

УДК 531.552

© 1993 г. А. Н. ЗЕНКИН, В. А. ПРИВАЛОВ, В. А. САМСОНОВ

## О КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВОЗДЕЙСТВИЯ СРЕДЫ НА АВТОРОТИРУЮЩЕЕ ТЕЛО

В [1, 2] сформулирована математическая модель воздействия потока среды на авторотирующее тело. Эта модель носит квазистатический характер и на ее основе проведен параметрический анализ устойчивости режима свободной авторотации тела в потоке (без дополнительной внешней нагрузки). Поскольку авторотирующее тело является элементом многих технических объектов, представляет интерес использование предложенной модели для других типов движения, в том числе и нестационарных.

1. Динамическая система. Будем, как и в [1], считать, что тело может вращаться вокруг неподвижной оси, параллельной направлению потока среды, а воздействие среды на тело сосредоточено на четырех тонких лопастях. К  $j$ -й лопасти в точке  $O_j$  (центре давления), неподвижной относительно лопасти, приложена сила  $R_j$  воздействия среды. Вектор  $R_j$  разложим на две взаимноперпендикулярные составляющие:  $W_j$  — силу лобового сопротивления, направленную против вектора  $V_{rj}$  — скорости точки  $O_j$  относительно среды, и  $Y_j$  — боковую или подъемную силу

$$W_j = -1/2\rho S_j c_x(\alpha_j) V_{rj} V_{rj}$$

$$Y_j = \frac{1/2\rho S_j c_y(\alpha_j) (Y_{rj} \times n_j) \times V_{rj}}{\cos \alpha_j}$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды,  $S_j$  — площадь  $j$ -й лопасти,  $n_j$  — нормаль к  $j$ -й лопасти,  $\alpha_j$  — угол между вектором  $V_{rj}$  и плоскостью  $j$ -й лопасти, угол атаки,  $c_x(\alpha_j)$ ,  $c_y(\alpha_j)$  — безразмерные коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы. Зависимости  $c_x(\alpha)$ ,  $c_y(\alpha)$  считаются полученными в результате обычных статических продувок.

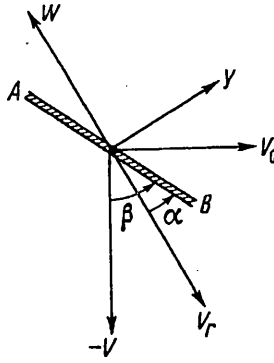
Положим, что размеры лопасти много меньше плеча  $r_j$  — расстояния от точки  $O_j$  до оси вращения тела.

Рассмотрим для простоты случай тонких одинаковых лопастей ( $S_j = S$ ,  $r_j = r$ ), развернутых на один и тот же установочный угол  $\beta$  вокруг державки, ортогональной оси вращения. Распределение скоростей и сил представлено на фиг. 1 в проекциях на плоскость, нормальную к державке. Сама лопасть проектируется на отрезок  $AB$ , ее державка — в точку  $O$ . Вектор  $V_r$  представляет собой сумму абсолютной скорости  $V_0$  центра  $O$  давления и вектора  $V$ , обратного к скорости потока среды. Здесь же отмечены установочный угол  $\beta$  и угол  $\alpha$  атаки и силы  $W$ ,  $Y$ .

Очевидно, что  $V_0 = r\Omega$ , где  $\Omega$  — угловая скорость вращения тела. Величины  $V_r$ ,  $\alpha$  связаны с  $\Omega$  и  $V$  кинематическими соотношениями

$$r\Omega = -V_r \sin(\alpha - \beta), \quad V = V_r \cos(\alpha - \beta), \quad r\Omega = -V \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \quad (1)$$

Сила  $W$  лобового сопротивления всегда тормозит вращение тела, так как ее момент  $M_w = 1/2\rho r S V_r^2 c_x(\alpha) \sin(\alpha - \beta)$  относительно оси вращения тела имеет, очевидно, диссипативный характер.



Фиг. 1

Подъемная сила  $Y$  создает момент  $M_y = 1/2\rho SV^2 c_y(\alpha) \cos(\alpha - \beta)$  относительно той же оси, знак которого зависит от знака коэффициента  $c_y$ . Таким образом, на оси тела создается вращающий момент  $M = M_y + M_w$ . При  $\Omega = 0$  имеем  $\alpha = \beta$ . Так как для тонких лопастей  $\alpha c_y(\alpha) \geq 0$  (при  $0 \neq |\alpha| < \pi/2$ ), то именно подъемная сила создает при  $0 \neq |\beta| < \pi/2$  стартовый вращающий момент, знак которого определяется знаком установочного угла  $\beta$ .

Пренебрежем моментом сил трения в подшипниках оси тела. Тогда уравнение вращения можно записать в виде

$$J\dot{\Omega} = M = 1/2\rho SV^2 [c_x(\alpha) \sin(\alpha - \beta) + c_y(\alpha) \cos(\alpha - \beta)] \quad (2)$$

в котором  $J$  — момент инерции тела и которое совместно с соотношениями (1) представляет собой динамическую систему первого порядка с единственной фазовой координатой  $\Omega$  и существенным параметром  $\beta$ . Зависимость вращающего момента  $M$  от величины  $\Omega$ , как видно, носит весьма сложный характер. Дополнительное осложнение состоит в том, что функции  $c_x(\alpha)$ ,  $c_y(\alpha)$  представлены в табличном виде. Поэтому исследование уравнения (2) потребовало привлечения как качественных, так и численных методов.

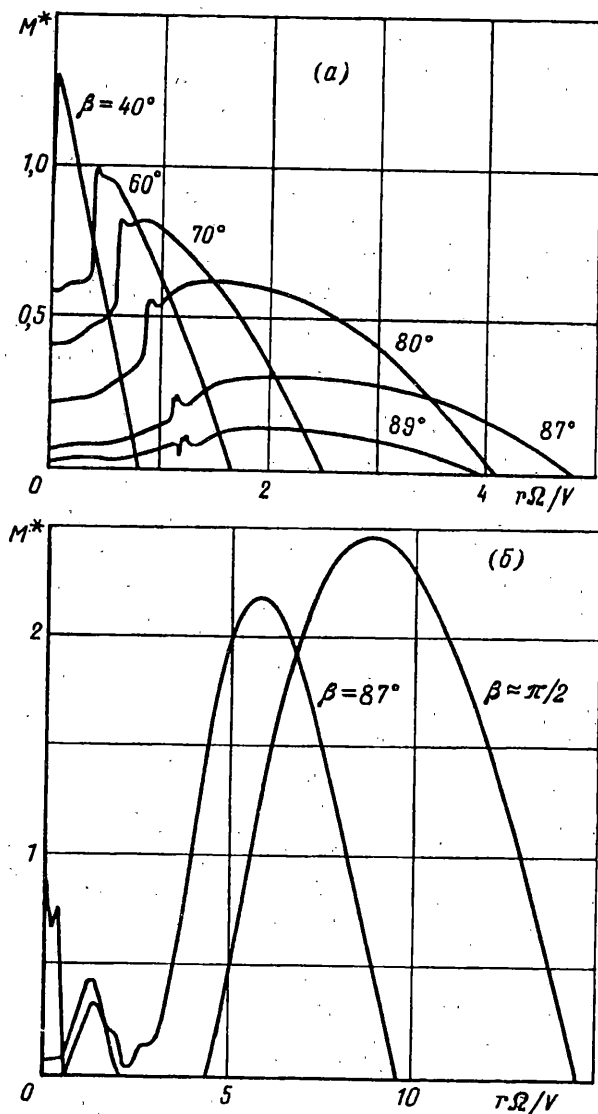
Поскольку динамическая система (1), (2) стационарна, то ее фазовое пространство устроено просто: оно представляет собой прямую значений  $\Omega$ , состоящую из фазовых траекторий двух типов. К первому типу относятся интервалы знакопостоянства функции  $M(\Omega)$ , а ко второму — неподвижные точки, отвечающие ее нулевым значениям ( $M(\Omega) = 0$ ).

2. Установившееся вращение. Обратимся сначала к анализу неподвижных точек, которые описывают установившиеся вращения тела  $\Omega(t) = \Omega(t_0) = \Omega_*$ . Уравнение  $M(\Omega) = 0$  можно привести к виду

$$\text{tg}(\alpha - \beta) + k(\alpha) = 0, \quad k(\alpha) = c_y(\alpha)/c_x(\alpha) \quad (3)$$

где  $k(\alpha)$  — аэродинамическое качество лопасти. Нетрудно видеть, что величина  $\Omega_*$  угловой скорости определяется соотношением  $r\Omega_*/V = -k(\alpha_*)$ , где установившееся значение  $\alpha_*$  угла атаки зависит от параметра  $\beta$  в силу уравнения (3).

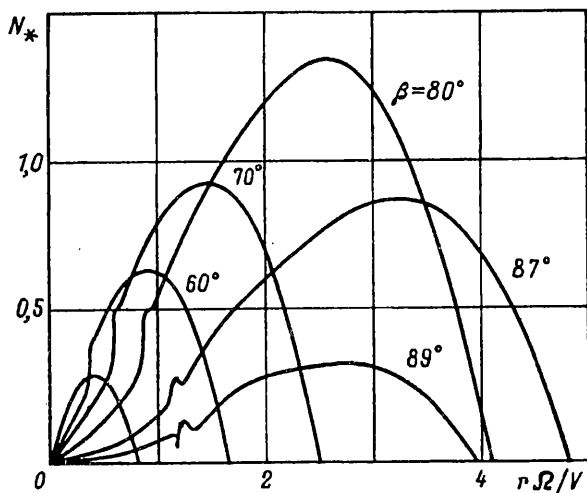
Качество  $k(\alpha)$  представляет собой обычную однозначную функцию угла атаки, обращается в нуль при  $\alpha = 0$  (в силу выбора начала отсчета для  $\alpha$ ) и при  $\alpha = \alpha_1 \approx \pi/2$  (для тонких профилей) и имеет по крайней мере один максимум в промежутке  $(0, \alpha_1)$ . Поэтому и зависимость  $\Omega_*(\beta)$  носит немонотонный характер, так как  $\Omega_*$  обращается в нуль при  $\beta = 0$  и  $\beta = \alpha_1$ , достигая максимума при некотором промежуточном значении установочного угла.



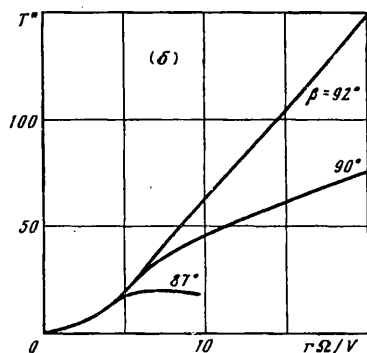
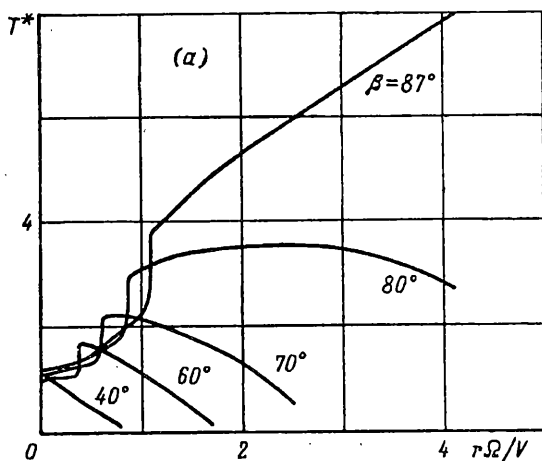
Фиг. 2

Отметим, что зависимость  $\Omega_*(\beta)$  может оказаться даже неоднозначной. Например, для тонких плоских пластинок  $k(\alpha) \approx \operatorname{ctg} \alpha$  при  $0 < \alpha_2 \leq |\alpha| \leq \pi/2$ , где  $\alpha_2$  — величина порядка  $30^\circ$  [3, 4]. Поэтому при  $\beta = \pi/2$  уравнение (3) превращается на отрезке  $[\alpha_2, \pi/2]$  в тождество, и установившимся окажется вращение с произвольной, но достаточно малой  $r|\Omega_*|/V < k(\alpha_2)$  угловой скоростью. Конечно, существование многообразия неизолированных решений — это гипотетический случай. Под влиянием каких-либо дополнительных факторов, не включенных в модель (например, трение в оси вращения), это многообразие «рассыпается» на совокупность изолированных, но неоднозначный характер зависимости  $\Omega_*(\beta)$  может сохраниться.

3. Зависимость вращающего момента от угловой скорости вращения. Ряд форм практического использования авторотирующих тел сопряжен со снятием вращающего момента с оси тела. Если это силовой привод, то желательно



Фиг. 3



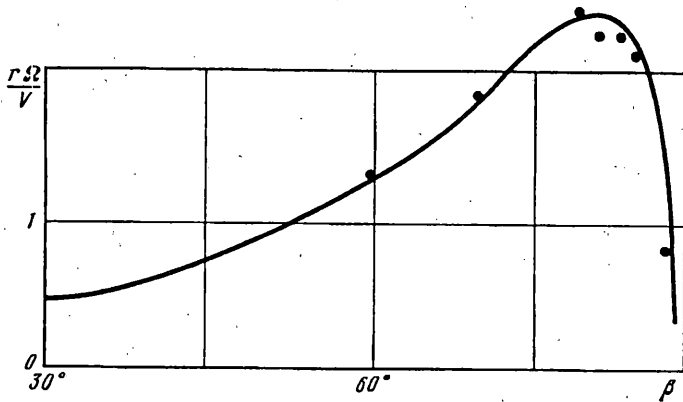
Фиг. 4

обеспечить максимальное значение снимаемого момента. Если это привод электрогенератора, то необходим максимум мощности  $N = \Omega M$  этого момента. В первом случае для выбора рабочего режима нужно исследовать зависимость  $M(\Omega)$  при различных значениях установочного угла  $\beta$ . Примерный расчет этой зависимости был проведен для двух типов лопастей: круглой (с относительно невысоким качеством) и прямоугольной 1 : 8 (с достаточно высоким качеством). В основу расчета положены сглаженные функции  $c_x(\alpha)$ ,  $c_y(\alpha)$ , построенные по данным работ [3, 4].

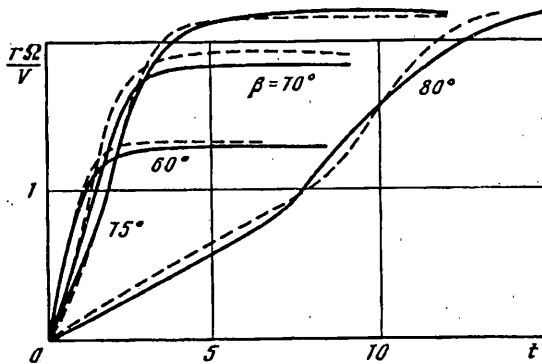
Семейство зависимостей  $M^* = M(\Omega)/(r\rho S V^2)$  при различных значениях установочного угла  $\beta$  показано на фиг. 2а, б.

Для круглой лопасти (как, впрочем, и для других лопастей с невысоким аэродинамическим качеством) абсолютный максимум вращающего момента достигается на старте (при  $\Omega = 0$ ) для  $\beta \approx \alpha_3 = 40^\circ$ . Увеличение угла разворота лопасти приводит к значительному падению стартового значения  $M$ , но создает возможность его небольшого увеличения внутри интервала  $(0, \Omega_*(\beta))$ .

Иная картина для лопастей с относительно высоким аэродинамическим качеством (фиг. 2б). Здесь абсолютный максимум достигается на режиме вращения



Фиг. 5



Фиг. 6

с  $r\Omega/V \sim 10$  при  $\beta \approx \pi/2$ , этот максимум превышает максимальное значение стартового момента более чем в 3 раза. Отметим, что для вывода тела на этот режим необходимо преодолеть интервал (1,5), на котором вращающий момент отрицателен, т. е. оказывает тормозящее действие.

Графики (фиг. 3) мощности вращающего момента  $N_* = N/(\rho SV^3)$ , как и следовало ожидать, имеют по одному максимуму на интервалах положительного знака  $M$ .

4. Тормозная сила. Авторотирующее тело может использоваться как элемент аэродинамического тормозного устройства (роташют). Здесь приходится иметь дело с проекцией  $T$  сил  $W$ ,  $Y$  на направление потока и рабочий режим должен обеспечить максимальное значение тормозной силы  $T = 1/2 \rho SV^2 [c_x(\alpha) \cos(\alpha - \beta) - c_y(\alpha) \sin(\alpha - \beta)]$ .

На фиг. 4а, б представлены типичные зависимости  $T^* = T/(\rho SV^2)$  при различных значениях установочного угла. Для круглой лопасти (фиг. 4, а) максимальное значение  $T$  при фиксированном  $\beta$  достигается внутри интервала  $(0, \Omega_*(\beta))$ , и лишь в узком диапазоне  $87^\circ < \beta < 90^\circ$  максимум  $T$  выходит на режим свободной авторотации. Абсолютный максимум тормозной силы значительно (в 7 раз) превышает простое лобовое сопротивление лопасти. Этот эффект еще более выразителен (фиг. 4, б) для лопасти с более высоким аэродинамическим качеством.

5. Переходный процесс. Выше уже отмечалось, что даже в режиме установившегося вращения нельзя считать обтекание лопасти стационарным, так как здесь происходит, вращение плоскости угла атаки (вместе с лопастью). Еще

более существенная нестационарность имеет место на переходных режимах вращения, например в процессе раскрутки тела из состояния покоя до  $\Omega_*$ . Проведению подобного эксперимента с круглой лопастью предшествовал расчет процесса раскрутки  $\Omega(t)$  путем интегрирования дифференциального уравнения (2). При этом эталонная функция  $c_x(\alpha)$  круглой пластинки была увеличена на величину  $\sim 0,05$  сопротивления державки. На фиг. 5, 6 сплошные кривые изображают расчетные зависимости при некоторых значениях  $\beta$ : на фиг. 5 —  $\Omega_*(\beta)$ , а на фиг. 6 —  $\Omega(t)$  (время  $t$  в с).

Эксперимент по регистрации процесса раскрутки двухлопастной вертушки из состояния покоя был проведен в Институте механики МГУ на аэродинамической трубе А-6 при скорости потока  $\sim 15$  м/с. Диаметр лопастей вертушки был равен 0,1 м при значении  $r = 0,25$  м. Данные эксперимента нанесены точками на фиг. 5 и штриховыми кривыми на фиг. 6.

Правомерность применения квазистатической модели зависит от соотношения между длительностью нестационарного движения среды и характерным временем неустановившегося движения тела. Продолжительность переходного процесса в воздухе для малых дозвуковых скоростей тела определяется его размером, скоростью звука и в рассматриваемом случае составляет  $1/3000$  с. Мерой нестационарности движения тела является постоянная времени изменения угловой скорости вращения. По данным на фиг. 6 эта постоянная имеет порядок  $1/60$  с. По-видимому, такого соотношения между характерными временами достаточно не только для хорошего качественного, но и для вполне удовлетворительного количественного соответствия между расчетными и экспериментальными характеристиками, представленными на фиг. 5, 6.

Таким образом, при решении ряда нестационарных задач движения тела вполне допустимо использование квазистатической модели воздействия среды.

Авторы выражают глубокую благодарность Г. Е. Худякову, Г. А. Романенко и С. Ю. Меснянкину за содействие в проведении эксперимента.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986. 86 с.
2. Привалов В. А., Самсонов В. А. Об устойчивости движения тела, авторотирующего в потоке среды//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 32—38.
3. Flachsbart O. Messungen an ebenen und gewölbten Platten. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Cöttingen//Hrsg. von L. Prandtl, A. Betz. München; Berlin, 1932. V. 4.
4. Табачников В. Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки//Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1621. С. 79—93.

Москва

Поступила в редакцию  
16.X.1991