

УДК 534.112

© 1993 г. Л. Д. АКУЛЕНКО, С. В. НЕСТЕРОВ

## НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

В одномодовом приближении исследуются квазилинейные колебания однородной струны, зашпеленной на обоих концах. В отличие от классической линейной теории предполагается, что длина струны изменяется при поперечных смещениях ее элементов, а натяжение переменнo. Построена приближенная конечномерная колебательная система типа квазилинейного осциллятора с малой кубической нелинейностью. При помощи метода усреднения проведен полный анализ эволюции движений. Установлен качественный эффект неустойчивости плоских колебаний.

1. Исходные предположения и построение модели. Исследуются поперечные колебания тонкой симметричной однородной струны с учетом изменения ее длины, обусловленным продольным растяжением. Предположим, что струна натянута вдоль оси  $X$  и зашпелена в точках  $x = 0, l$ . Поперечные колебания могут происходить в двух взаимно перпендикулярных плоскостях  $XU$  и  $XZ$  (см. фиг. 1).

В предположениях классической линейной теории эти колебания независимы, а натяжение струны остается постоянным.

Представляет интерес в теоретическом и прикладном аспектах изучить влияние того факта, что натяжение струны зависит от ее деформаций и приводит к взаимосвязи колебаний в указанных плоскостях. Главная цель работы заключается в исследовании свободных одномодовых колебаний струны с учетом продольного растяжения в квазилинейной трактовке. В дальнейшем на его основе предполагается рассмотреть вынужденные колебания и построить амплитудно-частотные характеристики квазилинейной системы. Отметим, что ранее были исследованы [1, 2] стационарные вынужденные колебания струны с учетом изменения продольного натяжения при ее деформациях.

Обозначим через  $u = u(x, t)$  смещение точек струны с эйлеровой координатой  $x$  в вертикальной плоскости  $XU$ , а через  $v = v(x, t)$  — смещение в горизонтальной плоскости  $XZ$  (фиг. 1). Далее, введем величины:  $T$  — натяжение струны в положении равновесия, когда точки струны находятся по оси  $X$ ;  $E$  — модуль Юнга упругости материала,  $S$  — площадь поперечного сечения струны,  $\rho$  — ее линейная плотность ( $\rho = \rho_v S$ , где  $\rho_v$  — объемная плотность). Вычислим удлинение бесконечно малого элемента  $dx$  струны при его ортогональных смещениях  $u, v$  от положения равновесия. С точностью до более высоких порядков относительно  $dx$  для растянутого элемента имеем выражение

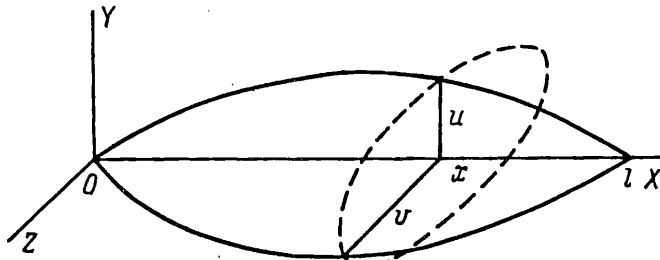
$$ds^2 = (1 + h^2) dx^2, \quad h^2 = u'^2 + v'^2 \quad (1.1)$$

Здесь  $u', v'$  — производные  $u$  и  $v$  по  $x$ ,  $x \in [0, l]$ . Из (1.1) в предположении малости  $h^2$  находим удлинение  $d\Delta$ :

$$d\Delta \equiv ds - dx = \lambda dx, \quad \lambda = 1/2 h^2 - 1/8 h^4 + \dots \quad (1.2)$$

Обычно ограничиваются первым слагаемым в выражении (1.2) для  $\lambda$ . Учитывая представление (1.2) для удлинения  $d\Delta$ , можно вычислить полное локальное натяжение струны  $T^*$ :

$$T^* = T + ES d\Delta/dx = T + ES\lambda \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Элементарная работа  $dA$ , производимая при растяжении струны, вычисляется следующим образом [3]:

$$dA = dA_T + dA_E, \quad dA_T = -T\lambda dx, \quad dA_E = -\frac{1}{2}ES\lambda^2 dx \quad (1.4)$$

В результате для  $dA$  получаем приближенное выражение

$$dA = -[\frac{1}{2}Th^2 + \frac{1}{8}Nh^4 + \dots] dx, \quad N = ES - T \quad (1.5)$$

Для определенности полагаем  $N \neq 0$ . Полная потенциальная энергия  $U$  растяжимой струны, обусловленная поперечными смещениями ее элементов, имеет следующий вид:

$$U = -\int_0^l dA = \int_0^l \left( T \frac{h^2}{2} + N \frac{h^4}{8} + \dots \right) dx \quad (1.6)$$

Далее ограничимся членами  $h^4$  и будем отбрасывать члены  $O(h^6)$ . Выпишем теперь выражение для кинетической энергии  $K$  поперечных перемещений элементов стержня

$$K = \frac{\rho}{2} \int_0^l (u^2 + v^2) dx \quad (1.7)$$

Здесь точками обозначены производные по времени  $t$ . Чтобы не загромождать дальнейшие построения, будем считать параметры  $T$ ,  $ES$ ,  $\rho$ ,  $l$  постоянными.

Уравнения движения струны можно получить из вариационного принципа Лагранжа

$$\delta \int_0^t L dt = 0, \quad L = K - U \quad (1.8)$$

При этом полагаем, что концы струны  $x=0$ ,  $l$  зашпелены, т. е. для всех  $t \geq 0$  выполняются краевые условия

$$u(0, t) = v(0, t) = u(l, t) = v(l, t) \equiv 0 \quad (1.9)$$

В результате [4] получим систему нелинейных уравнений в частных производных

$$\rho u'' = (T + \frac{1}{2}Nh^2) u'' + N(u'u'' + v'v') u' \quad (1.10)$$

$$\rho v'' = (T + \frac{1}{2}Nh^2) v'' + N(u'u'' + v'v') v'$$

с краевыми условиями (1.9) и заданными начальными распределениями смещений и скоростей

$$u(x, 0) = f_u(x), \quad v(x, 0) = f_v(x) \quad (1.11)$$

$$u'(x, 0) = g_u(x), \quad v'(x, 0) = g_v(x)$$

Исследование решения задачи (1.9)—(1.11) в полном объеме не представляется возможным. Следуя [1—3], рассмотрим модель одномодового приближения нелинейных колебаний струны, предполагая нелинейности в (1.10) малыми.

**2. Построение модели одномодового приближения и постановка задачи о нелинейных колебаниях струны.** Справедливость такого приближения для малых деформаций и конечного интервала времени оправдывается теоретически методами возмущений и экспериментальными наблюдениями. Существо подхода заключается в том, что искомые функции  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  представляются в виде

$$u = a_n(t) \sin(\pi n l^{-1} x), \quad v = b_n(t) \sin(\pi n l^{-1} x) \quad (2.1)$$

где  $n$  — фиксированное небольшое натуральное число  $n = 1, 2, \dots$  (обычно  $n = 1$ ),  $a_n, b_n$  — неизвестные, подлежащие определению. Подставляя выражения (2.1) в (1.6), (1.7) и интегрируя по  $x$ , получим для функции Лагранжа  $L$  (1.8) представление

$$L = (\rho l/4) (a_n^2 + b_n^2) - (Tl/4) (\pi n/l)^2 (a_n^2 + b_n^2) - (3/64) N (\pi n/l)^4 (a_n^2 + b_n^2)^2 \quad (2.2)$$

Коэффициенты  $a_n, b_n$  имеют смысл фазовых переменных некоторой нелинейной консервативной системы типа «плоского осциллятора» [5]. Из (1.8), (2.2) следуют уравнения движения в форме Лагранжа

$$\begin{aligned} a_n'' + \omega_n^2 a_n + \gamma_n (a_n^2 + b_n^2) a_n &= 0, & a_n(0) &= a_n^0, & a_n'(0) &= a_n^{0'} \\ b_n'' + \omega_n^2 b_n + \gamma_n (a_n^2 + b_n^2) b_n &= 0, & b_n(0) &= b_n^0, & b_n'(0) &= b_n^{0'} \\ \omega_n^2 &= (\pi n/l)^2 T/\rho, & \gamma_n &= (3/8) (\pi n/l)^4 N/\rho \end{aligned} \quad (2.3)$$

с соответствующими (1.11) начальными условиями. При этом полагаем, что формы начальных распределений  $f_{u,v}(x)$ ,  $g_{u,v}(x)$  близки  $\sin(\pi n l^{-1} x)$ , например  $f_u(x) = a_n^0 \sin(\pi n l^{-1} x)$ ; и аналогично для других функций. В итоге получим начальные условия (2.3). Поскольку число  $n$  фиксировано, то далее в уравнениях (2.3) индекс  $n$  опускается для сокращения записи.

Отметим, что система (2.3) консервативна и обладает центральной симметрией. Для нее имеют место два интеграла движения

$$\begin{aligned} 1/2 (a_n^2 + b_n^2) + 1/2 \omega_n^2 (a_n^2 + b_n^2) + (\gamma_n/4) (a_n^2 + b_n^2)^2 &= D \\ a_n^0 b_n - b_n^0 a_n &= M \end{aligned} \quad (2.4)$$

Первый интеграл (2.4) имеет смысл полной энергии колебаний осциллятора, а второй — момента импульса («интеграла площадей»). Исключая  $a_n$  или  $b_n$  при помощи соотношений (2.4) соответственно из второго или первого уравнения (2.3), получим автономное уравнение вида  $a'' + A(a, a', D, M) = 0$ , которое содержит два параметра  $D, M$  и два начальных условия для  $a, a'$ . Это уравнение, вообще говоря, может быть исследовано методами фазовой плоскости. Однако такой путь не представляется конструктивным, поскольку построение и анализ свойств функции  $A$  сопряжены со значительными трудностями. Это обусловлено необходимостью решения алгебраического полного уравнения четвертой степени.

Предлагается подход, связанный с асимптотическим анализом системы (2.3). Изложенный выше прием построения уравнений (2.3) предполагает малость амплитуды колебаний. Для формализации этого допущения введем безразмерные переменные, параметры и малый числовой параметр  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} y'' + y + \varepsilon \gamma (y^2 + z^2) y &= 0, & y(0) &= y^0, & y'(0) &= y^{0'} \\ z'' + z + \varepsilon \gamma (y^2 + z^2) z &= 0, & z(0) &= z^0, & z'(0) &= z^{0'} \end{aligned}$$

$$a = \sqrt{\varepsilon} ly, \quad b = \sqrt{\varepsilon} lz, \quad \theta = \omega_n t, \quad \gamma = \gamma_n (l\omega_n)^{-2} \quad (2.5)$$

Здесь точки означают производные по безразмерному времени  $\theta$ ; замены (2.5) предполагают, что  $a/l \sim \sqrt{\varepsilon}$ ,  $b/l \sim \sqrt{\varepsilon}$ . Начальные условия в (2.5) соответствующим образом пересчитываются из (2.3), например  $y^0 = a_n^0 / (l\sqrt{\varepsilon})$ ,  $y^{\circ} = a^{\circ} / (l\omega_n \sqrt{\varepsilon})$ ; аналогично для  $z^0$ ,  $z^{\circ}$ . В результате построена квазилинейная колебательная система со слабой связью, которую можно трактовать как квазилинейный плоский осциллятор с малой кубической нелинейностью [5]. Отметим, что отброшенные ранее слагаемые при таком подходе приведут к членам  $O(\varepsilon^2)$  в системе (2.5).

Ставится задача приближенного исследования колебаний системы (2.5) на асимптотически большом интервале изменения аргумента  $\theta$ ,  $\theta \sim 1/\varepsilon$ , при котором возможна существенная перестройка картины колебаний.

3. Построение решения в первом приближении по малому параметру. К возмущенной одночастотной системе (2.5) применим обычную процедуру метода усреднения [5, 6]. Переход к стандартной по Боголюбову системе осуществляется заменой

$$y = A \cos(\theta + \varphi), \quad y' = -A \sin(\theta + \varphi) \quad (3.1)$$

$$z = B \cos(\theta + \psi), \quad z' = -B \sin(\theta + \psi)$$

Здесь  $A, B$  — медленные переменные, имеющие смысл амплитуд парциальных колебаний, а  $\varphi, \psi$  — соответствующие медленно изменяющиеся фазовые добавки. Неизвестные  $A, B$  и  $\varphi, \psi$  определяются как решения стандартной системы, которая получается дифференцированием замены (3.1) в силу возмущенной системы (2.5). После усреднения по явно входящему аргументу  $\theta$  для неизвестных функций  $A, B$  и  $\varphi, \psi$  получаем в первом приближении по  $\varepsilon$  систему

$$A' = -AB^2 \sin 2\delta, \quad B' = A^2 B \sin 2\delta \quad (3.2)$$

$$\varphi' = 3A^2 + 2B^2 + B^2 \cos 2\delta, \quad \psi' = 2A^2 + A^2 \cos 2\delta + 3B^2$$

$$(\prime) \equiv (d/d\sigma), \quad \sigma = \varepsilon\gamma\theta/8 \sim 1, \quad \delta = \varphi - \psi$$

Здесь штрихом обозначены производные по медленному аргументу  $\sigma$ ,  $\sigma \sim 1$ . Начальные значения при  $\sigma = 0$  переменных  $A, B$  и  $\varphi, \psi$  в (3.2) определяются по формулам (3.1) с учетом выражений (2.5) для исходных переменных  $y, z, y', z'$  при  $\theta = 0$ . Система (3.2) допускает полное интегрирование в элементарных функциях. Действительно, с очевидностью следует первый интеграл

$$A^2 + B^2 = c^2 (=2D) \quad (A, B \geq 0) \quad (3.3)$$

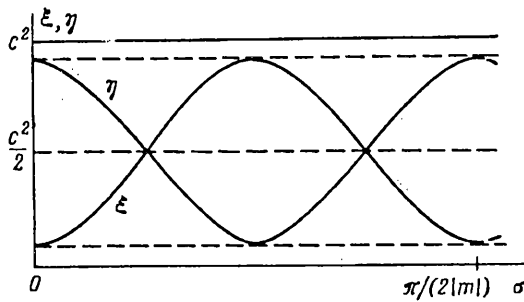
отвечающий интегралу энергии  $D$  в (2.4). Интеграл момента импульса («интеграл площадей») согласно (2.4) имеет вид

$$AB \sin \delta = m \quad (= -M) \quad (3.4)$$

Для медленной переменной  $\delta$ , определяющей разность фаз парциальных колебаний, из (3.2), (3.3) следует уравнение

$$\delta' = 2(A^2 - B^2) \sin^2 \delta, \quad \delta(0) = \delta^0 \quad (3.5)$$

Согласно (3.5), величина  $m = 0$ , если  $\delta^0 = 0$ , т. е. так как в этом случае происходят плоские колебания струны. Теперь при помощи интегралов (3.3), (3.4) из первых двух уравнений (3.2) можно определить в явном виде переменные  $A, B$  как функции  $\sigma$  и начальных значений. Приведем для определенности процедуру вычисления переменной  $\eta = B^2$ . Из второго уравнения (3.2) при



Фиг. 2

помощи (3.3), (3.4) посредством элементарных операций находим соотношение для определения неизвестной  $\eta$ :

$$\frac{1}{2}\eta^2 = 8m^2 [(c^2 - \eta)\eta - m^2] \equiv 8m^2 [d^2 - (\eta - c^2/2)^2] \quad (3.6)$$

Оценим величину  $d^2 = c^4/4 - m^2$ ; согласно (3.3), (3.4) находим  $d^2 \geq (A^2 - B^2)^2/4$ , причем равенство имеет место при  $\sin^2 \delta = 1$ . Таким образом, если  $A^2 \neq B^2$ , заведомо величина  $d^2 > 0$ . Из (3.6) следует, что переменная  $\eta > 0$  удовлетворяет уравнению гармонического осциллятора (в медленном «времени»  $\sigma$ ) с частотой  $4m$  и «амплитудой»  $d$ , который совершает колебания относительно смещенного положения равновесия  $c^2/2$

$$\eta = B^2 = c^2/2 + d \cos(4m\sigma + \mu), \quad B = \sqrt{\eta}, \quad \mu = \text{const} \quad (3.7)$$

Если колебания не плоские, т. е.  $m \neq 0$ , «амплитуда»  $d < c^2/2$ ; поэтому из (3.7) следует, что исходная амплитуда парциальных колебаний  $B > 0$  для всех  $\theta \sim 1/\varepsilon$ . Фазовая постоянная  $\mu$  определяется через начальные данные (2.5). При помощи интеграла (3.3) находим другую амплитуду парциальных колебаний  $A$ ; для  $\xi = A^2$  имеем

$$\xi = c^2/2 - d \cos(4m\sigma + \mu), \quad A = \sqrt{\xi} \quad (3.8)$$

Согласно (3.7), (3.8) амплитуды парциальных колебаний изменяются периодическим образом по  $\sigma$  (в противофазе) таким образом, что  $A^2 + B^2 = c^2$ ; при этом экстремальные значения равны (см. фиг. 2) ( $\mu = 0$ ):

$$A_{\max}, B_{\max} = [c^2/2 + (c^4/4 - m^2)^{1/2}]^{1/2} \quad (3.9)$$

$$A_{\min}, B_{\min} = [c^2/2 - (c^4/4 - m^2)^{1/2}]^{1/2}$$

Итак, переменные  $A, B$  полностью определены как функции медленного аргумента  $\sigma$  и начальных данных согласно (3.7), (3.8):  $B = \sqrt{\eta}$ ,  $A = \sqrt{\xi}$ . При помощи интеграла (3.4) находим значения разности фаз  $\delta$  парциальных колебаний в виде соотношения

$$\sin \delta = m (\xi\eta)^{-1/2}, \quad m^2 (\xi\eta)^{-1} \leq 1 \quad (3.10)$$

Фазовые добавки  $\varphi, \psi$  определяются квадратурами по  $\sigma$  из уравнений (3.2), которые при помощи выражений (3.7), (3.8), (3.10) сводятся к следующим:

$$\varphi' = 3\xi + 2\eta + \eta(1 - 2m^2/(\xi\eta)) \quad (3.11)$$

$$\psi' = 2\xi + \xi(1 - 2m^2/(\xi\eta)) + 3\eta$$

Правые части (3.11) есть известные функции медленного аргумента  $\sigma$  и постоянных интегрирования. Начальные условия для  $\varphi, \psi$  вычисляются согласно (2.5), (3.1).

4. Анализ приближенного решения и выводы. В результате приближенное решение системы (2.5) построено с погрешностью  $O(\epsilon)$  на асимптотически большом интервале аргумента  $\theta$ ,  $\theta \sim 1/\epsilon$ . За это время струна совершает порядка  $1/\epsilon$  колебаний малой амплитуды  $O(\sqrt{\epsilon})$  в соответствии с выражениями (2.1), (3.1), (3.7), (3.8), (3.11). Медленные переменные  $A$ ,  $B$  и  $\varphi$ ,  $\psi$  при этом совершают эволюции на величины порядка единицы. Таким образом, учет изменения натяжения струны, обусловленного деформациями растяжения, приводит в общем случае к взаимосвязи колебаний в двух плоскостях  $XU$  и  $XZ$ . Наблюдаемая картина колебаний имеет характер биений.

Обратим внимание на выражения (3.7), (3.8). Из них следует, что плоские колебания неустойчивы. Это означает, что за время  $t \sim (\epsilon |m| \omega \gamma)^{-1}$  амплитуда колебаний в любой из плоскостей согласно (3.7) — (3.9) станет величиной порядка единицы, сколь бы ни малой она была в начальный момент времени. Конечно, при этом предполагается, что  $m \neq 0$  и, кроме того,  $|m| \gg \epsilon$ . На фиг. 2 представлены случаи  $|m| \ll 1$  и предельный случай  $m = 0$ , для которого  $\eta \equiv c^2$ ,  $\xi \equiv 0$ . Колебания струны из плоскополяризованных, например в горизонтальной плоскости  $XZ$  (фиг. 1), с течением времени становятся эллиптически поляризованными и при  $\epsilon = \pi/(8|m|)$  приобретают круговую поляризацию. Далее круг деформируется в эллипс и они становятся вновь практически плоско поляризованными, при  $\epsilon = \pi/(4|m|)$ , однако плоскость колебаний повернута на  $\pi/2$ , т. е. является плоскостью  $XU$  (вертикальные колебания).

Затем вновь эволюция амплитуд парциальных колебаний приводит к круговой поляризации, а затем картина колебаний струны возвращается при  $\epsilon = \pi/(2|m|)$  к исходной, отвечающей случаю плоскополяризованной в горизонтальной плоскости стоячей волны. Далее медленная эволюция картины колебаний струны повторяется с периодом  $\pi/(2|m|)$ . Таким образом, точки струны, участвуя во взаимно-перпендикулярных движениях, описывают замкнутую кривую, близкую к эллипсу или окружности, размеры которых  $O(\sqrt{\epsilon})$ ,  $\epsilon \ll 1$ . Отметим, что на практике для металлических (стальных) струн обычно выполняется условие  $ES \gg T$  ( $ES/T \sim 10^3$ ); поэтому амплитуда колебаний предполагается достаточно малой. Так, если  $\gamma \gg 1$ , то имеет смысл в (2.5) положить  $a = \epsilon y$ ,  $b = \epsilon z$ ,  $\gamma = \epsilon \gamma_p / (\omega_p)^2$ ; уравнения движения сохраняют приведенный вид.

Эффект эволюции плоскости колебаний струны легко наблюдать на опыте, если начальные условия задаются «щипком». Как бы аккуратно не производить начальное возмущение, через некоторое время видно, что точки струны начинают совершать также и вращательные движения в плоскости, перпендикулярной невозмущенной струне.

Хотя колебания струны в первом приближении в обеих плоскостях происходят с одинаковой частотой, однако принципиально представляется возможным наблюдать биения, о которых говорилось выше. Для этого нужно использовать узконаправленный микрофон, реагирующий на звуковое поле, интенсивность которого будет изменяться в зависимости от мгновенного положения плоскости колебаний струны относительно микрофона, а также соответствующую усилительную и регистрирующую аппаратуру.

При возбуждении основной моды  $n = 1$  мод более высокого порядка практически не наблюдается. Это позволяет считать, что одномодовое приближение достаточно полно описывает колебательный процесс.

В том случае, если возбуждаются моды более высокого порядка  $n = 2, 3, \dots$ , то за счет нелинейного взаимодействия происходит обмен энергией между модами различных порядков. Принятое одномодовое приближение оказывается несостоятельным, так как оно не дает возможности описать взаимодействие между модами различных порядков. Проблема анализа многочастотных нелинейных колебаний струны остается открытой.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Oplinger D. W. Frequency response of nonlinear stretched string // JASA. 1960. V. 32. No. 12. P. 1529—1538.
2. Srinivasa Murthy G. S., Ramakrishna B. S. Nonlinear character of resonance in stretched strings // JASA. 1965. V. 38. No. 3. P. 461—471.
3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
4. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 1961. 228 с.
5. Акуленко Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 366 с.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.