МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1993

УДК 539.214;539.374

© 1993 г. И. Т. АРТЕМЬЕВ, Д. Д. ИВЛЕВ

ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Рассматриваются линеаризированные уравнения теории идеальной пластичности для гладких и кусочно-гладких поверхностей текучести.

1. Рассмотрим соотношения связи между компонентами напряжений

$$\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2 \quad (x\,y\,z) \tag{1.1}$$

$$\tau_{xy} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \quad (1\;2\;3)$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — главные компоненты напряжения; σ_x, τ_{xy},...— компоненты напряжения в декартовой системе координат xyz; l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы, определяющие взаимную ориентацию главных направлений и осей декартовой системы координат; недостающие соотношения получаются круговой перестановкой индексов $(x\,y\,z)$, $(1\;2\;3)$.

Имеют место соотношения

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1, \quad l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0 \tag{1.2}$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 = 0$$

В качестве исходного примем однородное напряженное состояние. Припишем компонентам невозмущенного состояния верхний индекс (градус), положим

$$l_1{}^\circ = 1,\; l_2{}^\circ = l_3{}^\circ = 0;\quad m_2{}^\circ = 1,\; m_1{}^\circ = m_3{}^\circ = 0;\quad n_3{}^\circ = 1,\; n_1{}^\circ = n_2{}^\circ = 0 \tag{1.3}$$

Из (1.1), (.3) следует

$$\sigma_x{}^\circ = \sigma_1{}^\circ,\quad \sigma_y{}^\circ = \sigma_2{}^\circ,\quad \sigma_z{}^\circ = \sigma_3{}^\circ,\quad \tau_{xy}{}^\circ = \tau_{yz}{}^\circ = \tau_{zx}{}^\circ = 0 \tag{1.4}$$

Припишем компонентам возмущенного состояния верхний индекс штрих; тогда из (1.1) получим

$$\sigma_x{}' = \sigma_1{}',\quad \tau_{xy}{}' = \sigma_1{}^\circ l_2{}' + \sigma_2{}^\circ m_1{}'$$

$$\sigma_y{}' = \sigma_2{}',\quad \tau_{yz}{}' = \sigma_2{}^\circ m_3{}' + \sigma_3{}^\circ n_2{}' \tag{1.5}$$

$$\sigma_z{}' = \sigma_3{}',\quad \tau_{zx}{}' = \sigma_1{}^\circ l_3{}' + \sigma_3{}^\circ n_1{}'$$

Линеаризируя соотношения (1.2), найдем

$$l_2{}' + m_1{}' = 0,\quad m_3{}' + n_2{}' = 0,\quad l_3{}' + n_1{}' = 0 \tag{1.6}$$

Согласно (1.4)—(1.6), будем иметь

$$\tau_{xy}{}' = (\sigma_x{}^\circ - \sigma_y{}^\circ)\, l_2{}',\quad \tau_{yz}{}' = (\sigma_y{}^\circ - \sigma_z{}^\circ)\, m_3{}',\quad \tau_{zx}{}' = (\sigma_z{}^\circ - \sigma_x{}^\circ)\, n_1{}' \tag{1.7}$$

Из соотношений для компонент скоростей деформации

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2 \quad (x\,y\,z) \tag{1.8}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_1 l_1 l_2 + \varepsilon_2 m_1 m_2 + \varepsilon_3 n_1 n_2 \quad (1\,2\,3)$$

аналогичных (1.1), справедливых для изотропного материала, получим

$$\varepsilon_x^\circ = \varepsilon_1^\circ, \quad \varepsilon_{xy}^\circ = 0, \quad \varepsilon_x' = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_{xy}' = (\varepsilon_x^\circ - \varepsilon_y^\circ)\, l_2' \tag{1.9}$$

$$\varepsilon_y^\circ = \varepsilon_2^\circ, \quad \varepsilon_{yz}^\circ = 0, \quad \varepsilon_y' = \varepsilon_2', \quad \varepsilon_{yz}' = (\varepsilon_y^\circ - \varepsilon_z^\circ)\, m_3'$$

$$\varepsilon_z^\circ = \varepsilon_3^\circ, \quad \varepsilon_{zx}^\circ = 0, \quad \varepsilon_z' = \varepsilon_3', \quad \varepsilon_{zx}' = (\varepsilon_z^\circ - \varepsilon_x^\circ)\, n_1'$$

Из (1.7), (1.9) будем иметь

$$\tau_{xy}' = a_{xy}\varepsilon_{xy}', \quad \tau_{yz}' = a_{yz}\varepsilon_{yz}', \quad \tau_{zx}' = a_{zx}\varepsilon_{zx}' \tag{1.10}$$

$$a_{xy} = \frac{\sigma_x^\circ - \sigma_y^\circ}{\varepsilon_x^\circ - \varepsilon_y^\circ}, \quad a_{yz} = \frac{\sigma_y^\circ - \sigma_z^\circ}{\varepsilon_y^\circ - \varepsilon_z^\circ}, \quad a_{zx} = \frac{\sigma_z^\circ - \sigma_x^\circ}{\varepsilon_z^\circ - \varepsilon_x^\circ}$$

Соотношения (1.10) справедливы для любого изотропного материала при принятых предположениях о начальном невозмущенном состоянии.

Отметим частные случаи. Если компоненты девиаторов напряжений и скоростей деформации пропорциональны

$$\frac{\varepsilon_x^\circ - \varepsilon_y^\circ}{\sigma_x^\circ - \sigma_y^\circ} = \frac{\varepsilon_y^\circ - \varepsilon_z^\circ}{\sigma_y^\circ - \sigma_z^\circ} = \frac{\varepsilon_z^\circ - \varepsilon_x^\circ}{\sigma_z^\circ - \sigma_x^\circ} = \lambda^\circ \tag{1.11}$$

то в соотношениях (1.10):

$$a_{xy} = a_{yz} = a_{zx} = 1/\lambda^\circ \tag{1.12}$$

Имеет место

$$a_{xy} = 0, \quad \tau_{xy}' = 0 \quad \text{при} \quad \sigma_x^\circ = \sigma_y^\circ \quad (x\,y\,z) \tag{1.13}$$

Аналогично

$$b_{xy} = 1/a_{xy} = 0, \quad \varepsilon_{xy}' = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_x^\circ = \varepsilon_y^\circ \quad (x\,y\,z) \tag{1.14}$$

Уравнения равновесия для возмущенного состояния имеет вид

$$\partial\sigma_x'/\partial x + \partial\tau_{xy}'/\partial y + \partial\tau_{xz}'/\partial z = 0 \quad (x\,y\,z) \tag{1.15}$$

Подставляя в (1.15) соотношения (1.10), переходя к компонентам скорости перемещения u, v, w, получим

$$2\frac{\partial\sigma_x'}{\partial x} + a_{xy}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + a_{xz}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \quad (x\,y\,z) \tag{1.16}$$

Здесь и в дальнейшем штрих у компонент скорости перемещений опущен.

Три уравнения (1.16) содержат шесть неизвестных: σ_x', σ_y', σ_z', u, v, w. Замкнутость системы может быть достигнута за счет использования условия пластичности и соотношений ассоциированного закона пластического течения.

2. Рассмотрим гладкую поверхность текучести, определяемую уравнением

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \tag{2.1}$$

Линеаризируя соотношение (2.1), будем иметь

$$a_1\sigma_1' + a_2\sigma_2' + a_3\sigma_3' = 0, \quad a_i = \partial F^\circ/\partial\sigma_i \tag{2.2}$$

где a_i — градус означает, что значения взяты при $\sigma_i = \sigma_i^\circ$.

Согласно (2.2), линеаризированное условие пластичности интерпретируется плоскостью в пространстве напряжений σ_i'.

Для условия пластичности Мизеса

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 1 \tag{2.3}$$

будем иметь

$$a_1 = \sigma_1{}^\circ - \sigma^\circ, \quad \sigma^\circ = 1/3\,(\sigma_1{}^\circ + \sigma_2{}^\circ + \sigma_3{}^\circ) \quad (1, 2, 3) \tag{2.4}$$

Из ассоциированного закона пластичности, согласно (2.3), найдем

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \lambda \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \tag{2.6}$$

Из (2.5), (2.3) следует

$$\lambda = [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{1/2} \tag{2.7}$$

Линеаризируя соотношения (2.5), получим

$$\varepsilon_x{}' - \varepsilon_y{}' = \lambda^\circ (\sigma_x{}' - \sigma_y{}') + \lambda' (\sigma_x{}^\circ - \sigma^\circ) \quad (x\,y\,z)$$

$$\lambda^\circ = [(\varepsilon_x{}^\circ - \varepsilon_y{}^\circ)^2 + (\varepsilon_y{}^\circ - \varepsilon_z{}^\circ)^2 + (\varepsilon_z{}^\circ - \varepsilon_x{}^\circ)^2]^{1/2} \tag{2.8}$$

$$\lambda' = \frac{3}{\lambda^\circ} (\varepsilon_x{}^\circ \varepsilon_x{}' + \varepsilon_y{}^\circ \varepsilon_y{}' + \varepsilon_z{}^\circ \varepsilon_z{}')$$

Из (2.8) следует

$$\sigma_x{}' = \sigma' + \frac{\varepsilon_x{}'}{\lambda^\circ} - \frac{\lambda'}{\lambda^\circ} (\sigma_x{}^\circ - \sigma^\circ) \quad (x\,y\,z) \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в уравнение (1.16), переходя к компонентам скорости перемещения, получим

$$2\lambda \frac{\partial \sigma'}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{3\,(\sigma_x{}^\circ - \sigma^\circ)}{\lambda^\circ} \left(\varepsilon_x{}^\circ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon_y{}^\circ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \right. \tag{2.10}$$

$$\left. + \varepsilon_z{}^\circ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (x\,y\,z)$$

К уравнениям (2.10) следует присоединить условие несжимаемости

$$\varepsilon_x{}' + \varepsilon_y{}' + \varepsilon_z{}' = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.11}$$

Четыре уравнения (2.10), (2.11) образуют замкнутую систему относительно четырех неизвестных: σ', u, v, w. Рассмотрим условие пластичности

$$a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3 = 1, \quad a + b + c = 0 \quad (a, b, c = \text{const}) \tag{2.12}$$

Линеаризируя соотношение (2.12), получим

$$a\sigma_1{}' + b\sigma_2{}' + c\sigma_3{}' = 0, \qquad a\sigma_x{}' + b\sigma_y{}' + c\sigma_z{}' = 0 \tag{2.13}$$

Согласно ассоциированному закону пластического течения

$$\varepsilon_x{}^\circ = \lambda^\circ a, \quad \varepsilon_y{}^\circ = \lambda^\circ b, \quad \varepsilon_z{}^\circ = \lambda^\circ c \tag{2.14}$$

$$\varepsilon_x{}' = \lambda' a, \quad \varepsilon_y{}' = \lambda' b, \quad \varepsilon_z{}' = \lambda' c$$

Из (2.14) следует

$$b\varepsilon_x{}' - a\varepsilon_y{}' = 0, \quad c\varepsilon_y{}' - b\varepsilon_z{}' = 0, \quad a\varepsilon_z{}' - c\varepsilon_x{}' = 0 \tag{2.15}$$

Уравнениям (2.15) удовлетворим, полагая

$$u = a\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}, \quad v = b\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}, \quad w = c\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \tag{2.16}$$

Отметим, что, согласно (2.16), уравнение несжимаемости тождественно удовлетворяется.

Согласно (1.10), (2.16), перепишем уравнения (1.15) в виде

$$2\frac{\partial\sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left[a_{xy}\left(a\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + b\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right) + a_{xz}\left(a\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + c\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)\right] = 0 \tag{2.17}$$

$(x\,y\,z)\,(a\,b\,c)$

К трем уравнениям (2.17) следует присоединить уравнение (2.13). Четыре уравнения (2.17), (2.13) относительно четырех неизвестных σ_x', σ_y', σ_z'; Φ образуют замкнутую систему.

Для грани условие пластичности Треска (грани AF на фигуре):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 1, \quad \sigma_2 \le \sigma_3 \le \sigma_1 \tag{2.18}$$

В соотношениях (2.17) следует положить $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$. Линеаризированное условие пластичности будет иметь вид $\sigma_x' - \sigma_y' = 0$.

Для грани условие максимального приведенного напряжения (грань A_1F_1 на фигуре) $\sigma_1 - \sigma = 1$.

В соотношениях (2.17) следует положить $a = {}^2/_3$, $b = c = -{}^1/_3$. Линеаризированное условие пластичности будет иметь вид $2\sigma_x' - \sigma_y' - \sigma_z' = 0$.

3. При рассмотрении кусочно-гладких поверхностей текучести ограничимся случаем пересечения двух плоскостей

$$a_1\sigma_1 + b_1\sigma_2 + c_1\sigma_3 = 1, \quad a_2\sigma_1 + b_2\sigma_2 + c_2\sigma_3 = 1$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0, \quad a_2 + b_2 + c_2 = 0 \tag{3.1}$$

Из (3.1) следует

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k_3, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 2k_1, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = 2k_2$$

$$k_1 = \frac{1}{2m}(a_2 - a_1), \quad k_2 = \frac{1}{2m}(b_2 - b_1), \quad k_3 = \frac{1}{2m}(c_2 - c_1) \tag{3.2}$$

$$m = a_1c_2 - a_2c_1, \quad k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

Линеаризируя соотношения (3.2), получим

$$\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma_3' = \sigma', \ \sigma_x' = \sigma_y' = \sigma_z' = \sigma' \tag{3.3}$$

Согласно ассоциированному закону из (3.1), следует условие несжимаемости (2.11). Подставляя в уравнение (1.16) соотношения (3.3), присоединяя условие несжимаемости (2.11), получим замкнутую систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных σ', u, v, w.

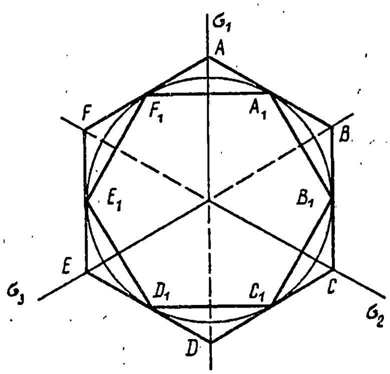
В случае ребра призмы максимального приведенного напряжения (ребро A_1 на фигуре) будем иметь

$$\sigma_1 - \sigma = 1, \quad \sigma - \sigma_3 = 1 \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует $\sigma = \sigma_2$; соотношения (3.4) имеют место из (3.1) при $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $c_1 = 0$; $a_2 = 0$; $b_2 = 1$, $c_2 = -1$. Согласно (1.10), (3.4) получим

$$a_{xy} = \frac{1}{\varepsilon_x^\circ - \varepsilon_y^\circ}, \quad a_{yz} = \frac{1}{\varepsilon_y^\circ - \varepsilon_z^\circ}, \quad a_{xz} = \frac{2}{\varepsilon_x^\circ - \varepsilon_z^\circ} \tag{3.5}$$

Согласно (3.4), (2.6), выражение для диссипации примет вид $D = \sigma_i^\circ\varepsilon_i^\circ = \varepsilon_x^\circ - \varepsilon_z^\circ \ge 0$. В частности, при $\varepsilon_y^\circ = 0$, $a_{xy} = a_{yz} = a_{zx} = 1/\varepsilon_x^\circ$.



В случае ребра призмы максимального касательного напряжения — призма Треска (ребро A на фигуре):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 1, \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 1 \tag{3.6}$$

Из (1.10) $a_{yz} = 0$, следовательно

$$\tau_{yz}' = 0 \tag{3.7}$$

Уравнения равновесия (1.15), согласно (3.3), (3.7), примут вид

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma'}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}'}{\partial x} = 0 \tag{3.8}$$

Полагая

$$\sigma' = -\partial U/\partial x, \quad \tau_{xy}' = \partial U/\partial y, \quad \tau_{yz}' = \partial U/\partial z \tag{3.9}$$

из (3.8) найдем

$$\partial^2 U/\partial x^2 - \partial^2 U/\partial y^2 - \partial^2 U/\partial z^2 = 0 \tag{3.10}$$

В рассматриваемом случае пластическое течение может быть определено из соотношений изотропии [1]:

$$\sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3 = \sigma_1 l_1 \quad (x\, y\, z) \tag{3.11}$$

$$\varepsilon_x l_1 + \varepsilon_{xy} l_2 + \varepsilon_{xz} l_3 = \varepsilon_1 l_1 \quad (1, 2, 3)$$

Отсюда при $l_1^\circ = 1$, $l_2^\circ = l_3^\circ = 0$ получаем, учитывая (3.6):

$$\varepsilon_{xy}' = (\varepsilon_1^\circ - \varepsilon_2^\circ)\, \tau_{xy}, \quad \varepsilon_{xz}' = (\varepsilon_1^\circ - \varepsilon_3^\circ)\, \tau_{xz}' \tag{3.12}$$

Переходя в (3.12) к компонентам скорости перемещений, учитывая (3.9), будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\,(\varepsilon_x^\circ - \varepsilon_y^\circ)\, \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2\,(\varepsilon_x^\circ - \varepsilon_z^\circ)\, \frac{\partial U}{\partial z} \tag{3.13}$$

Если положить $\varepsilon_y^\circ = \varepsilon_z^\circ = -\varepsilon_x^\circ/2$, то соотношениям (3.13) можно удовлетворить, полагая

$$u = -\partial W/\partial x + 3\varepsilon_x^\circ U, \quad v = \partial W/\partial y, \quad w = \partial W/\partial z \tag{3.14}$$

Подставляя соотношения (3.14) в уравнение несжимаемости (2.11), принимая во внимание (3.9), получим

$$\partial^2 W/\partial x^2 - \partial^2 W/\partial y^2 - \partial^2 W/\partial z^2 = 3\varepsilon_x^\circ \sigma' \tag{3.15}$$

При $\varepsilon_x^\circ = 0$ правая часть уравнения (3.15) обращается в нуль, этот случай рассмотрен в [2].

4. Рассмотрим обобщения на случай анизотропии. Предположим, что для элемента тела в фиксированной системе координат xyz по любому направлению, определяемому направляющими косинусами l_1, l_2, l_3, определен предел текучести на растяжение $k(\sigma, l_1, l_2, l_3)$ и предел текучести на сжатие $s(\sigma, l_1, l_2, l_3)$. Для простоты положим $k = s$.

Существуют три основных случая достижения элементом тела предельного состояния:

а) пластическое состояние определяется значением предела текучести по одному направлению

$$\sigma_1 - \sigma_2 = k(\sigma, l_1, l_2, l_3), \quad \sigma_2 = \sigma_3 \tag{4.1}$$

б) пластическое состояние определяется значениями предела текучести по двум направлениям

$$\sigma_1 - \sigma_2 = k(\sigma, l_1, l_2, l_3), \quad \sigma_2 - \sigma_3 = k(\sigma, m_1, m_2, m_3) \tag{4.2}$$

в) пластическое состояние определяется значениями предела текучести по трем направлениям

$$\left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{k(\sigma, l_1, l_2, l_3)}\right]^2 + \left[\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{k(\sigma, m_1, m_2, m_3)}\right]^2 + \left[\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{k(\sigma, n_1, n_2, n_3)}\right] = 1 \tag{4.3}$$

Подставляя соотношения (4.1) в (1.1), получим

$$\sigma_x = \sigma + k(-1/3 + l_1^2), \quad \tau_{xy} = k l_1 l_2 \quad (x\,y\,z)\,(1\,2\,3) \tag{4.4}$$

Линеаризируя (4.4), получим

$$\sigma_x' = \sigma' + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial k^\circ}{\partial \sigma}\sigma' + \frac{\partial k^\circ}{\partial l_2} l_2' + \frac{\partial k^\circ}{\partial l_3} l_3'\right), \quad \tau_{xy}' = k^\circ l_2' \tag{4.5}$$

$$\sigma_y' = \sigma_z' = \sigma' - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial k^\circ}{\partial \sigma} + \frac{\partial k^\circ}{\partial l_2} l_2' + \frac{\partial k^\circ}{\partial l_3} l_3'\right), \quad \tau_{xz}' = k^\circ l_3', \quad \tau_{yz}' = 0$$

$$(x\,y\,z)\,(1, 2, 3)$$

где градус означает, что производные взяты при значениях $\sigma = \sigma^\circ$, $l_1^\circ = 1$, $l_2^\circ = l_3^\circ = 0$

Соотношения (4.5) перепишем в виде

$$\sigma_x' = (1 + 2A)\sigma' + 2B\tau_{xy}' + 2C\tau_{xz}', \quad \tau_{yz}' = 0 \tag{4.6}$$

$$\sigma_y' = \sigma_z' = (1 - A)\sigma' - B\tau_{xy}' - C\tau_{xz}' \tag{4.7}$$

$$A = 3\partial k^\circ/\partial\sigma, \quad B = 3\partial k^\circ/\partial l_2, \quad C = 3\partial k^\circ/\partial l_3$$

Полагая

$$\tau_{xy}' = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{xz}' = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \sigma' = \frac{1}{1 - A}\left[B\frac{\partial U}{\partial y} + C\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x}\right] \tag{4.8}$$

из уравнений равновесия (1.15) получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \varkappa\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B(2 + \varkappa)\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C(2 + \varkappa)\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 0 \tag{4.9}$$

$$\varkappa = (1 + 2A)/(1 - A)$$

Случай, когда условие пластичности не зависит от среднего давления ($A = 0$, $\varkappa = 1$), рассмотрен в [3].

Аналогично определяются уравнения для других случаев анизотропии.

Отметим, что для линеаризированных соотношений в случае (4.1) анизотропия характеризуется, вообще говоря, тремя константами: $\partial k^\circ / \partial l_i$; для (4.2) — шестью константами: к предыдущим трем добавляются $\partial k^\circ / \partial m_i$; для зависимости (4.3) — девятью константами, к шести предыдущим добавляются $\partial k^\circ / \partial n_i$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д. Д.* О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях//Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. № 3.
2. *Ивлев Д. Д.* Об уравнениях линеаризированных пространственных задач теории идеальной пластичности//Докл. АН СССР. 1960. Т. 130, № 6.
3. *Ивлев Д. Д., Шитова Л. Б.* Линеаризированные уравнения теории анизотропного идеального жёсткопластического тела//Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложения. Межвуз. сб. Чуваш. госуниверситет. Чебоксары, 1988.

Чебоксары

Поступила в редакцию 26.V.1991