МЕХАНИКА
ТВЁРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1993

УДК 539.375

© 1993 г. С. А. НАЗАРОВ, О. Р. ПОЛЯКОВА

# ДЕФОРМАЦИЯ И ОТРЫВ ТОНКОЙ ПРОКЛАДКИ ИЗ МАЛОСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

Выведено вариационное неравенство, позволяющее определить, как вследствие малого изменения нагрузки увеличивается поверхность отрыва прокладки. Прокладка расположена между двумя абсолютно жесткими полупространствами, она имеет малую относительную толщину и коэффициент Пуассона, близкий к 1/2. Построены главные члены асимптотики напряженно-деформированного состояния в зонах отрыва, скольжения и полного контакта, а также изучено явление пограничного слоя. При асимптотическом анализе указаны аналогии с известными теориями гидродинамической смазки и пленочных течений. Вариационное неравенство для формы приращения поверхности отрыва определяется на основе гипотезы Гриффитса, причем энергия рассчитывается по полученным асимптотическим представлениям решения.

**1. Постановка задачи.** Пусть тонкая прокладка из малосжимаемого однородного изотропного упругого материала занимает объем $Q^\varepsilon = \{x = (y, z) \in \in \mathbf{R}^3 : y = (y_1, y_2) \in \Omega, -\varepsilon h_- (y) < z < \varepsilon h_+ (y)\}$; $\varepsilon$ — малый положительный параметр, $\Omega$ — область на плоскости $\mathbf{R}^2$, ограниченная гладким замкнутым контуром $\Gamma$, $h_\pm$ — гладкие в $\overline{\Omega}$ функции, причем их сумма $h = h_+ + h_-$ (толщина прокладки) положительна на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Поверхность, ограничивающую тело $Q^\varepsilon$, представим как объединение боковой поверхности $S^\varepsilon = \{x : y \in \Gamma, \ -\varepsilon h_- (y) < z < \varepsilon h_+ (y)\}$ и оснований $\Sigma^\varepsilon_\pm = \{x : y \in \Omega, \ z = \pm\varepsilon h_\pm (y)\}$. Предположим, что вдоль $\Sigma^\varepsilon_-$ осуществляется полное сцепление с абсолютно жестким профилем, а вдоль $\Sigma^\varepsilon_+$ такое сцепление нарушается на множествах $\Upsilon^\varepsilon_u = \{x \in \Sigma^\varepsilon_+ : y \in \Omega_u\}$ и $\Upsilon^\varepsilon_\theta = \{x \in \Sigma^\varepsilon_+ : y \in \Omega_\theta\}$; при этом на $\Upsilon^\varepsilon_\theta$ контакт отсутствует, а на $\Upsilon^\varepsilon_u$ реализуется контакт без трения (т. е. кулоновский коэффициент трения пренебрежимо мал).

Характерный размер области $\Omega$ сведен к единичному, так что декартовы координаты $x$ и параметр $\varepsilon$ станут безразмерными. Будем считать, что кривизны оснований $\Sigma^\varepsilon_\pm$ сравнимы с $\varepsilon$ (ограничение на функции $h_\pm$). Кроме того, пусть области $\Omega_u$ и $\Omega_\theta$ имеют гладкие границы и расположены строго внутри $\Omega$, а характерные размеры множеств $\Omega_u$, $\Omega_\theta$ и $\Omega_0 = \Omega \backslash (\overline{\Omega}_u \cup \overline{\Omega}_\theta)$ много больше $\varepsilon$. Тот факт, что материал малосжимаем, выразим следующим соотношением для коэффициента Пуассона:

$$\nu = {}^1/_2 - \varepsilon^2 \nu_0 \tag{1.1}$$

Величина $\nu_0$ в (1.1) сравнима по порядку с единицей.

Запишем уравнения равновесия с использованием величины $\theta = (1 - 2\nu)^{-1} \nabla_x \cdot u$, пропорциональной объемному расширению материала

$$\nabla_x \cdot \nabla_x u (\varepsilon, x) + \nabla_x \theta (\varepsilon, x) = 0, \quad x \in Q^\varepsilon \tag{1.2}$$

$$\nabla_x \cdot u (\varepsilon, x) - 2\varepsilon^2 \nu_0 \theta (\varepsilon, x) = 0, \quad x \in Q^\varepsilon \tag{1.3}$$

Здесь $\nabla_x$ — градиент, $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещений, удовлетворяющий краевым условиям

$$u(\varepsilon, x) = \varphi^-(\varepsilon, x), \quad x \in \Sigma_-^\varepsilon; \quad u(\varepsilon, x) = \varphi^+(\varepsilon, x), \quad x \in \Sigma_+^\varepsilon \setminus \{\Upsilon_u^\varepsilon \cup \Upsilon_\theta^\varepsilon\} \tag{1.4}$$

В зоне отрыва $\Upsilon_\theta^\varepsilon$ и зоне скольжения $\Upsilon_u^\varepsilon$ задаются соответственно условия

$$\sigma^{(n)}(u, \theta; \varepsilon, x) = 0, \quad x \in \Upsilon_\theta^\varepsilon \tag{1.5}$$

$$\sigma^{(n)}(u, \theta; \varepsilon, x) \times n(\varepsilon, x) = 0, \quad u(\varepsilon, x) \cdot n(\varepsilon, x) = \varphi_n^+(\varepsilon, y), \quad x \in \Upsilon_u^\varepsilon \tag{1.6}$$

Здесь $\sigma$ — тензор напряжений с компонентами $\sigma_{jk}(u, \theta) = \mu\,[\partial_j u_k + \partial_k u_j + \delta_{j,k}(\theta - \nabla_x \cdot u)]$, $\mu$ — модуль сдвига, $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера, производные $\partial/\partial x_j$ обозначаются $\partial_j$, $\sigma^{(n)} = \sigma n$, $n$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial Q^\varepsilon$, точка и крест имеют смысл скалярного и векторного произведений. На боковой поверхности $S^\varepsilon$ поставим одно из краевых условий

$$u(\varepsilon, x) = \psi(\varepsilon, x), \quad x \in S^\varepsilon \tag{1.7}$$

$$\sigma^{(n)}(u, \theta; \varepsilon, x) = p(\varepsilon, x), \quad x \in S^\varepsilon \tag{1.8}$$

Ближайшей целью является описание асимптотики решения указанной задачи при $\varepsilon \to 0$. Выводу предельных уравнений для определения деформации тонких прослоек из малосжимаемых материалов посвящены статьи [1—4]. В [5] отмечена аналогия между задачей (1.2)—(1.7) и известной задачей Рейнольдса [6, 7] о течении жидкости в узком канале: при $\nu = {}^1/_2$ система (1.2), (1.3) формально переходит в (линейную) систему Стокса для вектора скоростей $u = (u_1, u_2, u_3)$ и давления $\mathrm{P} = -\theta$ в стационарном потоке жидкости, а правая часть уравнения (1.2) является слабым регулярным возмущением задачи. При этом соотношения (1.4) интерпретируются как условия прилипания жидкости к подвижным стенкам сосуда, а (1.6) — как условия на свободной (но известной) поверхности жидкости. Отметим, что гидродинамического аналога краевому условию (1.5) нет, однако, как упоминается далее в п. 2, в зоне отрыва решение задачи (1.2)—(1.7) пренебрежимо мало. Вся эта информация позволяет легко предсказывать результаты для задачи (1.2)—(1.7), исходя из теорий гидродинамической смазки или пленочных течений (см. [6—8], а также [5, 9], где содержится математическое обоснование уравнения Рейнольдса). Поэтому вывод предельных уравнений представлен в п. 2 конспективно. Более подробно в п. 3 исследуется явление пограничного слоя, возникающего вблизи боковой поверхности $S^\varepsilon$ прослойки $Q^\varepsilon$, а также вблизи линий раздела зоны полного контакта $\Gamma_0^\varepsilon = \Sigma_\varepsilon^+ \setminus (\overline{\Gamma}_u^\varepsilon \cup \overline{\Gamma}_\theta^\varepsilon)$ и зоны скольжения $\Upsilon_u^\varepsilon$ или отрыва $\Upsilon_\theta^\varepsilon$. При построении асимптотики применяется метод А. Л. Гольденвейзера [10] в интерпретации [11], см. еще [5].

В п. 4 исследуется задача о квазистатическом подрастании зоны отрыва. На основе гипотезы Гриффитса о минимуме общей энергии системы выводится вариационное неравенство для определения формы приращения свободной поверхности. Такое неравенство и устанавливает критерий разрушения: разрушение не происходит, если имеется лишь нулевое решение, а квазистатический рост зоны отрыва осуществляется при тех нагрузках, когда у вариационного неравенства есть нетривиальное решение. Множественность решений следует интерпретировать как неустойчивость процесса разрушения, а их отсутствие — как лавинообразность процесса. Отметим, что обсуждаемое неравенство содержит тот же интегральный оператор, что и полученное в [12, 13] вариационное неравенство для формы изменения ребра трещины нормального отрыва; поэтому его исследование сведено к краткому перечню математических результатов [12].

**2. Внутренние разложения решения.** Сначала уточним зависимость от $\varepsilon$ правых частей краевых условий (1.4) и (1.6):

$$\varphi_n^\pm(\varepsilon, y) \equiv \varphi^\pm(\varepsilon, y) \cdot n^\pm(\varepsilon, y) = \varepsilon a^\pm(\varepsilon, y), \quad \varphi^{\pm\prime}(\varepsilon, y) = b^\pm(\varepsilon, y) \tag{2.1}$$

$$n(\varepsilon, x) \equiv n^{\pm}(\varepsilon, y) = [1 + \varepsilon^2 |\nabla_y h_{\pm}(y)|^2]^{-1/2}(-\varepsilon\nabla_y h_{\pm}(y), \pm 1), \quad x \in \Sigma_{\pm}^{\varepsilon}$$

Здесь $b^{\pm} = (b_1^{\pm}, b_2^{\pm})$, $a^{\pm}$ и $b_i^{\pm}$ — гладкие функции переменных $\varepsilon \in [0, 1]$ и $y \in \overline{\Omega}$; кроме того, если $w = (w_1, w_2, w_3)$, то через $w'$ обозначается двумерный вектор $(w_1, w_2)$.

Введем «быструю» переменную $\zeta = \varepsilon^{-1}z$. Асимптотические ряды для решения имеют вид

$$u(\varepsilon, x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k-1} U^k(y, \zeta), \quad \theta(\varepsilon, x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k-2} \Theta^k(y, \zeta) \tag{2.2}$$

Переходя в (1.2), (1.3) к координатам $(y, \zeta)$, заменяя $u$, $\theta$ асимптотическими рядами (2.2) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$, получаем рекуррентную последовательность обыкновенных дифференциальных (по $\zeta$) уравнений с параметром $y \in \Omega$:

$$\partial_\zeta^2 U^{k\prime}(y, \zeta) = -\nabla_y \Theta^{k-1}(y, \zeta) - \nabla_y \cdot \nabla_y U^{(k-2)\prime}(y, \zeta) \tag{2.3}$$

$$\partial_\zeta^2 U_3^k(y, \zeta) + \partial_\zeta \Theta^k(y, \zeta) = -\nabla_y \cdot \nabla_y U_3^{k-2}(y, \zeta)$$

$$\partial_\zeta U_3^k(y, \zeta) = 2\nu_0 \Theta^{k-2}(y, \zeta) - \nabla_y \cdot U^{k-1\prime}(y, \zeta), \quad \zeta \in (-h_-(y), h_+(y))$$

В (2.3) $\partial_\zeta = \partial/\partial\zeta$, $k = 0, 1, \ldots$ и величины с отрицательными индексами равны нулю. Вид краевых условий для системы зависит от того, в какую зону попадает точка $y$.

*Зона полного контакта.* Пусть $y \in \Omega_0 = \Omega \backslash (\overline{\Omega}_u \cup \overline{\Omega}_\theta)$. Согласно (1.4), при $\zeta = \pm h_{\pm}(y)$ имеем

$$U^0 = 0, \quad U^1 = (b^{\pm 0}, 0), \quad U^2 = (b^{\pm 1}, \pm a^{\pm 0} \pm b^{\pm 0} \cdot \nabla_y h_{\pm}) \tag{2.4}$$

Здесь $b^{\pm 0} = b^{\pm}(0, y)$ и $a^{\pm 0}(y) = a^{\pm}(0, y)$. Если $k = 0$, то из (2.3), (2.4) вытекает, что $U^0 = 0$ и $\Theta^0(y, \zeta) = \Theta^0(y)$. Решая задачу (2.3), (2.4) для $k = 1$, находим

$$U^{1\prime}(y, \zeta) = -1/2(\zeta + h_-(y))(\zeta - h_+(y))\nabla_y \Theta^0(y) - h(y)^{-1}(\zeta - h_+(y))\, b^{-0}(y) +$$

$$+ h(y)^{-1}(\zeta + h_-(y))\, b^{+0}(y), \quad U_3^1(y, \zeta) = 0, \quad \Theta^1(y, \zeta) = \Theta^1(y) \tag{2.5}$$

В случае $k = 2$ задача (2.3), (2.4) оказывается разрешимой лишь в том случае, если выполнено равенство

$$-1/12 \nabla_y \cdot h(y)^3 \nabla_y \Theta^0(y) + 2\nu_0 h(y) \Theta^0(y) = F^0(y), \quad y \in \Omega_0 \tag{2.6}$$

Правая часть $F^0$ задана формулой

$$F^0(y) = a^{+0}(y) + a^{-0}(y) + 1/2 \nabla_y \cdot \{h(y)(b^{-0}(y) + b^{+0}(y))\} \tag{2.7}$$

Соотношение (2.6) будем рассматривать как уравнение для определения функции $\Theta^0$, главного члена второго из рядов (2.2).

*Зона скольжения.* Если $y \in \Omega_u$, то из (1.4), (1.6) получаем

$$U^0(y, -h_-(y)) = 0, \quad U_3^0(y, h_+, y)) = 0, \quad \partial_\zeta U^{0\prime}(y, h_+(y)) = 0$$

Значит, как и в зоне полного контакта, $U^0 = 0$ и $\Theta^0(y, \zeta) = \Theta^0(y)$. Далее

$$U^1(y, -h_-(y)) = (b^{-0}(y), 0), \quad U_3^1(y, h_+(y)) = 0, \quad \partial_\zeta U^{1\prime}(y, h_+(y)) = 0 \tag{2.8}$$

Решение системы (2.3), где $k = 1$, с краевыми условиями (2.8) таково

$$U^{1\prime}(y, \zeta) = -1/2(\zeta + h_-(y))(\zeta - h_-(y) - 2h_+(y))\nabla_y \Theta^0(y) + b^{-0}(y) \tag{2.9}$$

$$U_3^1(y, \zeta) = 0, \quad \Theta^1(y, \zeta) = \Theta^1(y)$$

Смешанная краевая задача (условия типа (2.8)) для системы (2.3) разрешима не всегда — условием разрешимости служит равенство

$$\int_{-h_-(y)}^{h_+(y)} \Psi^k (y, \zeta)\, d\zeta - \Phi^{k+} (y) + \Phi^{k-} (y) = 0 \tag{2.10}$$

Здесь $\Psi^k$ — правая часть последнего из уравнений (2.3), а $\Phi_3^{k\pm}$ — правые части краевых условий $U_3^k(y, \pm h_\pm(y)) = \Phi_3^{k\pm}(y)$. (Сказанное в равной мере относится и к задаче Дирихле, возникшей в зоне полного контакта.) Поскольку для $k=2$ верны равенства

$$\Psi^2 = 2\nu_0\Theta^0 - \nabla_y\cdot U^{1\prime}, \quad \Phi_3^{2+} = a^{+0} + U^{1\prime}\cdot\nabla_y h_+, \quad \Phi_3^{-2} = -a^{-0} - b^{-0}\cdot\nabla_y h_-$$

то с учетом (2.9) соотношение (2.10) записывается как аналогичное (2.6) уравнение для определения функции $\Theta^0$ из (2.2):

$$-1/3\nabla_y\cdot h\,(y)^3\nabla_y\Theta^0\,(y)+2\nu_0 h\,(y)\;\Theta^0\,(y)=a^{+0}\,(y)+a^{-0}\,(y)+\nabla_y\cdot\{h\,(y)\;b^{-0}\,(y)\} \tag{2.11}$$

Подчеркнем, что здесь устранена ошибка, допущенная в формуле (67) из [5].

*Зона отрыва.* В силу (1.4) и (1.6) система уравнений (2.3) при $y\in\Omega_\theta$ снабжается такими краевыми условиями:

$$U^k\,(y, -h_-\,(y)) = \Phi^{k-}\,(y), \quad \partial_\zeta U^{k\prime}\,(y, h_+\,(y)) = \Phi^{k+\prime}(y) \tag{2.12}$$

$$2\partial_\zeta U_3^k\,(y, h_+\,(y)) + \Theta^k\,(y, h_+\,(y)) = \Phi_3^{k+}\,(y)$$

Полученная задача (2.3), (2.12) оказывается однозначно разрешимой. Тем самым вопрос об отыскании уравнения для функции $\Theta^0$ снимается и $U^0(y, \zeta) = 0$, $\Theta^0(y, \zeta) = 0$ при $y\in\Omega_\theta$. Кроме того, согласно (2.1), имеем $U^1(y, \zeta) = (b^{-0}(y), 0)$, $\Theta^1(y, \zeta) = 0$.

Еще раз обращаем внимание на то, что предельные уравнения (2.6), (2.11) отличаются соответственно от уравнения Рейнольдса и уравнения пленочного течения жидкости лишь слагаемым $-2\nu_0 h\Theta^0$, возникшим вследствие регулярного возмущения системы Стокса в соотношении (1.3).

**3. Пограничные слои.** Итерационные процессы, намеченные в п. 2, позволяют построить все коэффициенты рядов (2.2). При этом в зонах полного контакта и скольжения величины $\Theta^k(y, \zeta)$ находятся с точностью до слагаемых $\Theta_0^k(y)$, подчиненных соотношениям

$$\Theta^k\,(y, \zeta) = \Theta_0^k\,(y) + \Theta^{\vee k}\,(y, \zeta), \quad \int_{-h_-(y)}^{h_+(y)} \Theta^{\vee k}\,(y, \zeta)\,d\zeta = 0, \quad \Theta^{\vee 0} = \Theta^{\vee 1} = 0$$

Функции $\Theta_0^k$, зависящие лишь от переменных $y$, удовлетворяют уравнениям вида (2.6) и (2.11), которые представляют собой условия разрешимости задачи для $U^{k+2}$, $\Theta^{k+2}$. Однако ряды (2.2) не могут дать глобальную асимптотику решения задачи (1.1)—(1.7) или (1.8) ввиду двух обстоятельств: их коэффициенты претерпевают разрывы при $y\in\Gamma_u = \partial\Omega_u$ или $y\in\Gamma_\theta = \partial\Omega_\theta$; краевые условия (1.7) или (1.8) соблюдаются разве что случайно. Эти обстоятельства вынуждают построить пограничные слои в окрестности линий смены типа краевого условия или вблизи боковой поверхности $S^\varepsilon$. Требование экспоненциального убывания таких пограничных слоев (альтернативой служит процедура сращивания асимптотических разложений [14]) порождает краевые условия для функций $\Theta^k$ на контурах $\Gamma$, $\Gamma_\theta$ и условия сопряжения (трансмиссии) на контуре $\Gamma_u$.

Пусть $(\tau, s)$ — естественные локальные координаты в окрестности одного из названных контуров, $s$ — длина дуги, $\tau$ — расстояние вдоль нормали, взятое со знаком минус вне $\Omega_0$. Запишем исходную задачу с использованием координат $(\eta, s)$, где $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ и

$$\eta_1 = \varepsilon^{-1}\tau, \quad \eta_2 = \varepsilon^{-1} h(\tau, s)^{-1} \{h(0, s) z + \varepsilon (h_+(0, s) h_-(\tau, s) - h_-(0, s) h_+(\tau, s))\} \tag{3.1}$$

Видно, что $\eta_2 \in (-h_-(0, s), h_+(0, s))$. Из-за присутствия большого множителя $\varepsilon^{-1}$ нужно назначить бесконечный интервал изменения координате $\eta_1$. Так появляются задачи в полосе $\Pi(s) = \{\eta \in \mathbb{R}^2 : -h_-(0, s) < \eta_2 < h_+(0, s)\}$ (для контуров $\Gamma_u$ и $\Gamma_\theta$) и в полуполосе $\Pi_+(s) = \{\eta \in \Pi(s) : \eta_1 > 0\}$ (для контура $\Gamma$), причем переменная $s$ оказывается лишь параметром. Поскольку $\eta_2 = \varepsilon^{-1} z + O(1)$ в силу (3.1), то из системы (1.2), (1.3) вытекают следующие уравнения для решения $v = (v', v_s)$, $\varkappa$ типа пограничного слоя

$$\nabla_\eta \cdot \nabla_\eta v'(\eta) + \nabla_\eta \varkappa(\eta) = Y'(\eta), \quad \nabla_\eta \cdot v'(\eta) = Y^0(\eta), \quad \eta \in \Pi(s) \tag{3.2}$$

$$\nabla_\eta \cdot \nabla_\eta v_s(\eta) = Y_s(\eta), \quad \eta \in \Pi(s) \tag{3.3}$$

Полученная система составлена из двумерной системы Стокса (3.2) и уравнения Пуассона (3.3). В соответствии с (1.4) краевые условия на нижнем основании полосы имеют вид

$$v'(\eta_1, -h_-(0, s)) = \Phi^{-\prime}(\eta_1), \quad v_s(\eta_1, -h_-(0, s)) = \Phi_s^-(\eta_1), \quad \eta_1 \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

Краевые условия на верхнем основании и на торце полуполосы, возникающие вследствие (1.4)—(1.8), укажем позднее; отметим только, что для правых частей равенств (1.7) и (1.8) предполагаются выполненными соотношения $\Psi(\varepsilon, x) = A(\varepsilon, \varepsilon^{-1}z, s)$, $p(\varepsilon, x) = \varepsilon^{-2} B(\varepsilon, \varepsilon^{-1}z, s)$, где $A$ и $B$ — гладкие вектор-функции своих аргументов.

Ближайшая цель — выписать условия исчезновения решения задачи на бесконечности. Это легко сделать на основе общих результатов [15—17] — искомые условия совпадают с условиями ортогональности (в смысле формулы Грина) правых частей задачи и всех решений однородной задачи, обладающих не более чем степенным ростом на бесконечности. Условимся называть функцию экспоненциально убывающей на бесконечности, если она и ее производные допускают оценку величиной $O(\exp(-\delta|\eta_1|))$ при $|\eta_1| \to \infty$ и некоторым $\delta > 0$.

*Контур* $\Gamma$, *условия* (1.7). Сузим уравнения (3.2)—(3.4) на $\Pi_+(s)$ и $\mathbb{R}_+$. Учитывая (1.4), (1.7), дополним их соотношениями

$$v'(\eta_1, h_+(0, s)) = \Phi^{+\prime}(\eta_1), \quad v_s(\eta_1, h_+(0, s)) = \Phi_s^+(\eta_1), \quad \eta_1 \in \mathbb{R}_+ \tag{3.5}$$

$$v'(0, \eta_2) = \Psi'(\eta_2), \quad v_s(0, \eta_2) = \Psi_s(\eta_2), \quad \eta_2 \in (-h_-(0, s), h_+(0, s)) \tag{3.6}$$

Соответствующая однородная задача имеет единственное (с точностью до произвольного множителя) полиномиальное решение $V^0 = 0, X^0 = 1$. Решение задачи (3.2)—(3.6) с экспоненциально малыми при $\eta_1 \to +\infty$ правыми частями экспоненциально исчезает на бесконечности лишь в том случае, если

$$\int Y^0(\eta)\, d\eta = \sum_{\pm} \pm \int_0^\infty \Phi_2^\pm(\eta_1)\, d\eta_1 - \int_{-h_-(0, s)}^{h_+(0, s)} \Psi_1(\eta_2)\, d\eta_2 \tag{3.7}$$

Главная часть невязки рядов (2.2) в краевом условии (1.7) равна $\Psi(\eta_2, s) = A(0, \eta_2, s) - U^1(0, \eta_2, s)$, где вектор $U^1$ определен в (2.9). Эта невязка компенсируется решением $\varepsilon^0 v^0(\eta, s)$, $\varepsilon^{-1}\varkappa^0(\eta, s)$ типа пограничного слоя, причем в соответствующей задаче (3.2)—(3.6) $Y = Y^0 = 0$ и $\Phi^\pm = 0$. Таким образом, в силу (2.5) формула (3.7) принимает вид

$$1/12h(y)^3\partial_\tau\Theta^0(y)=\tau(y)\cdot\Big(\int\limits_{-h_-(y)}^{h_+(y)}A'(0,\zeta,s)\,d\zeta-1/2h(y)[b^{-0}(y)+b^{+0}(y)]\Big),\ y\in\Gamma \tag{3.8}$$

где $\partial/\partial\tau=\partial_\tau$ и $\tau(y)$ — единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$.

*Контур* $\Gamma$, *условие* (*1.8*). Равенства (3.6) заменяются равенствами

$$\gamma_{j1}(v',\varkappa;0,\eta_2)=P_j(\eta_2),\ \gamma_{1s}(v_s;0,\eta_2)=P_s(\eta_2),\ \eta_2\in(-h_-(0,s),\ h_+(0,s)) \tag{3.9}$$

$$\gamma_{jk}(v',\varkappa)=\partial_j v_k+\partial_k v_j+\delta_{j,k}(\varkappa-\nabla_y\cdot v'),\ \gamma_{js}(v_s)=\partial_j v_s\quad (j,k=1,2)$$

В этом случае однородная задача также имеет лишь одно решение $V^1, X^1$ со степенным ростом на бесконечности, однако явную формулу указать не удается и названное решение определяется лишь своим поведением при $\eta_1\to+\infty$:

$$X^1(\eta,s)=\eta_1-C_1(s)+o(e^{-\delta\eta_1}),\ V_s'(\eta,s)=0,\ V_2'(\eta,s)=o(e^{-\delta\eta_1}) \tag{3.10}$$

$$V_1^1(\eta,s)=-1/2(\eta_2+h_-(0,s))(\eta_2-h_+(0,s))+o(e^{-\delta\eta_1}),\ \delta>0$$

Подчеркнем, что выделенные справа в (3.10) слагаемые асимптотики представляют собой известное течение Пуазейля; $C_1(s)$ — положительная постоянная. Аналогичные (3.7) необходимое и достаточное условия затухания решения задачи (3.2)—(3.5), (3.9) имеют вид

$$\sum_{j=1}^{2}\Big\{\sum_{\pm}\pm\int\limits_0^\infty\Phi_j^\pm(\eta_1)\gamma_{21}(V^1,X^1;\eta_1,\pm h(0,s))\,d\eta_1-\int\limits_{-h_-(0,s)}^{h_+(0,s)}P_j(\eta_2)V_j^1(0,\eta_2,s)\,d\eta_2\Big\}+$$

$$+\int\limits_{\Pi_+(s)}(Y'(\eta)\cdot V^1(\eta,s)-Y^0(\eta)X^1(\eta,s))\,d\eta=0 \tag{3.11}$$

Главная часть невязки рядов (2.2) в краевых условиях (1.8) равна $\varepsilon^{-2}(B(0,\varepsilon^{-1}z,s)+\mu\Theta^0(y)(\tau(y),0)$. Поэтому, применяя (3.11) с нулевыми $\Phi^\pm$, $Y'$ и $Y^0$, получаем теперь краевое условие

$$\Theta^0(y)=-12\mu^{-1}h(y)^{-3}\int\limits_{-h_-(y)}^{h_+(y)}(B_\tau(0,\zeta,s)V_1^1(0,\zeta,s)+B_z(0,\zeta,s)V_2^1(0,\zeta,s))d\zeta,\ y\in\Gamma \tag{3.12}$$

*Контур* $\Gamma_\theta$. К уравнениям (3.2)—(3.5) присовокупим краевые условия, согласующиеся с формулами (1.5) в зоне отрыва

$$\gamma_{j2}(v';\varkappa;\eta_1,h_+(0,s))=P_j^+(\eta_1),\ \gamma_{2s}(v_s;\eta_1,h_+(0,s))=P_s^+(\eta_1)$$

$$(j=1,2),\quad \eta_1\in(-\infty,0) \tag{3.13}$$

И теперь есть единственное (с точностью до множителя) решение $V^2, X^2$ однородной задачи, поведение которого описывается соотношениями

$$X^2(\eta,s)=\eta_1-C_2(s)+o(e^{-\delta\eta_1}),\ V^2(\eta,s)=V^1(\eta,s)+o(e^{-\delta\eta_1}),\ \eta_1\to+\infty$$

$$X^2(\eta,s)=o(e^{\delta\eta_1}),\ V^2(\eta,s)=o(e^{\delta\eta_1}),\ \eta_1\to-\infty,\ \delta>0 \tag{3.14}$$

Понятные изменения в (3.11) доставляют условие существования исчезающего при $\eta_1\to\pm\infty$ решения задачи (3.2)—(3.5), (3.13); такое условие влечет равенство

$$\Theta^0(y)=0,\ y\in\Gamma_\theta \tag{3.15}$$

Впрочем, соотношение (3.15) получается проще, если, применяя метод сращиваемых разложений [14], вспомнить, что $\Theta^0=0$ в зоне отрыва $\Upsilon_\theta^\varepsilon$ (или при $y\in\Omega_\theta$).

*Контур* $\Gamma_u$. Согласно (1.6), в зоне скольжения условия (3.13) замещаются такими краевыми условиями:

$$\gamma_{21}(v', \varkappa; \eta_1, h_+(0, s)) = P_1^+(\eta_1), \quad v_2(\eta_1, h_+(0, s)) = \Phi_2^+(\eta_1) \tag{3.16}$$

$$\gamma_{23}(v_s; \eta_1, h_+(0, s)) = P_s^+(\eta_1), \quad \eta_1 \in (-\infty, 0)$$

Теперь возникла ситуация, когда соответствующая однородная задача имеет два линейно независимых решения со степенным ростом на обеих бесконечностях. Во-первых, это — решение $V^0 = 0, X^0 = 1$ и, во-вторых, решение $V^3, X^3$, характеризующееся формулами

$$X^3(\eta, s) = \eta_1 - C_3(s) + o(e^{-\delta\eta_1}), \; V^3(\eta, s) = V^1(\eta, s) + o(e^{-\delta\eta_1}), \; \eta_1 \to +\infty \tag{3.17}$$

$$X^3(\eta, s) = 4\eta_1 + o(e^{\delta\eta_1}), \quad V_2^3(\eta, s) = o(e^{\delta\eta_1}), \quad V_s^3(\eta, s) = 0 \tag{3.18}$$

$$V_1^3(\eta, s) = -2(\eta_2 + h_-(0, s))(\eta_2 - h_-(0, s) - 2h_+(0, s)) + o(e^{\delta\eta_1}), \quad \eta_1 \to -\infty$$

(Разница коэффициентов 1 и 4 из асимптотик (3.17) и (3.18) объясняется в гидродинамической интерпретации постоянством потока жидкости через сечение канала П.) Вопрос о перечислении условий убывания решения $v, \varkappa$ задачи (3.2)—(3.5), (3.16) сводится, как и ранее, к подстановке в формулу Грина функций $v, \varkappa$ и $V^i, X^i$ $(i = 0{,}3)$ и к последующему применению уравнений, которым удовлетворяют названные функции. Для определения условий сопряжения на контуре $\Gamma_u$ удобно использовать метод сращиваемых асимптотических разложений.

В малой окрестности дуги $\Gamma_u$ переразложим ряды (2.2) с использованием координат $\eta_1 = \varepsilon^{-1}\tau, \eta_2 = \varepsilon^{-1}z = \zeta$ и $s$. Согласно (2.5) и (2.9), имеем

$$u(\varepsilon, x) = \varepsilon^0 Y_\alpha(\eta_2, s) + \ldots \tag{3.19}$$

$$\theta(\varepsilon, x) = \varepsilon^{-2}\Theta_\alpha^0(s) + \varepsilon^{-1}[\Theta_\alpha^1(s) + \eta_1(\partial_\tau\Theta_\alpha^0)(s)] + \ldots$$

Здесь многоточием обозначены младшие слагаемые, индекс $\alpha$ равен 0 или $u$ (зона полного контакта или зона скольжения), пределы величины $Z(\tau, s)$ при $\tau \to +0$ или $\tau \to -0$ суть $Z_0(s)$ и $Z_u(s)$:

$$Y_0'(\zeta, s) = -1/2(\zeta + h_-(s))(\zeta - h_+(s))\nabla_y\Theta_0^0(s) - h(s)^{-1}(\zeta - h_+(s))b^{-0}(s) +$$

$$+ h(s)^{-1}(\zeta + h_-(s))b^{+0}(s), \; Y_{03} = 0, \; h_\pm(s) = h_\pm(0, s), \; b^{\pm 0}(s) = b^{\pm 0}(0, s) \tag{3.20}$$

$$Y_u'(\zeta, s) = -1/2(\zeta + h_-(s))(\zeta - h_-(s) - 2h_+(s))\nabla_y\Theta_u^0(s) + b^{-0}(s), \quad Y_{u3} = 0$$

Внутреннее разложение ищем в виде

$$u(\varepsilon, x) = \varepsilon^{-1}v^0(\eta, s) + \varepsilon^0 v^1(\eta, s) + \ldots, \; \theta(\varepsilon, x) = \varepsilon^{-2}\varkappa^0(\eta, s) + \varepsilon^{-1}\varkappa^1(\eta, s) + \ldots \tag{3.21}$$

Метод сращиваемых разложений требует, чтобы формулы (3.19) представляли собой асимптотику при $\eta_1 \to \pm\infty$ функций из (3.21). Отсюда сразу же следуют выражения $v^0 = 0, \varkappa^0(s) = \Theta_0^0(s)$ для главных членов внутреннего разложения и первое из условий согласования

$$\Theta_u^0(s) - \Theta_0^0(s) = 0, \; y \in \Gamma_u \tag{3.22}$$

Для того чтобы найти второе условие сопряжения, рассмотрим задачу для определения $v^1$ и $\varkappa^1$. Это — задача (3.2)—(3.5), (3.16) с дополнительными асимптотическими условиями

$$\varkappa^1(\eta) = \Theta_0^1 + \eta_1\partial_\tau\Theta_0^0 + o(e^{-\delta\eta_1}), \quad v^1(\eta) = Y_0(\eta_2) + o(e^{-\delta\eta_1}), \quad \eta_1 \to +\infty \tag{3.23}$$

$$\varkappa^1(\eta) = \Theta_u^1 + \eta_1\partial_\tau\Theta_u^0 + o(e^{\delta\eta_1}), \quad v^1(\eta) = Y_u(\eta_2) + o(e^{+\delta\eta_1}), \quad \eta_1 \to -\infty$$

В (3.23) опущен аргумент $s$. Укажем лишь те правые части уравнений (3.2)—(3.5), (3.16), которые участвуют в дальнейших вычислениях:

$$Y' = 0, \quad Y^0 = 0, \quad \Phi_1^{\pm} = b^{\pm 0}(s)\cdot\tau(s), \quad \Phi_2^{\pm} = 0, \quad P_1^{+} = 0 \tag{3.24}$$

Подставляя величины $v^1, \varkappa^1$ и $V^0, X^0$ в формулу Грина для прямоугольника $\{\eta \in \Pi(s) : |\eta_1| < R\}$ и переходя к пределу при $R \to \infty$ с учетом (3.23), (3.24) и (3.20) (иными словами, приравнивая «потоки» на обеих бесконечностях), выводим соотношение

$$1/3 h(s)^3 (\partial_\tau \Theta_u^0(s) - 1/4 \partial_\tau \Theta_0^0(s)) = 1/2 h(s)(b^{+0}(s) - b^{-0}(s))\cdot\tau(s), \quad y \in \Gamma_u \tag{3.25}$$

Оно замыкает совокупность уравнений (2.6), (2.11) и граничных условий (3.22), (3.15), (3.8) (или (3.12)).

Если в последних рассуждениях заменить $V^0, X^0$ на $V^3, X^3$, то определится величина скачка $\Theta_u^1 - \Theta_0^1$ на контуре $\Gamma_u$, причем в правую часть условий согласования вида (3.22) для $\Theta^1$ войдет произведение $C_3(s)\partial_\tau\Theta_u^0(s)$. Такое эффект (влияние постоянных $C_j(s)$ из представлений (3.10), (3.14), (3.17) на второй член $\Theta^1$ асимптотики (2.2)) свойствен всем краевым условиям, кроме (3.8) (ср. с [18]). Величины $C_j(s)$ следует интерпретировать как интегральные характеристики (типа емкости, поляризации и пр.; см., например, [19, 20]) модельных задач о пограничном слое.

Если вместо соотношения (1.1) для коэффициента Пуассона принять формулу $\nu = 1/2 - \varepsilon^\delta \nu_0$, где $\delta$ — некое положительное число, характеризующее «степень малосжимаемости материала», то на первый взгляд итерационные процессы построения асимптотики должны видоизмениться, поскольку в уравнениях (2.6) и (2.11) будет присутствовать малый или большой параметр $\varepsilon^{\delta-2}$. Однако и такую задачу можно считать предельной, рассматривая отдельно вопрос об определении асимптотики самого решения $\Theta^0(\varepsilon, y)$. Если $\delta < 2$, то нужно использовать метод Вишика — Люстерника [21] и найти буферный (одномерный) пограничный слой. В случае $\delta > 2$ применяется классическая теория возмущений (см., например, [22, гл. 9]); незначительные осложнения возникают при $\Gamma = \varnothing$ (отсутствуют условия Дирихле (3.12)), когда асимптотика имеет вид $\Theta^0(\varepsilon, y) = \varepsilon^{2-\delta} C_T + T^0(y) + o(\varepsilon^{\delta-2})$, а постоянная $C_T$ вычисляется из условия разрешимости задачи для $T^0$.

Известен (см. [23]) изъян линейной постановки задачи об отслое: вблизи линии смены типа краевых условий особенности напряжений имеют осциллирующие множители. На это обстоятельство не обращалось внимания ввиду двух причин. Во-первых, для несжимаемого ($\nu = 1/2$) материала упомянутая осцилляция отсутствует, а для малосжимаемого ее период (в логарифмическом масштабе) велик. Во-вторых, поскольку коэффициент трения считается пренебрежимо малым, то названный эффект проявляется лишь в зоне, охватываемой пограничным слоем, а модификация на конечном участке краевых условий в модельной задаче не сказывается на виде асимптотических разложений на бесконечности (разве что меняются величины $C_j(s)$, которые, как уже обсуждалось, важны только для младших членов рядов (2.2)).

**4. Отслоение за счет отрыва.** Предположим, что разрушение соединения прокладки $Q^\varepsilon$ с абсолютно жесткими профилями происходит лишь за счет отрыва, т. е. $\Omega_\theta$ — внутренняя подобласть $\Omega$ с гладкой границей, а $\Omega_u$ — пустое множество. Пусть в результате квазистатического процесса зона отрыва $\Omega_\theta = \Omega_\theta(0)$ подросла до области $\Omega_\theta(\alpha)$, ограниченной контуром $\Gamma_\theta(\alpha) = \{x : \tau = \alpha H(s), s \in \Gamma_\theta\}$, где $H$ — гладкая функция на $\Gamma_\theta = \Gamma_\theta(0)$, $0 < \alpha$ — малый параметр. Сначала, пользуясь результатами п.2 и 3, вычислим асимптотику (по $\varepsilon$ и по $\alpha$) потенциальной энергии $\mathrm{U}$ деформации прокладки, а затем и главный член (по $\alpha$ при фиксированном $H$) приращения этой энергии. Примем гипотезу Гриффитса: зона отрыва увеличивается таким образом, чтобы общая потенциальная энергия системы $\mathrm{U} + \Pi$ была минимальной; здесь $\Pi$ — поверхностная энергия. Заменив величины U и П главными членами их асимптотик, получим вариационное неравенство для определения неизвестной функции $H$.

Пусть $\Theta(\alpha, y)$ — решение предельной задачи (2.6), (3.8), (3.15) в области $\Omega_0(\alpha) = \Omega \backslash \Omega_\theta(\alpha)$. Определим старшие члены асимптотики

$$\Theta(\alpha, y) = \Theta_0(y) + \alpha\Theta_1(y) + \alpha^2\Theta_2(y) + \ldots \tag{4.1}$$

Поскольку вновь образовавшаяся область $\Omega_0(\alpha)$ является малым регулярным возмущением области $\Omega_0(0) = \Omega_0$, то функции $\Theta_i$ находятся как решения невозмущенной ($\alpha = 0$) задачи; они удовлетворяют уравнениям

$$L(\partial_y)\Theta_k(y) = F_k(y),\ y \in \Omega_0;\ B(\partial_y)\Theta_k(y) = P_k(y),\ y \in \Gamma;\ \Theta_k(y) = g_k(y),\ y \in \Gamma_\theta \tag{4.2}$$

Здесь $L$ и $B$ — дифференциальные операторы слева в (2.6) и (3.8); $F_j = P_j = 0$ ($j = 1,2$); $F_0$ и $P_0$ — правые части (2.6) и (3.8); $g_0 = 0$, а функции $g_j$, записанные в координатах $(\tau, s)$, имеют вид

$$g_1(s) = -H(s)\,\partial_\tau\Theta_0(0, s),\ g_2(s) = -H(s)\,\partial_\tau\Theta_1(0, s) - \tfrac{1}{2}H(s)^2\partial_\tau^2\Theta_0(0, s) \tag{4.3}$$

Отметим, что соотношения (4.3) получаются, если в разложении суммы (4.1) в ряд Маклорена по переменной $\tau$ положить $\tau = \alpha H(s)$ и собрать коэффициенты при одинаковых степенях $\alpha$.

Предельной задаче (4.2) отвечает функционал энергии

$$J(\theta) = (L\theta, \theta)_{\Omega_0} - 2(F, \theta)_{\Omega_0} + (B\theta, \theta)_\Gamma = -(F, \theta)_{\Omega_0} + (P, \theta)_\Gamma \tag{4.4}$$

в котором через $(\ldots, \ldots)_{\Omega_0}$ и $(\ldots, \ldots)_\Gamma$ обозначены скалярные произведения в $L_2(\Omega_0)$ и $L_2(\Gamma)$. Используя результаты п. 2 и 3, покажем, что функционал (4.4) определяет главный член асимптотики потенциальной энергии деформации прокладки $U = -{}^1/{}_2A$, где $A$ — работа внешних сил. Согласно (2.2), работа, совершаемая на основаниях $\Sigma_\pm^\varepsilon$, находится по формуле

$$\sum_\pm \mu\varepsilon^{-1}\int_\Omega \{-\Theta^0(y)\,\nabla_y h_\pm(y)\cdot U^{1\prime}(y, \pm h_\pm(y)) \pm \partial_\zeta U^{1\prime}(y, \pm h_\pm(y))\cdot U^{1\prime}(y, \pm h_\pm(y)) \pm$$

$$\pm\Theta^0(y)\,U_3^2(y, \pm h_\pm(y))\}\,dy + O(1)$$

В зоне отрыва $\Theta^0 = \partial_\zeta U^{1\prime} = 0$, значит, интеграл по области $\Omega_\theta$ обращается в нуль, а интеграл по $\Omega_0$ преобразуется к виду

$$\mu\varepsilon^{-1}\int_{\Omega_0}\{\tfrac{1}{2}h\nabla_y\Theta^0\cdot(b^{+0} + b^{-0}) - \Theta^0(a^{+0} + a^{-0}) -$$

$$- h^{-1}(b^{+0} - b^{-0})\cdot(b^{+0} - b^{-0})\}\,dy + O(1) \tag{4.5}$$

Работа по боковой поверхности $S^\varepsilon$ вычисляется при учете пограничных слоев. В случае условий (1.7) старший член ее асимптотики равен

$$\mu\varepsilon^{-1}\int_\Gamma \Theta^0(y)\,\tau(y)\cdot\int_{-h_-(y)}^{h_+(y)} A'(0, \zeta, s)\,d\zeta\,ds \tag{4.6}$$

Сопоставляя выражения (4.4)—(4.6), приходим к требуемому «равенству энергии»

$$U(\varepsilon) = (2\varepsilon)^{-1}\mu\,(J(\theta) - \int_{\Omega_0} h^{-1}\,[(b^{+0} - b^{-0})\cdot(b^{+0} - b^{-0})]\,dy) + O(1) \tag{4.7}$$

Обратимся теперь к гипотезе Гриффитса и отметим, что вместо суммы U + П можно минимизировать приращение ΔU + ΔП. Заменим U главным членом асимптотики (4.7). Тогда

$$\Delta U = (2\varepsilon)^{-1}\mu\Delta J$$

$$\Delta J = (-L\Theta_0,\ \alpha\Theta_1 + \alpha\Theta_2)_{\Omega_0} + (B\Theta_0, \alpha\Theta_1 + \alpha^2\Theta_2)_\Gamma + O(\alpha^3) =$$

$$= -\alpha\,(B\Theta_0, \Theta_1)_{\Gamma_\theta} - \alpha^2\,(B\Theta_0, \Theta_2)_{\Gamma_\theta} + O(\alpha^3) \tag{4.8}$$

Кроме того

$$\Delta\Pi = \alpha\int_{\Gamma_\theta} 2\gamma H(s)\,ds + \alpha^2\int_{\Gamma_\theta}\gamma H(s)^2 k(s)\,ds + O(\alpha^3) \tag{4.9}$$

Здесь $k(s)$ — кривизна контура $\Gamma_\theta$ в точке $s$, $\gamma$ — плотность поверхностной энергии.

Отбросим остатки порядков $\alpha^3$ из представлений (4.8), (4.9) и рассмотрим задачу о минимуме полученного функционала. Восстановление нарушенных связей естественно считать невозможным — это означает неотрицательность функции $H$. Далее в качестве неизвестной величины удобно взять произведение $\mathrm{H}(s) = H(s)\partial_\tau\Theta_0(0, s)$. Если в $\Omega_\theta$ реализуется отрыв, то на границе $\Gamma_\theta$ необходимо выполняется неравенство $\partial_\tau\Theta_0(0, s) > 0$ (этот факт выводится, например, из принципа максимума для задачи (2.6), (3.15) с положительной правой частью (2.7) или из анализа пограничного слоя, возникающего вблизи контура $\Gamma_\theta$; см. (3.14)). Итак, задача о минимуме функционала ставится на множестве положительных функций Н. Такая задача формулируется [24] как вариационное неравенство

$$(-B\mathrm{H}, X - \mathrm{H})_{\Gamma_\theta} + (\beta\mathrm{H}, X - \mathrm{H})_{\Gamma_\theta} \geq (f, X - \mathrm{H})_{\Gamma_\theta}, \quad \forall X \in C^\infty(\Gamma_\theta),\ X \geq 0 \tag{4.10}$$

$$\beta(s) = -h(s)^3 r(s) + [\partial_\tau\Theta_0(0, s)]^{-2}\,[1/2 h(s)^3\partial_\tau^2\Theta_0(0, s) + 24\mu^{-1}\varepsilon\gamma k(s)]$$

$$f(s) = \alpha^{-1}(-1/2 h(s)^3\partial_\tau\Theta_0(0, s) - 24\mu^{-1}\varepsilon\gamma\,[\partial_\tau\Theta_0(0, s)]^{-1}) \tag{4.11}$$

В (4.10) В — симметрический неположительный псевдодифференциальный оператор с главным символом $(2\pi)^{-1/2}|\xi|$:

$$(BZ)(s) = \int_{\Gamma_\theta}(h(\sigma)^3 Z(\sigma) - h(s)^3 Z(s))\,K(s, \sigma)\,d\sigma \tag{4.12}$$

С помощью этого оператора выражается след на $\Gamma_\theta$ производной $\partial_\tau\Theta_1$, входящий в асимптотику (4.8) (см. (4.3)): $\partial_\tau\Theta_1(0, s) = h(s)^{-3}(B\Theta_1)(s) + \Theta_1(s)\,r(s)$.

Величины $K$ и $r$ из (4.12) и (4.11) определяются так:

$$K(s, \sigma) = 1/12 h(s)^3\partial_\tau G(x, \sigma)|_{\tau=0} = \pi^{-1}|s - \sigma|^{-2} + O(\ln|s - \sigma|^{-1})$$

$$r(s) = \mathrm{K}_0(s, s - 0) - \mathrm{K}_0(s, s + 0)$$

Здесь $G(x, \sigma)$ — обобщенная функция Грина задачи Дирихле для оператора $L$, особенность которой сосредоточена в точке контура $\Gamma$ с координатой $\sigma$; $s$ и $\tau$ — локальные координаты точки $x$, $\mathrm{K}(s, \sigma) = -\pi^{-1}(\sigma - s)^{-1} + \mathrm{K}_0(s, \sigma)$ — первообразная функции $\sigma \to K(s, \sigma)$.

Как уже упоминалось в конце п. 1, вариационное неравенство является (асимптотически) эквивалентной формулировкой критерия разрушения Гриффитса (см. также [13]). Решив корректно поставленную задачу (4.10), можно ответить на вопросы о возможности разрушения и о форме приращения свободной поверхности.

Приведем некоторую информацию о задаче (4.10), проверенную в [12]. Оператор В осуществляет непрерывное отображение: $W_2^{1/2}(\Gamma_\theta) \to W_2^{-1/2}(\Gamma_\theta) = W_2^{1/2}(\Gamma_\theta)^*$. Поэтому можно считать, что $X \in W_{2,+}^{1/2}(\Gamma_\theta) = \{H \in W_2^{1/2}(\Gamma_\theta) : H \geq 0\}$. Если функция $\beta$ из (4.11) положительна, то существует единственное решение $\mathrm{H} \in W_{2,+}^{1/2}(\Gamma_\theta)$ задачи (4.10), причем

$$\|H; W_2^{1/2}(\Gamma_\theta)\|^2 + (|f_-|, H)_{\Gamma_0} \leq \text{const}\ \|f_+, L_2\,\Gamma_\theta)\ \|$$

$$f_\pm = ½\,(f \pm |f|)$$

Это решение попадает в пространство $W_p^1(\Gamma_\theta)$ Соболева — Слободецкого, если только $f \in L_p(\Gamma_\theta)$, $p \in [2, +\infty)$.

Вариационное неравенство, подобное (4.10), получается и при «разрушении сдвигом», т. е. при увеличении свободной поверхности за счет расширения зоны скольжения (напомним, что предполагается отсутствие трения). Структура этого неравенства остается прежней, но более громоздкими становятся выражения для величин $\beta$ и $f$. В качестве неизвестной выступает функция

$$H(s) = H(s)\,\{\partial_\tau\Theta_0^0(0, s) - \partial_\tau\Theta_0^u(0, s)\}$$

Здесь $\Theta_0^0$ и $\Theta_0^u$ — решения предельных задач (2.6), (3.8) и (2.11), удовлетворяющие условиям сопряжения (3.22), (3.25) на контуре $\Gamma_u$. Наконец, вновь появившийся интегральный оператор отличается от (4.12) только вполне непрерывными слагаемыми.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Малый В. И.* Асимптотическое решение задачи о сжатии слоя слабосжимаемого материала//Механика эластомеров. Краснодар: Изд-во КПИ, 1983. С. 38—44.
2. *Милякова Л. В., Черных К. Ф.* Общая линейная теория тонкослойных резинометаллических элементов//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 110—120.
3. *Мальков В. М.* Деформация тонкого слоя из малосжимаемого материала//Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 87—93.
4. *Мальков В. М.* Теория тонкослойных резиноармированных элементов//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 161—167.
5. *Назаров С. А.* Асимптотическое решение задачи Навье — Стокса о течении тонкого слоя жидкости//Сибирский матем. ж. 1990. Т. 31. № 2. С. 131—144.
6. *Рейнольдс О.* Гидродинамическая теория смазки. М.; Л.: Гостехиздат, 1934. 447 с.
7. *Новиков П. А., Любин Л. Я.* Гидромеханика щелевых систем. Минск: Наука и техника, 1988. 344 с.
8. *Бояджиев Х., Бешков В.* Массоперенос в движущихся пленках жидкости. М.: Мир, 1988. 136 с.
9. *Bayada G., Chambat M.* The transition between the Stokes equations and the Reynolds equation: a mathematical proof//Appl. Math. and Optimiz. 1986. V. 14. No. 1. P. 73—93.
10. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 448 с.
11. *Назаров С. А.* Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях//Вестн. ЛГУ. 1982. № 7. С. 65—68.
12. *Назаров С. А.* Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва//МТТ. 1989. № 2. С. 152—160.
13. *Назаров С. А., Полякова О. Р.* Об эквивалентности критериев разрушения для трещины отрыва в упругом пространстве//МТТ. 1992. № 2. С. 101—113.
14. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
15. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками//Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209—292.
16. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками//Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29—60.
17. *Назаров С. А., Пламеневский В. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.
18. *Зорин И. С., Назаров С. А.* Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины//ПММ. 1989. Т. 53. № 4. С. 642—650.
19. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1962. 336 с.
20. *Бабич В. М., Зорин И. С., Иванов М. И., Мовчан А. Б., Назаров С. А.* Интегральные

характеристики в задачах теории упругости. Препринт ЛОМИ Р-6-89. Санкт-Петербург. 1989. 62 с.
21. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром//Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3—122.
22. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.
23. *Захаров В. В., Никитин Л. В.* О зоне проскальзывания при расслоении упругих материалов//МТТ. 1986. № 3. С. 172—175.
24. *Дюво Г., Лионс Ж. Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
22.V.1991