

УДК 531.384

© 1993 г. А. П. МАРКЕЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ
 ДВУХ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ШАРОВ,
 ДВИЖУЩИХСЯ БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ
 В НЕПОДВИЖНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Рассматривается задача о движении двух шаров внутри неподвижной сферической полости. Один из шаров вращается вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром полости, а второй движется соприкасаясь с поверхностями первого шара и полости. Скольжение отсутствует. Получены дифференциальные уравнения движения и исследована устойчивость в первом приближении вращения шаров вокруг их линии центров с постоянными угловыми скоростями.

1. Постановка задачи и ее кинематическое описание. Пусть в неподвижной сферической полости S_0 радиуса $R_1 + 2R_2$ движутся два шара S_1 и S_2 . Первый шар имеет радиус R_1 , вообще говоря, неоднороден и движется вокруг своего неподвижного центра O_1 , совпадающего с центром полости S_0 ; главные моменты инерции A, B, C шара для точки O_1 произвольны. Второй шар имеет радиус R_2 , однороден, обладает массой m и движется в сферическом слое между поверхностями S_0 и S_1 ; в точках касания S_2 с S_0 и S_1 скольжение отсутствует. Внешним силовым полем пренебрегаем.

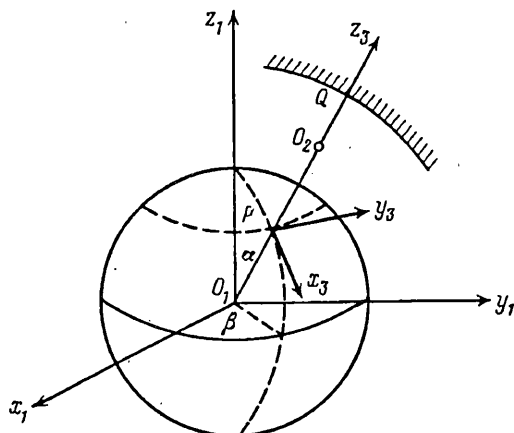
Цель работы состоит в выводе уравнений движения описанной механической системы и в исследовании устойчивости ее частного движения, когда шары вращаются с постоянными угловыми скоростями вокруг их линии центров.

Примем центр O_1 полости S_0 за начало двух декартовых прямоугольных систем координат: неподвижной $O_1x_0y_0z_0$ и подвижной $O_1x_1y_1z_1$, оси которой направлены вдоль главных осей инерции шара S_1 для точки O_1 . Взаимная ориентация трехгранников $O_1x_1y_1z_1$ и $O_1x_0y_0z_0$ определяется углами Эйлера $\psi_1, \theta_1, \varphi_1$. Проекция $\omega_{10}, \omega_{10}^y, \omega_{10}^z$ угловой скорости ω_{10} шара S_1 на жестко связанные с ним оси O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 задаются кинематическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} \omega_{10}^x &= \dot{\psi}_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1 + \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1, & \omega_{10}^y &= \dot{\psi}_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1 - \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1, \\ \omega_{10}^z &= \dot{\psi}_1 \cos \theta_1 + \dot{\varphi}_1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Пусть O_2 — центр шара S_2 , а P и Q — точки его касания с S_1 и S_0 . Положение точки P на поверхности шара S_1 зададим сферическими координатами α и β (фигура). Введем подвижную систему координат $Px_3y_3z_3$. Ее оси Px_3 и Py_3 — касательные к меридиану и параллели соответственно, проведенным на поверхности S_1 через точку P , ось Pz_3 проходит через центры шаров S_1 и S_2 . Ориентация трехгранника $Px_3y_3z_3$ относительно трехгранника $O_1x_1y_1z_1$ определяется таблицей направляющих косинусов

	x_3	y_3	z_3	
x_1	$\cos \alpha \cos \beta$	$-\sin \beta$	$\sin \alpha \cos \beta$	(1.2)
y_1	$\cos \alpha \sin \beta$	$\cos \beta$	$\sin \alpha \sin \beta$	
z_1	$-\sin \alpha$	0	$\cos \alpha$	



Фигура

Угловая скорость ω_{31} вращения трехгранника $Px_3y_3z_3$, относительно $O_1x_1y_1z_1$ задается в системе координат $Px_3y_3z_3$ такими компонентами

$$\omega_{31}^x = -\dot{\beta} \sin \alpha, \quad \omega_{31}^y = \dot{\alpha}, \quad \omega_{31}^z = \dot{\beta} \cos \alpha \quad (1.3)$$

Введем еще систему координат $O_2x_2y_2z_2$, образованную любыми тремя ортогональными, неподвижными относительно шара S_2 и проходящими через его центр осями. Пусть $\psi_2, \theta_2, \varphi_2$ — углы Эйлера, определяющие ориентацию системы координат $O_2x_2y_2z_2$ относительно $Px_3y_3z_3$, а ω_{23} — угловая скорость трехгранника $O_2x_2y_2z_2$ относительно $Px_3y_3z_3$. В системе координат $Px_3y_3z_3$ вектор ω_{23} имеет компоненты

$$\begin{aligned} \omega_{23}^x &= \dot{\theta}_2 \cos \psi_2 + \dot{\varphi}_2 \sin \psi_2 \sin \theta_2, & \omega_{23}^y &= \dot{\theta}_2 \sin \psi_2 - \dot{\varphi}_2 \cos \psi_2 \sin \theta_2, \\ \omega_{23}^z &= \dot{\psi}_2 + \dot{\varphi}_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Величины $\alpha, \beta, \psi_i, \theta_i, \varphi_i$ ($i = 1, 2$) примем в качестве обобщенных координат рассматриваемой механической системы. Условия отсутствия скольжения в точках P и Q касания шара S_2 с шаром S_1 и полостью S_0 приводят к некоторым ограничениям, наложенным на обобщенные координаты и скорости. Эти ограничения запишутся в виде четырех уравнений связей. Получим эти уравнения.

Условие отсутствия скольжения в точке P задается векторным равенством

$$\mathbf{v}' + \omega_{21} \times O_2P = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

в котором \mathbf{v}' и ω_{21} — скорость центра шара S_2 и его угловая скорость относительно шара S_1 . Так как в системе координат $O_1x_1y_1z_1$ $O_1O_2 = (R_1 + R_2)(\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha)$, то в ней

$$\mathbf{v}' = (R_1 + R_2)(\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta - \dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta, \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta + \dot{\beta} \sin \alpha \cos \beta, -\dot{\alpha} \sin \alpha) \quad (1.6)$$

А в системе координат $Px_3y_3z_3$:

$$\mathbf{v}' = (R_1 + R_2)(\dot{\alpha}, \dot{\beta} \sin \alpha, 0) \quad (1.7)$$

Для вектора ω_{21} имеем выражение

$$\omega_{21} = \omega_{23} + \omega_{31} \quad (1.8)$$

Его компоненты в системе координат $Px_3y_3z_3$ находятся из (1.3), (1.4):

$$\omega_{21} = (\omega_{23}^* - \dot{\beta} \sin \alpha, \omega_{23}^* + \dot{\alpha}, \omega_{23}^* + \dot{\beta} \cos \alpha) \quad (1.9)$$

Учитывая, что в системе координат $Px_3y_3z_3$ $O_2P = (0, 0, -R_2)$ находим, что третья компонента вектора — левой части равенства (1.5) — равна нулю, а приравнивание нулю первых двух компонент дает следующие два уравнения связей:

$$R_1 \dot{\alpha} - R_2 (\dot{\theta}_2 \sin \psi_2 - \dot{\phi}_2 \cos \psi_2 \sin \theta_2) = 0 \quad (1.10)$$

$$R_1 \sin \alpha \dot{\beta} + R_2 (\dot{\theta}_2 \cos \psi_2 + \dot{\phi}_2 \sin \psi_2 \sin \theta_2) = 0$$

Условие отсутствия скольжения в точке Q касания шара S_2 с полостью S_0 в векторной форме имеет вид

$$v + \omega_{20} \times O_2Q = 0 \quad (1.11)$$

где v и ω_{20} — абсолютная скорость центра шара S_2 и его абсолютная угловая скорость. Учитывая условие (1.5), соотношения

$$v = v' + \omega_{10} \times O_1O_2, \quad \omega_{20} = \omega_{21} + \omega_{10} \quad (1.12)$$

и очевидные равенства $O_1O_2 + O_2Q = O_1Q$, $O_2P = -O_2Q$, условие (1.11) можно записать в виде векторного равенства

$$2v' + \omega_{10} \times O_1Q = 0 \quad (1.13)$$

Скалярную форму этого условия удобно получить опять же в системе координат $Px_3y_3z_3$. Здесь $O_1Q = (0, 0, R_1 + 2R_2)$, а компоненты векторов v' и ω_{10} вычисляются согласно (1.7) и (1.1), (1.2). Проектирование обеих частей равенства (1.13) на оси трехгранника $Px_3y_3z_3$ дает еще два уравнения связей

$$2(R_1 + R_2) \dot{\alpha} - (R_1 + 2R_2) (\sin \beta \omega_{10}^* - \cos \beta \omega_{10}^*) = 0 \quad (1.14)$$

$$2(R_1 + R_2) \sin \alpha \dot{\beta} - (R_1 + 2R_2) (\cos \alpha \cos \beta \omega_{10}^* + \cos \alpha \sin \beta \omega_{10}^* - \sin \alpha \omega_{10}^*) = 0$$

2. Динамические уравнения. Пусть F_0 и F_1 — реакции, действующие на шар S_2 в точках Q и P соответственно. Из теоремы об изменении кинетического момента, примененной к шарам S_1 и S_2 , имеем два векторных уравнения

$$dK_{O_1}/dt = -O_1P \times F_1 \quad (2.1)$$

$$JdK_{O_2}/dt = O_2Q \times F_0 + O_2P \times F_1 \quad (2.2)$$

а применение теоремы о движении центра инерции к шару S_2 дает еще одно векторное уравнение

$$mdv/dt = F_0 + F_1 \quad (2.3)$$

В (2.1) K_{O_1} — кинетический момент шара S_1 относительно точки O_1 , а в (2.2) $J = \frac{2}{5}mR_2^2$ — момент инерции шара S_2 относительно его диаметра.

Учитывая что $O_2P = -O_2Q$, $R_1O_2Q = R_2O_1P$ и исключая при помощи (2.2), (2.3) реакцию F_1 из правой части уравнения (2.1), получаем уравнение

$$\frac{dK_{O_1}}{dt} = \frac{R_1}{2R_2} \left(J \frac{d\omega_{20}}{dt} - mO_2Q \times \frac{dv}{dt} \right) \quad (2.4)$$

При этом уравнение (2.2) запишется в виде

$$Jd\omega_{20}/dt = O_2Q \times (F_0 - F_1) \quad (2.5)$$

Перейдем в этом уравнении к дифференцированию по времени в системе

координат $Px_3y_3z_3$. Учтя, что абсолютная угловая скорость трехгранника $Px_3y_3z_3$ равна $\omega_{31} + \omega_{10}$, а

$$\omega_{20} = \omega_{23} + \omega_{31} + \omega_{10} \quad (2.6)$$

перепишем уравнение (2.5) в виде

$$\frac{d'\omega_{20}}{dt} + (\omega_{31} + \omega_{10}) \times \omega_{23} = \frac{1}{J} O_2Q \times (F_0 - F_1) \quad (2.7)$$

где символ d'/dt обозначает дифференцирование в системе координат $Px_3y_3z_3$.

Компоненты вектора ω_{20} в системе $Px_3y_3z_3$ вычисляются при помощи равенств (2.6), (1.3), (1.4) и выражений для компонент вектора ω_{10} , получаемых из (1.1), (1.2):

$$\begin{aligned} \omega_{13}^* &= \cos \alpha \cos \beta \omega_{10}^* + \cos \alpha \sin \beta \omega_{10}^y - \sin \alpha \omega_{10}^z \\ \omega_{10}^y &= -\sin \beta \omega_{10}^* + \cos \beta \omega_{10}^y \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\omega_{13}^z = \sin \alpha \cos \beta \omega_{10}^* + \sin \alpha \sin \beta \omega_{10}^y + \cos \alpha \omega_{10}^z$$

Спроектировав обе части векторного уравнения (2.7) на ось Pz_3 , получим скалярное уравнение, не содержащее реакций связей

$$\frac{d}{dt} (\beta \cos \alpha + \omega_{23}^z + \omega_{13}^z) + (\omega_{13}^z - \dot{\beta} \sin \alpha) \omega_{23}^z - (\omega_{13}^z + \dot{\alpha}) \omega_{23}^z = 0 \quad (2.9)$$

Еще три скалярные динамические уравнения, не содержащие реакций связей, получаются из (2.4). Если в этом уравнении перейти к дифференцированию по времени в связанной с шаром S_1 системе координат $O_1x_1y_1z_1$, то после несложных преобразований получим векторное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^\circ K_{O_1}}{dt} + \omega_{10} \times K_{O_1} &= \frac{R_1}{2R_2} \left\{ J \left[\frac{d^\circ \omega_{20}}{dt} + \omega_{10} \times (\omega_{23} + \omega_{31}) \right] - \right. \\ &\left. - m \left(O_2Q \times \frac{d^\circ v}{dt} - R_2 \omega_{10}^z v \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

где символом d°/dt обозначено дифференцирование в системе координат $O_1x_1y_1z_1$.

Проектирование обеих частей уравнений (2.10) на оси O_1x_1 , O_1y_1 , O_1z_1 даст три скалярных уравнения

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_{10}^*}{dt} + (C - B) \omega_{10}^* \omega_{10}^z &= \frac{mR_1}{10} M^x \\ B \frac{d\omega_{10}^y}{dt} + (A - C) \omega_{10}^* \omega_{10}^z &= \frac{mR_1}{10} M^y \\ C \frac{d\omega_{10}^z}{dt} + (B - A) \omega_{10}^* \omega_{10}^z &= \frac{mR_1}{10} M^z \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$M^x = 2R_2 (\dot{\omega}_{10}^* + \dot{\omega}_{21}^* + \omega_{10}^* \omega_{21}^z - \omega_{10}^z \omega_{21}^*) - 5 (\sin \alpha \sin \beta \dot{v}^x - \cos \alpha \dot{v}^x - \omega_{13}^z v^x)$$

$$M^y = 2R_2 (\dot{\omega}_{10}^y + \dot{\omega}_{21}^y + \omega_{10}^* \omega_{21}^z - \omega_{10}^z \omega_{21}^*) - 5 (\cos \alpha \dot{v}^y - \sin \alpha \cos \beta \dot{v}^y - \omega_{13}^z v^y)$$

$$M^z = 2R_2 (\dot{\omega}_{10}^z + \dot{\omega}_{21}^z + \omega_{10}^* \omega_{21}^y - \omega_{10}^y \omega_{21}^*) - 5 (\sin \alpha \cos \beta \dot{v}^z - \sin \alpha \sin \beta \dot{v}^z - \omega_{13}^z v^z)$$

ω_{10}^* , ω_{10}^y , ω_{10}^z определены в (1.1), ω_{21}^* , ω_{21}^y , ω_{21}^z и \dot{v}^x , \dot{v}^y , \dot{v}^z — проекции векторов (1.8) и (1.12) на оси O_1x_1 , O_1y_1 , O_1z_1 , их выражения получаются из (1.9), (1.4), (1.2) и (1.6), (1.2).

Динамические уравнения (2.9), (2.11) в совокупности с уравнениями кинематических связей (1.10), (1.14) образуют систему восьми дифференциальных уравнений, описывающих движение изучаемой механической системы.

3. Стационарное вращение шаров и линеаризованные уравнения движения. Полученная система уравнений движения допускает частное решение

$$\theta_1 = \varphi_1 = \theta_2 = \varphi_2 = \alpha = \pi/2, \quad \beta = 0, \quad \dot{\psi}_1 = n_1, \quad \dot{\psi}_2 = n_2 \quad (3.1)$$

Для этого решения шар S_1 вращается вокруг его главной оси инерции O_1x_1 с постоянной угловой скоростью n_1 , второй шар S_2 касается шара S_1 в его точке P , лежащей на оси O_1x_1 , и вращается вокруг оси O_1x_1 с постоянной угловой скоростью n_2 (относительно S_1). Таким образом, шары вращаются вокруг их общей, неподвижной в абсолютном пространстве, линии центров с произвольными по величине постоянными угловыми скоростями, причем одна из главных осей инерции шара S_1 (ось O_1x_1) расположена вдоль линии центров шаров.

Для исследования устойчивости движения (3.1) введем возмущения x_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) по формулам

$$\theta_1 = \pi/2 + x_1, \quad \varphi_1 = \pi/2 + x_2, \quad \dot{\psi}_1 = n_1 + x_3, \quad \alpha = \pi/2 + x_4 \quad (3.2)$$

$$\beta = x_5, \quad \theta_2 = \pi/2 + x_6, \quad \varphi_2 = \pi/2 + x_7, \quad \dot{\psi}_2 = n_2 + x_8$$

и линеаризуем уравнения движения относительно возмущений. В результате получим систему восьми линейных уравнений вида

$$R_1\dot{x}_4 - R_2(\dot{x}_6 \sin \psi_2 - \dot{x}_7 \cos \psi_2) = 0 \quad (3.3)$$

$$R_1\dot{x}_5 + R_2(\dot{x}_6 \cos \psi_2 + \dot{x}_7 \sin \psi_2) = 0$$

$$2(R_1 + R_2)\dot{x}_4 - (R_1 + 2R_2)[\dot{x}_1 + n_1(x_2 + x_5)] = 0 \quad (3.4)$$

$$2(R_1 + R_2)\dot{x}_5 + (R_1 + 2R_2)[\dot{x}_2 - n_1(x_1 - x_4)] = 0$$

$$\dot{x}_3 + \dot{x}_8 = 0 \quad (3.5)$$

$$A\dot{x}_3 = \sqrt{5}mR_1R_2(\dot{x}_3 + \dot{x}_8) \quad (3.6)$$

$$B\ddot{x}_1 - (A - B - C)n_1\dot{x}_2 + (A - C)n_1^2x_1 = -\chi_1\ddot{x}_4 + \chi_2\dot{x}_5$$

$$C\ddot{x}_2 + (A - B - C)n_1\dot{x}_1 + (A - B)n_1^2x_2 = \chi_1\ddot{x}_5 + \chi_2\dot{x}_4$$

$$\chi_1 = \sqrt{10}m(R_1 + R_2)R_1^2/(R_1 + 2R_2),$$

$$\chi_2 = \sqrt{10}mR_1^2[(7R_1 + 9R_2)n_1 + 2R_2n_2]/(R_1 + 2R_2)$$

4. Исследование устойчивости. Из (3.5) и первого уравнения (3.6) следует, что $\dot{x}_3 = \dot{x}_8 = 0$, т. е. в первом приближении вращение (3.1) устойчиво по отношению к возмущениям величин $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2$.

Уравнения (3.4) и два последних уравнения из (3.6) образуют замкнутую систему уравнений относительно x_1, x_2, x_4, x_5 . Если эта система решена, то величины x_6, x_7 найдутся из (3.3) при помощи элементарных квадратур, при этом надо принять во внимание, что $\psi_2(t) = (n_2 + x_8)t + \psi_2(0)$.

Далее будем интересоваться устойчивостью по отношению к переменным x_1, x_2 , характеризующим отклонение оси O_1x_1 шара S_1 от ее положения в абсолютном пространстве в невозмущенном стационарном вращении (3.1), а также по отношению к переменным x_4, x_5 , определяющим возмущение положения точки P касания шаров на поверхности шара S_1 . Характеристическое уравнение упомянутой

ВЫШЕ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО x_1, x_2, x_4, x_5 , КАК ПОКАЗЫВАЮТ ВЫЧИСЛЕНИЯ, БУДЕТ ТАКИМ

$$a_0 \lambda^6 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_3 = 0 \quad (4.1)$$

$$a_0 = (R_1 + R_2)^2 [4BC + 7/5 (B + C) mR_1^2 + 49/100 m^2 R_1^4]$$

$$a_1 = \{4 (R_1 + R_2)^2 [(A - B) (A - C) + BC] + (R_1 + 2R_2)^2 BC\} n_1^2 + \\ + 1/10 m R_1^2 n_1 \{14 (R_1 + R_2)^2 n_1 (B + C) + 7 (R_1 + R_2) (R_1 + 2R_2) n_1 (2A - B - C) - \\ - 2 (R_1 + R_2) [(7R_1 + 9R_2) n_1 + 2R_2 n_2] (2A - B - C) + \\ + (R_1 + 2R_2) [(7R_1 + 9R_2) n_1 + 2R_2 n_2] (B + C)\} + \\ + 1/100 m^2 R_1^4 \{49 (R_1 + R_2)^2 n_1^2 + [(7R_1 + 9R_2) n_1 + 2R_2 n_2]^2\}$$

$$a_2 = \{A (R_1 + 2R_2) n_1 + 1/10 m R_1^2 [(7R_1 + 9R_2) n_1 + 2R_2 n_2]\}^2 n_1^2 + \\ + \{4 (A - B) (A - C) (R_1 + R_2)^2 - [C (A - B) + B (A - C)] (R_1 + 2R_2)^2\} n_1^4 + \\ + 1/10 m R_1^2 (2A - B - C) \{7 (R_1 + 2R_2) (R_1 + R_2) n_1 - \\ - (3R_1 + 4R_2) [(7R_1 + 9R_2) n_1 + 2R_2 n_2]\} n_1^3$$

$$a_3 = (R_1 + 2R_2)^2 (A - B) (A - C) n_1^6$$

Ввиду четности характеристического многочлена условия устойчивости в первом приближении совпадают с условиями, при выполнении которых уравнение третьей степени

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \quad (4.2)$$

имеет три различных отрицательных вещественных корня.

Рассмотрим сначала некоторые частные случаи. Пусть в стационарном вращении (3.1) шар S_1 покоится. Тогда $n_1 = 0$ и уравнение (4.2) имеет либо три нулевых корня (при $mn_2 R_1 R_2 = 0$), либо два нулевых и один отрицательный корень (при $mn_2 R_1 R_2 \neq 0$). Вопрос об устойчивости вращения (3.1) в случае $n_1 = 0$ оставляем открытым (даже в первом приближении).

Если масса шара S_2 пренебрежимо мала ($m = 0$), то уравнение (4.2) имеет вид

$$[4 (R_1 + R_2)^2 x + (R_1 + 2R_2)^2 n_1^2] \{BCx^2 + [(A - B) (A - \\ - C) + BC] n_1^2 x + (A - B) (A - C) n_1^4\} = 0$$

и, если $n_1 \neq 0$, то все его корни отрицательны при выполнении условия

$$(A - B) (A - C) > 0 \quad (4.3)$$

Следовательно при $m = 0, n_1 \neq 0$ стационарное вращение (3.1) неустойчиво, если оно происходит вокруг средней по величине оси эллипсоида инерции шара S_1 и устойчиво в первом приближении, если ось вращения совпадает с наименьшей или наибольшей из осей эллипсоида.

Легко проверить, что такими же будут условия устойчивости и неустойчивости еще в одном частном случае, когда $R_1 = 0, n_1 \neq 0$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $mn_1 R_1 \neq 0$. Можно проверить, что коэффициенты характеристического уравнения (4.1) всегда удовлетворяют тождеству

$$a_1 n_1^4 + a_3 = a_0 n_1^6 + a_2 n_1^2 \quad (4.4)$$

В силу этого тождества уравнение (4.2) имеет отрицательный корень $x = -n_1^2$, а два другие его корня удовлетворяют квадратному уравнению

$$a_0 n_1^4 x^2 + (a_2 n_1^2 - a_3) x + a_3 n_1^2 = 0 \quad (4.5)$$

Условия отрицательности корней этого уравнения задаются неравенствами

$$a_2 n_1^2 > a_3 > 0, \quad (a_2 n_1^2 - a_3)^2 > 4 a_0 a_3 n_1^6 \quad (4.6)$$

Если хотя бы одно из этих неравенств выполняется с обратным знаком, то стационарное вращение (3.1) неустойчиво. Так, при $a_3 < 0$ (вращение происходит вокруг средней по величине оси эллипсоида инерции шара S_1) имеет место неустойчивость.

Пусть теперь $a_3 > 0$, т. е. выполнено условие (4.3) и вращение (3.1) происходит вокруг наибольшей или наименьшей оси эллипсоида инерции шара S_1 . Тогда система неравенств (4.6) эквивалентна одному неравенству

$$a_2 n_1^2 > a_3 + 2 \sqrt{a_0 a_3} n_1^3 \quad (4.7)$$

Для анализа этого неравенства введем пять безразмерных параметров a, b, c, ρ, ω по формулам $A = \sqrt[3]{10mR_1^2 a}$, $B = \sqrt[3]{10mR_1^2 b}$, $C = \sqrt[3]{10mR_1^2 c}$, $R_2 = \rho R_1$, $n_2 = \omega n_1$, $(a - b)(a - c) > 0$, $0 < \rho < \infty$, $-\infty < \omega < \infty$.

Условие (4.7) запишется в виде неравенства второй степени относительно величины $y = 2\omega\rho + 9\rho + 7$:

$$y^2 + ky + l > 0 \quad (4.8)$$

$$k = (3b + 3c - 4a) + 4(b + c - a)\rho$$

$$l = 4(a - b)(a - c)(1 + \rho)^2 + 7(2a - b - c)(1 + \rho)(1 + 2\rho) + bc(1 + 2\rho)^2 - 2(1 + \rho)(1 + 2\rho)[(a - b)(a - c)(2b + 7)(2c + 7)]^{1/2}$$

Дискриминант $d = k^2 - 4l$ квадратного трехчлена из (4.8) можно представить в виде

$$d = (b - c)^2 \pm 4(2\rho^2 + 3\rho + 1)[|a - b|^{1/2}(2b + 7)^{1/2} \pm |a - c|^{1/2}(2c + 7)^{1/2}]^2 \quad (4.9)$$

где верхний или нижний знак берется соответственно в случае, когда a — наименьшая или наибольшая из величин a, b, c .

Рассмотрим отдельно случаи, когда шар S_1 динамически симметричен ($b = c$) и когда такой симметрии нет. Пусть $a > b = c$. Тогда $d = 0$ и неравенство (4.8) запишется в виде $2y + k \neq 0$.

Если же $a < b = c$, то $d = 16(2\rho^2 + 3\rho + 1)(b - a)(2b + 7) > 0$ и условие устойчивости (4.8) выполняется, если $\omega < \omega_1$, или $\omega > \omega_2$, где

$$\omega_1 = -1/4(e + d^{1/2})\rho^{-1}, \quad \omega_2 = 1/4(-e + d^{1/2})\rho^{-1} \quad (4.10)$$

$$e = 2(3b - 2a + 7) + 2(4b - 2a + 9)\rho$$

При $\omega_1 < \omega < \omega_2$ имеет место неустойчивость.

Пусть теперь динамической симметрии нет. Тогда, если a — наименьшая из величин a, b, c , то $d > 0$ и условия устойчивости выполняются, если $\omega < \omega_1$ или $\omega > \omega_2$, где

$$\omega_1 = -1/4(f + d^{1/2})\rho^{-1}, \quad \omega_2 = 1/4(-f + d^{1/2})\rho^{-1} \quad (4.11)$$

$$f = 3b + 3c - 4a + 14 + 2(2b + 2c - 2a + 9)\rho$$

При $\omega_1 < \omega < \omega_2$ вращение (3.11) неустойчиво. Если же a — наибольшая из величин a, b, c , то условия устойчивости и неустойчивости записываются несколько сложнее. Введем обозначения

$$s = |(a - b)^{1/2} (2b + 7)^{1/2} - (a - c)^{1/2} (2c + 7)^{1/2}|,$$

$$\rho_* = -3/4 + 1/4s^{-1} [s^2 + 2(b - c)^2]^{1/2}$$

Тогда при выполнении неравенства $4s^2 > (b - c)^2$ стационарное вращение (3.1) устойчиво при любых ω, ρ . Если же $4s^2 < (b - c)^2$, то при $\rho > \rho_*$ имеет место устойчивость при любых ω , а если $0 < \rho < \rho_*$, то при $\omega < \omega_1$, или $\omega > \omega_2$ будет устойчивость, а при $\omega_1 < \omega < \omega_2$ — неустойчивость. Здесь ω_1, ω_2 — величины из (4.11).

Исследованная задача была поставлена А. Ю. Ишлинским, которому автор выражает свою искреннюю признательность.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93—013—16257).

Москва

Поступила в редакцию
20.III.1993