

МЕХАНИКА  
ТВЕРДОГО ТЕЛА  
№ 5 • 1993

УДК 539.374

© 1992 г. Е. Б. ИВАНОВА, А. С. КРАВЧУК

ПРИМЕНЕНИЕ БЕЗДИССИПАТИВНОЙ МОДЕЛИ  
И НЕЛОКАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОЙ ДИССИПАЦИИ  
В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ С УЧЕТОМ СИЛ АДГЕЗИИ

Приведены результаты по решению проблемы контактного взаимодействия твердых тел при учете сил адгезионного сцепления в области контакта. Для теории адгезии Джонсона — Кендалла — Роберта сформулирован принцип максимума, с помощью которого решена задача о контакте диска с полу平面остью. Указано дополнительное условие для единственности решения. Показана исправленность локального закона вязкого сопротивления. Предложен нелокальный закон и решены две задачи — об отрыве пинта от основания и об эволюции зоны контакта диска с полу平面остью.

1. Постановка задачи. Пусть в задаче о контакте твердых деформируемых тел существенную роль играют силы адгезионного сцепления. Эти силы, как известно, дальнодействующие, однако радиус их действия чрезвычайно мал по сравнению с характерными размерами контактирующих тел. Основной гипотезой используемой теории является гипотеза о возможности замены сил притяжения, действующих на расстоянии, силами контактного взаимодействия. Будем считать, что контактные силы притяжения направлены по нормали к поверхности контакта и равны произведению  $\beta\omega$ , где  $\omega$  — постоянная, характеризующая свойства материала и состояния поверхности,  $\beta$  — безразмерный скалярный параметр, меняющийся от 0 до 1. Будем отождествлять величину  $1-\beta$  с поврежденностью адгезионных связей:  $\beta = 1$  означает, что связи не разрушены,  $\beta = 0$  — связи полностью разрушены.

Модель, которая будет применена ниже, была построена в [1, 2]. Способ построения заимствован из [3] и заключается в выводе законов сохранения с учетом нового параметра состояния  $\beta$ , выводе неравенства Клаузиуса — Дюгема для данного конкретного случая, задании свободной энергии и функции диссипации (кратко этот способ будет воспроизведен ниже).

Рассмотрим контакт одного деформируемого тела  $\Omega$  с абсолютно жестким гладким препятствием. Обозначим через  $\Sigma = \partial\Omega$  границу тела  $\Omega$ ;  $\Sigma = \Sigma_u \cup \Sigma_\sigma \cup \Sigma_e$ , где  $\Sigma_u$  — закрепленная часть границы, на части  $\Sigma_\sigma$  заданы поверхностные усилия с плотностью  $P$ ; точки  $\Sigma_e$  могут входить в контакт с препятствием (штампом). К внешним воздействиям относится также скалярный параметр  $A$  — типа плотности электрических зарядов на  $\Sigma_e$ , значение которого влияет на величину  $\beta$ ;  $\beta$  — параметр типа перемещения,  $A$  — типа усилия. Предположим, что к числу внешних воздействий на систему относятся также заданное поле перемещений  $u = u_s$  поверхности подвижного препятствия и управляемое извне силовое воздействие на  $\Sigma_e$  плотности  $P$  (такая ситуация возникает, например, при подаче в зазор между телом и штампом жидкости под давлением).

Требуется определить напряжения, деформации и перемещения в области

$\Omega$ , усилия контактного взаимодействия и состоянис адгезионных связей на части  $\Sigma_c$  поверхности тела  $\Omega$ .

2. Следствия I и II законов термодинамики. Используем I закон термодинамики в виде

$$dE = \delta A^e + \delta Q^e + \delta Q^* \quad (2.1)$$

где  $E$  — полная энергия системы,  $\delta A^e$  — приращение механической работы,  $\delta Q^e$  — приток теплоты,  $\delta Q^*$  — приток энергии к системе за счет механизмов, отличных от механической работы и притока теплоты. Положим:

$$\delta E = \int_{\Omega_1} \rho \left( d \frac{\dot{v}^2}{2} + du \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1 \cap \Sigma_c} du^e d\Sigma \quad (2.2)$$

$$\delta Q^e = - \int_{\Omega_1} q \cdot \vec{v} dt d\Sigma + \int_{\Omega_1} i dt d\Omega + \int_{\partial\Omega_1 \cap \Sigma_c} i^e dt d\Sigma \quad (2.3)$$

$$\delta Q^* = \int_{\partial\Omega_1 \cap \Sigma_c} A \dot{\beta} dt d\Omega \quad (2.4)$$

где  $\Omega_1$  — произвольная подобласть области  $\Omega$ ,  $\partial\Omega_1$  — ее граница,  $\dot{v} = |\dot{v}|$ ,  $\dot{v}$  — скорость частиц,  $u$  — плотность внутренней энергии в объеме,  $u^e$  — плотность внутренней энергии на поверхности  $\Sigma_c$ ,  $\rho$  — плотность материала,  $q$  — вектор потока теплоты,  $i$ ,  $i^e$  — мощность тепловых источников соответственно в области  $\Omega$  и на поверхности  $\Sigma_c$ ,  $\dot{\beta}$  — скорость изменения  $\beta$ .

В рассматриваемой задаче удобнее, вместо обычной теоремы живых сил, воспользоваться принципом возможных мощностей [3].

Возможная мощность  $W_i$  внутренних усилий в исследуемой системе по определению равна:

$$W_i = - \int_{\Omega_1} \hat{\sigma} : \hat{\epsilon}(\dot{v}) d\Omega - \int_{\partial\Omega_1 \cap \Sigma_c} [F \dot{y} + Q \cdot (\dot{v} - \dot{v}_s)] d\Sigma \quad (2.5)$$

где  $\hat{\sigma}$  — тензор напряжений,  $\dot{v}$  — поле возможных скоростей,  $\hat{\epsilon}(\dot{v}) = 1/2 (\nabla \dot{v} + \nabla \dot{v}^T)$  — тензор скоростей деформаций,  $F$  — внутренний (на поверхности  $\Sigma_c$ ) «силовой» параметр, соответствующий новой термодинамической переменной  $\beta$ ,  $\dot{v}_s$  — возможное значение поля  $\dot{v}$ ;  $v_s$  должно соответствовать перемещению штампа как единого жесткого целого;  $Q$  — плотность силовых воздействий тела  $\Omega$  на штамп через поверхность  $\Sigma_c$ ;  $\dot{y}$  — возможное поле скоростей изменения параметра  $\beta$ , ограничения на которое очевидным образом вытекают из определения  $\beta$ :

$$\dot{y} \geq 0 \text{ при } \beta = 0, \dot{y} \leq 0 \text{ при } \beta = 1 \quad (2.6)$$

Возможная мощность внешних усилий равна

$$W_e = \int_{\Omega_1} \rho (F - \ddot{u}) \dot{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} P \cdot \dot{v} d\Sigma + \int_{\partial\Omega_1 \cap \Sigma_c} (A \dot{y} + g_s \cdot \dot{v}_s) d\Sigma \quad (2.7)$$

где  $\rho F$  — плотность объемных силовых воздействий,  $P$  — заданная плотность поверхностных усилий в точках  $\Sigma_o$  и  $\Sigma_c$ ; на оставшейся части поверхности величина  $P$  равна неизвестной заранее реакции отбрасываемой части области  $\Omega$ ;  $g_s$  — реакция штампа.

Составляя уравнение принципа возможных мощностей  $W_i + W_e = 0$  и пользуясь произволом в выборе подобласти  $\Omega_1$ , а также имеющимся произволом в выборе кинематических параметров  $\dot{v}$ ,  $\dot{v}_s$ ,  $\dot{y}$ , приходим к известным уравнениям движения

в области  $\Omega$ , заданному силовому граничному условию на  $\Sigma_c$  и к следующим уравнениям на части  $\Sigma_c$ :

$$F = A, \hat{\sigma} \cdot \vec{v} = P - Q, Q = -g_s \quad (2.8)$$

Используя полученные уравнения и выражения (2.2) — (2.4), из уравнения (2.1) найдем два уравнения притока теплоты — известное классическое в области  $\Omega$ :

$$\rho \frac{du}{dt} = \hat{\sigma} \cdot \hat{e}(\dot{u}) + i - \operatorname{div} q \quad (2.9)$$

и новое — в точках поверхности  $\Sigma_c$ :

$$du^c/dt = i^c + F\beta + Q \cdot (\dot{u} - \dot{u}_s) \quad (2.10)$$

где  $u$  — поле перемещений. Определив энтропию системы по формуле

$$S = \int_{\Omega} \rho s d\Omega + \int_{\partial\Omega \setminus \Sigma_c} s^c d\Sigma \quad (2.11)$$

и плотности свободной энергии  $\psi$  в  $\Omega$  и  $\psi^c$  на  $\Sigma_c$ , из II закона термодинамики с учетом полученных следствий из I закона выводим неравенство ( $T$  — температура):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \frac{d\psi}{dt} d\Omega + \int_{\partial\Omega \setminus \Sigma_c} \frac{d\psi^c}{dt} d\Sigma &\leq \int_{\Omega} \hat{\sigma} \cdot \hat{e}(\dot{u}) d\Omega + \int_{\Omega} T q \cdot \nabla \left( \frac{1}{T} \right) d\Omega - \\ - \int_{\Omega} \rho s \frac{dT}{dt} d\Omega - \int_{\partial\Omega \setminus \Sigma_c} s^c \frac{dT}{dt} d\Sigma \end{aligned} \quad (2.12)$$

представляющее собой реализацию неравенства Клаузуса — Дюгесма в рассматриваемой сейчас задаче; ниже это неравенство будет использовано при  $T = \text{const}$ .

3. Построение законов состояния. По определению [3], задание свободной энергии как функции выбранных термодинамических параметров состояния и последующее вычисление сопряженных переменных представляет собой процедуру построения законов состояния. Напомним, что разность между правой и левой частями неравенства (2.12) называется полной диссипацией; задание выражения для диссипации приводит к так называемым дополнительным законам, замыкающим систему разрешающих соотношений.

Примем, в добавок к уже введенным предположениям об изотермичности процесса и об аддитивности термодинамических функционалов в области  $\Omega$  и на части  $\Sigma_c$  границы, следующие гипотезы:

1) полную систему термодинамических параметров состояния составляют: тензор малых деформаций Коши  $\hat{e}(u)$ , интенсивность адгезионного сцепления  $\beta$  и смещение основания  $u_s$ ;

2)  $\psi = \psi(\hat{e})$ ,  $\psi^c = \psi^c(\beta, u_s)$ ;

3) функции  $\psi$  и  $\psi^c$  являются выпуклыми функциями своих аргументов;

4)  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $\beta u_s = 0$ ,  $x \in \Sigma_c$ ;

5) функционал  $\Psi$ , равный левой части неравенства (2.12), в точках, в которых ограничения 4) не выполняются, полагается равным  $+\infty$  (аналогичное соглашение принимается при нарушении условий непроникания на  $\Sigma_c$ ).

Пусть  $K$  — множество значений параметров состояния, для которых выполнены ограничения 4) и условие непроникания. Поскольку  $K$  — невыпуклое множество, то и функционал  $\Psi$  будет невыпуклым.

Введем термодинамические силы  $\hat{t}$ ,  $G_1$ ,  $G_2$ , сопряженные параметрам состояния  $\hat{e}$ ,  $u_s$ ,  $\beta$ ; предположения 1) — 5) приводят к следующему уравнению состояния:

$$\{\hat{\tau}(x \in \Omega_i), G_1(x \in \Sigma_c), G_2(x \in \Sigma_c)\} \in \partial\Psi \quad (3.1)$$

где  $\partial\Psi$  — локальный субдифференциал  $\Psi$ ; напомним определение

$$\begin{aligned} \partial\Psi = & \{\{\hat{\tau}, G_1, G_2\} | \Psi(\hat{\varepsilon}^*, u_s^*, \gamma^*) \geq \Psi(\hat{\varepsilon}, u_s, \gamma) + \\ & + \langle \hat{\tau}, \hat{\varepsilon}^* - \hat{\varepsilon} \rangle + \langle G_1, u_s^* - u_s \rangle + \langle G_2, \gamma^* - \gamma \rangle \} \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$\forall \{\hat{\varepsilon}^*, u_s^*, \gamma^*\} \in O(\hat{\varepsilon}, u_s, \gamma) \subseteq K\}$$

где  $O$  — некоторая окрестность точки  $\{\hat{\varepsilon}, u_s, \gamma\}$ ; угловые скобки означают билинейные функционалы на соответствующих парах функций.

4. Построение дополнительных законов. Пример: теория Джонсона — Кендалла — Роберта. Выберем в определении (3.2) в качестве  $\hat{\varepsilon}, u_s, \gamma$  значения параметров состояния в некоторый фиксированный момент времени  $t$ ; зададим приращение  $\Delta t$  и подставим  $\hat{\varepsilon}^* = \hat{\varepsilon}(t + \Delta t), u_s^* = u_s(t + \Delta t), \gamma^* = \gamma(t + \Delta t)$ . Для  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , а затем меняя знак  $\Delta t$  и повторяя процедуру предельного перехода, устанавливаем, что

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int_{\Omega} \hat{\tau} \cdot \hat{\varepsilon}(\dot{u}) d\Omega + \int_{\Sigma_c} (G_1 \cdot \dot{u}_s + G_2 \beta) d\Sigma \quad (4.1)$$

Подставляя выражение (4.1) в левую часть неравенства (2.12), после несложных преобразований находим следующее выражение для диссипации

$$D = \int_{\Sigma} (\hat{\sigma} - \hat{\tau}) \cdot \hat{\varepsilon}(\dot{u}) d\Omega + \int_{\Sigma_c} [(Q - G_1) \cdot \dot{u}_s + (F - G_2) \beta] d\Sigma \geq 0 \quad (4.2)$$

которое и будет использовано в дальнейшем.

Предположим для простоты, что  $u_s = 0$  и примем следующее выражение для свободной энергии

$$\Psi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\varepsilon} : {}^4\hat{a} : \hat{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Sigma_c} \omega \beta d\Sigma \quad (4.3)$$

где  ${}^4\hat{a}$  — тензор модулей упругости.

Пренебрежем силами инерции, положим  $A = 0$  и примем следующие дополнительные законы:

$$\hat{\sigma} = \hat{\tau}, Q = G_1, F = G_2 \quad (4.4)$$

которые означают, что диссипация равна нулю.

Пусть  $v$  — возможное поле перемещений,  $\gamma$  — возможное поле значений параметра  $\beta$ ; в неравенстве (3.2) произведем замены  $\hat{\varepsilon}^* = \hat{\varepsilon}(v)$ ,  $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(u)$ ,  $\hat{\gamma} = \gamma$ ,  $\beta = \beta$ , тогда получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\hat{\varepsilon}(v) : {}^4\hat{a} : \hat{\varepsilon}(v) - \hat{\varepsilon}(u) : {}^4\hat{a} : \hat{\varepsilon}(u)] d\Omega + \\ & + \int_{\Sigma_c} [(-\omega)(\gamma - \beta)] d\Sigma \geq \int_{\Omega} \hat{\sigma}(u) \cdot \hat{\varepsilon}(v - u) d\Omega \quad (4.5) \end{aligned}$$

Отметим, что при построении неравенства (4.5) использовано условие неотрицательности интеграла по  $\Sigma_c$  от выражения  $(\hat{\sigma} \cdot \vec{v}) \cdot (v - u)$ . Вводя функционал

$$\Phi(\gamma, v) = \Psi(v, v) - L(v) = J(v) - \int_{\Sigma_c} \omega \beta d\Sigma \quad (4.6)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} \rho F \cdot v \, d\Omega + \int_{\Sigma_c} P \cdot v \, d\Sigma \quad (4.7)$$

и используя формулу Гаусса — Остроградского, приходим к неравенству

$$\Phi(\gamma, v) \geq \Phi(\beta, u), \quad \forall \{\gamma, v\} \in O(\beta, u) \subset K, \quad \{\beta, u\} \in K, \quad (4.8)$$

которое означает, что  $\{\beta, u\}$  — точка локального минимума функционала  $\Phi$  на множестве  $K$ .

Нетрудно показать (и это впервые было сделано в [1, 2]), что параметр  $\beta$  в рассматриваемой модели может принимать только два значения —  $\beta = 0$  или  $\beta = 1$ . Обозначим через  $S_c(v) = S(\Sigma_c^c(v))$  площадь части  $\Sigma_c^c \subseteq \Sigma_c$ , на которой  $\beta = 1$ ; тогда из неравенства (4.8) будем иметь

$$J(v) - \omega S_c(v) \geq J(u) - \omega S_c(u), \quad \forall v \in K_1, \quad u \in K_1 \quad (4.9)$$

$$K_1 = \{v \mid v = v(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{\Sigma_u} = 0; \quad v \cdot \vec{v}|_{\Sigma_c} \leq 0\} \quad (4.10)$$

Полученная постановка задачи в форме задачи минимизации функционала (4.9) в теории адгезии известна как *JKR-теория* (теория Джонсона — Кендалла — Робертса [4]). Ниже, в п. 5—7, будет приведено несколько новых результатов, относящихся к данной теории — принцип максимума и решение двух задач.

**5. Принцип максимума.** Рассмотрим обычную контактную задачу теории упругости (без учета сил адгезии); как впервые установлено Синьорини, эта задача сводится к минимизации полной энергии системы  $J(v)$  на множестве полей перемещений, удовлетворяющих условию непроникания на  $\Sigma_c$ . Если зафиксировать внешние воздействия  $\rho F$  и  $P$  и построить семейство решений смешанных задач, для каждой из которых условие непроникания считается выполненным со знаком строгого равенства на некотором многообразии  $\Sigma_c^c$ , то истинную зону контакта можно определить из условия максимума функционала

$$J = J_c \equiv J(\Sigma_c^c) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho F \cdot u(\Sigma_c^c) \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_c} P \cdot u(\Sigma_c^c) \, d\Sigma - \\ - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_c} [\hat{\sigma}(\Sigma_c^c) \cdot \vec{v}] \cdot u(\Sigma_c^c) \, d\Sigma \quad (5.1)$$

последнее слагаемое соответствует нагрузке  $\hat{\sigma} \vec{v}$  в зоне контакта, которая после решения контактной задачи является известной величиной, зависящей от  $\Sigma_c^c$ . Этот результат, который естественно назвать принципом максимума, для полу-пространства доказан в работе [5], частные его формы имеются в ряде других работ. Подчеркнем, что в функционале (5.1) варьируются не перемещения, а параметры области  $\Sigma_c^c$ , при этом будут меняться поля и перемещений и напряжений.

Как видно из результатов п. 4, аналогичный принцип в теории адгезии, т. е. при  $\omega > 0$  будет локальным; во-вторых, если упругость исключить, то задачи максимизации не возникнут: Кроме того, для исключения катастрофически быстрого роста трещин между телом  $\Omega$  и штампом необходимо наложить дополнительное ограничение устойчивости, которое заключается в том, что приращение работы внешних воздействий не должно превосходить работы разрушения соответствующего количества адгезионных связей. Строгое неравенство будет означать неизменность зоны сцепления при заданном изменении внешних воздействий.

Таким образом, в рассматриваемой модели принцип максимума приводит задачу поиска зоны контакта к задаче

$$J(\Sigma_c) = J_c(\Sigma_c) - \omega S_c(\Sigma_c) \Rightarrow \max_{\Sigma_c} \quad (5.2)$$

6. Задача об адгезионном контакте жесткого круглого диска с упругой полуплоскостью. Приведем в качестве примера применение принципа максимума решения плоской задачи о вдавливании круглого диска радиуса  $R$  в упругую полуплоскость  $y \geq 0$ . Выбирая ось  $Ox$  совпадающей с границей полуплоскости с началом в точке  $O$  в середине зоны контакта, получаем следующее распределение контактного давления [6]:

$$\sigma_N = \sigma_N(x) = \frac{2\mu(l^2 - 2x^2)}{R(x+1)\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{P_0}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}} \quad (6.1)$$

где  $l$  — полуширина зоны контакта,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $x = 3 - 4\nu$  — для плоской деформации,  $A = (3 - \nu)/(1 - \nu)$  — для обобщенного плоского напряженного состояния,  $P_0$  — вдавливающая сила.

Функционал  $J(\Sigma_c)$  здесь оказывается функцией параметра  $l$ :

$$J(\Sigma_c) = J(l) = -\frac{\mu\pi l^4}{8R^2(x+1)} + \frac{P_0 l^2}{8R} - 2\omega l \quad (6.2)$$

(в вычислениях возникает не влияющая на результаты аддитивная бесконечная постоянная из-за бесконечных относительно точки  $y=0$  смещений границы).

Максимизация функционала (6.2) по параметру  $l$  приводит к кубическому уравнению

$$-\frac{\mu\pi l^3}{2R^2(x+1)} + \frac{P_0 l}{4R} - 2\omega = 0 \quad (6.3)$$

Количество вещественных корней данного уравнения, а, стало быть, и количество точек стационарности функции (6.2) зависит от знака дискриминанта:

$$\Delta = -(P_0/(12Rk))^3 + (\omega/k)^2, \quad k = \pi\mu/(2R^2(x+1)) \quad (6.4)$$

Если  $\Delta > 0$ , то имеется только один вещественный корень

$$l = l_1 = (-\omega/k + \sqrt{\Delta})^{1/3} + (-\omega/k - \sqrt{\Delta})^{1/3} \quad (6.5)$$

являющийся, очевидно, отрицательным.

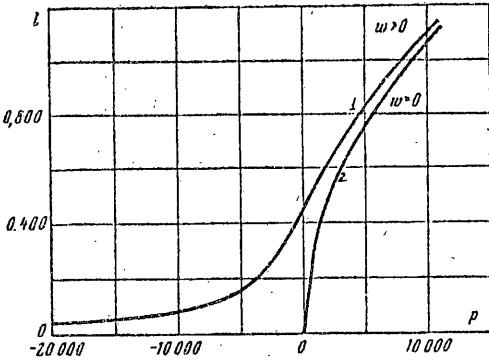
Предельный переход при  $\omega \rightarrow 0$  приводит к решению Герца  $|l| = P_0 R(x+1)/(2\mu)$ ; предельный переход при  $P_0 \rightarrow 0$  дает остаточную зону сцепления  $|l| = (2\omega/k)^{1/3}$ .

Если же  $\Delta \leq 0$ , то уравнение (6.3) имеет три вещественных корня, два из которых соответствуют точкам локального максимума функции (6.2). Для получения единственного решения используем то обстоятельство, что при  $\omega > 0$  зона контакта — при прочих равных условиях — должна быть не меньше, нежели зона контакта при  $\omega = 0$ . Это соображение, которое математически можно оформить как дополнительное условие поставленной задачи в виде

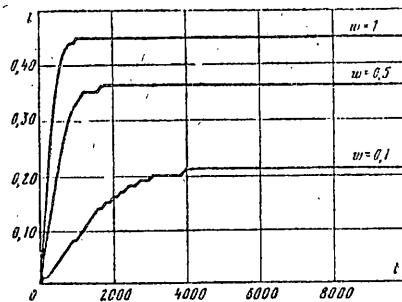
$$\Sigma_c^* \subseteq \Sigma_c^{**} \quad (6.6)$$

где  $\Sigma_c^{**}$  — зона сцепления при  $\omega > 0$ ,  $\Sigma_c^*$  — зона сцепления, получающаяся из  $\Sigma_c^{**}$  путем стремления к нулю при сохранении внешних воздействий, позволяет отобрать единственный подходящий корень уравнения (6.3), который оказывается отрицательным.

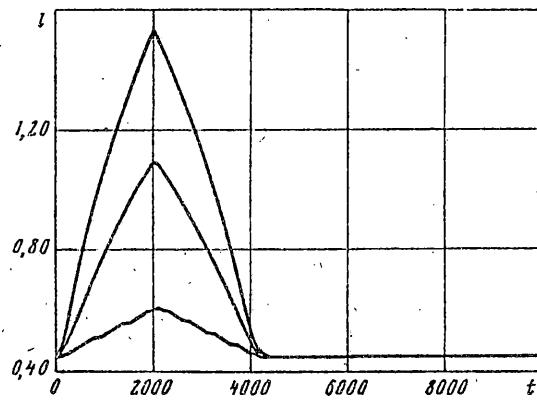
Некоторые результаты численного исследования приведены на фиг. 1 в виде кривых  $l(P_0)$  для  $\omega = 0$  и  $\omega > 0$ . Кривая 1 соответствует  $w = 1$  Н/м, 2 —  $w = 0$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$(l[\text{м}], P[\text{Н}])$ . Видно, что при  $P_0 \rightarrow +\infty$  кривые  $l(P_0)$  для  $\omega > 0$  стремятся к кривой  $l(P_0)$  для  $\omega = 0$ . Решения для  $\omega > 0$  лежат на отрицательной ветви кривой  $l(P_0)$ . Входные данные для численных исследований были выбраны такими:  $E = 10^6 \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu = 0,33$ ,  $R = 100 \text{ м}$ ,  $\omega = 1 \text{ Н/м}$ ;  $E$  — модуль Юнга.

7. Нелокальный закон вязкого сопротивления разрушению. Примем естественное, на первый взгляд, предположение о том, что при движении зоны контакта диссипация в точке пропорциональна скорости изменения  $\beta$ , т. с.

$$F - G_2 = C\beta, C = \text{const} > 0 \quad (7.1)$$

и на частном примере покажем, что данный закон использовать нельзя. С этой целью рассмотрим задачу об отрыве жесткой нерастяжимой нити от жесткого основания. Нить будем считать прямолинейной; выберем начало координатной оси  $Ox$  совпадающим с левым концом нити, а к правому концу приложим силу  $P$ , направленную перпендикулярно нити. Пусть константа адгезии  $\omega$  рассчитывается на единицу длины нити, длина неразрушенного участка соединения нити с основанием равна  $x_0$ . С учетом всех введенных предположений неравенство (3.2) для рассматриваемого случая приобретает такой вид

$$-\int_0^{x_0} \omega \delta \beta \, dx \geq \int_0^{x_0} G_2 \delta \beta \, dx - P \delta x_0 \quad (7.2)$$

через  $\delta\beta$ ,  $\delta x_0$  здесь обозначены разности возможных и истинных значений.

Поскольку точка  $x_0$ , по предположению, подвижна, то в вариационном неравенстве (7.2) вариация  $\delta x_0$  независима, а вариация  $\delta\beta$  определяется через  $\delta x_0$ . Предположим, что при разрушении параметр  $\beta$  скачком меняется от 1 до нуля, т. е.

$$\beta = 1(x_0 - x) \quad (7.3)$$

где  $1(x)$  — единичная функция Хевисайда. Следовательно

$$\delta\beta = \delta_0(x_0 - x)\delta x_0 \quad (7.4)$$

где  $\delta_0(x)$  — дельта-функция Дирака.

Из уравнения (7.1) с учетом гипотезы  $A = 0$  будем иметь  $G_2 = C\beta$  и, поскольку  $\dot{\beta} = \delta_0(x_0 - x)\dot{x}_0$ , то интеграл в правой части вариационного неравенства (7.2) будет расходящимся, следовательно, законом (7.1) пользоваться, вообще говоря, нельзя.

Одним из выходов из создавшейся ситуации, который был предложен различными авторами, в частности, М. Фремоном [1, 2], является использование илокальной связи необратимой части силы  $F - G_2$  со скоростью  $\beta$  изменения параметра  $\beta$ . Простейшая илокальная (по пространству) зависимость имеет вид свертки

$$F - G_2 = g * \dot{\beta} \quad (7.5)$$

которая для случая трещины на плоскости записывается следующим образом:

$$(g * \dot{\beta})(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x - \vec{\xi}) \dot{\beta}(\vec{\xi}) d\Sigma_{\xi}$$

где  $g(x) = g(|x|)$  — быстро убывающая функция расстояния до луля, например,  $g(|x|) = \exp(-\alpha|x|^2)$ ,  $\alpha = \text{const} > 0$  — конкретный вид определяется из эксперимента.

Нетрудно убедиться в том, что зависимость (7.5) является потенциальной, с потенциалом:

$$U = \frac{1}{2} \langle g * \dot{\beta}, \dot{\beta} \rangle \quad (7.6)$$

где, как и ранее, угловые скобки означают билинейный функционал. Для случая трещин на плоскости  $Oxy$  имеем

$$\langle g * \dot{\beta}, \dot{\beta} \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} (g * \dot{\beta})(x, y) \dot{\beta}(x, y) dx dy$$

Из анализа экспериментальных данных по разрушению клеевых соединений полимерных пленок было установлено, что зависимость (7.5) плохо согласуется с экспериментом, поэтому Нортоном и Хоффом было предложено следующее обобщение потенциала (7.6):

$$U = \frac{1}{p} \{ \langle g * \dot{\beta}, \dot{\beta} \rangle \}^{p/2}, \quad p = \text{const} > 1 \quad (7.7)$$

которое приводит к формуле

$$F - G_2 = \{ \langle g * \dot{\beta}, \dot{\beta} \rangle \}^{p/2-1} (g * \dot{\beta})(x) \quad (7.8)$$

Если  $\dot{x}_0 < 0$ , то неравенство (7.2) превратится в равенство, подставив в которое

выражение (7.8), придем к следующему уравнению для скорости движения точки отрыва  $x_0$ :

$$\dot{x}_0 = - \left[ \frac{|\omega - P|}{(g(0))^{p/2}} \right]^{\nu(p-1)}, \quad P \geq \omega \quad (7.9)$$

В качестве второго примера применения формулы (7.8) рассмотрим снова задачу о диске (см. п. 6). Сохраняя гипотезу о том, что при разрушении адгезионного соединения параметр  $\beta$  скачком меняется от 1 до 0, т. е.  $\beta(x) = 1(l-x) + 1(l+x)$ , и повторяя рассуждения, проведенные при выводе уравнения (7.9), придем к следующему уравнению для  $l$ :

$$l^{p-1} \{2 [g(0) + g(2l)]\}^{p/2} = \frac{\mu \pi l^3}{2R^2 (\kappa + 1)} - \frac{P_0 l}{4R} + 2\omega \quad (7.10)$$

Некоторые численные решения данного уравнения показаны на фиг. 2, 3. Из фиг. 2, соответствующего случаю  $P_0 = 0$ , видно, что зона сцепления монотонно растет, приближаясь к определенному пределу, который тем больше, чем больше  $\omega$ . Кривые 1—3 соответствуют  $\nu = 0,5; 1,0; 1,5 \text{ H/m}$ ;  $l [\text{м}]$ ,  $t [\text{с}]$ . На фиг. 3 показаны истории изменения  $l(t)$ , соответствующие заданным историям изменения  $P_0(t)$  ( $P[\text{kH}]$ ). Видно, что имеет место запаздывание во времени реакции системы на воздействие  $P_0(t)$ ; это запаздывание тем заметнее, чем меньше  $P_0$ . Входные данные для расчетов те же, что и в п. 6; кроме того,  $g(\dot{x}) = \alpha \exp(-\alpha x^2)$ ,  $\alpha = 1000$ ,  $p = 2$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fremond M. Adherence des solides//Comptes Rendus de l'Acad. de Sci. de Paris. 1982. Sér. 2. Tome 295. № 9. Р. 769—772.
2. Fremond M. Equilibre des Structures qui adhèrent à leur support//Comptes Rendus de l'Acad. de Sci. de Paris. 1982. Sér. 2. Tome 295. № 11. Р. 913—916.
3. Жермен П. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1983. 399 с.
4. Johnson K. L., Kendall K., Roberts A. D. Surface energy and the contact of elastic solids//Proc. Roy. Soc. 1971. Ser. A. Vol. 324. № 155b. Р. 301—313.
5. Керчман В. И. Экстремальные свойства границы контакта в задаче Синьорини для полупространства//Докл. АН СССР. 1981. Т. 259. № 5. С. 1065—1068.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Москва

Поступила в редакцию  
10.VI.1992