

Как и в предыдущей задаче, безразмерное решение зависит от единственного параметра γ , а размерное — от пары параметров состояния, например (Ω_γ, Q_0) . Связь между (Ω_γ, Q_0) и γ задается соотношением

$$\omega(\gamma) v_g^* (\gamma) = \Omega_* / \Omega_g^*, \quad \varepsilon = 1 + 2\beta$$

$$\Omega_g^* = 4\pi L_g^2 W_g^*, \quad W_g^* = 1/\sqrt{\pi} [1/4 (\beta + 2) Q_0 L_g^{2\beta-1} (2\mu/D)^\beta]^\sigma$$

полученным с помощью формул (1.6), (1.8), (2.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Торок Дж. С., Адвани С. Х. Течение неньютоновской жидкости в пласте (приложение к гидроразрыву)//Энергетические машины и установки, 1988. № 1. С. 135—139.
2. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта//Изв. АН СССР. ОН. 1955. № 5. С. 3—41.
3. Зазовский А. Ф. Распространение круговой трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе//Изв. АН СССР. МТГ. 1979. № 2. С. 103—109.
4. Алексеенко О. П., Вайсман А. М. Флюидоразрыв пластины при нагнетании пластического материала//Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1988. № 5. С. 117—122.
5. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
6. Зазовский А. Ф., Одишария М.-Г., Песляк Ю. А. Автомодельные решения задачи о распространении

- трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 92—100.
7. Сейвинс Дж. Неньютоновские течения в пористой среде//Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1974. № 2. С. 59—115.
 8. Алексеенко О. П., Вайсман А. М. Прямолинейный гидроразрыв в упругой плоскости//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 145—149.
 9. Алексеенко О. П. Квазиравновесные состояния круговой трещины гидроразрыва//Изв. АН СССР. МТТ. 1993. № 2. С. 143—149.

Новосибирск

Поступила в редакцию
20.V.1991