МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1993

УДК 531.38

© 1993 г. Ю. Н. ЧЕЛНОКОВ

КВАТЕРНИОННОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА: УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ, ПРОГРАММНОЕ ДВИЖЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Предлагается аналитическое кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела по информации об угловом положении и угловой скорости твердого тела в абсолютной системе координат. В качестве математической модели движения используются кватернионные дифференциальные кинематические уравнения углового движения твердого тела. В них роль переменных состояния объекта управления играют ненормированный кватернион ориентации твердого тела и кватернион абсолютной угловой скорости с ненулевой скалярной частью, образующие восьмимерный вектор состояния, а роль управления-четырехмерный вектор, имеющий смысл кватерниона абсолютного углового ускорения с ненулевой скалярной частью.

В первой части работы приводятся кватернионные кинематические уравнения углового движения твердого тела, дается постановка задач кинематического управления ориентацией твердого тела, предлагается кватернионное решение задачи построения программного углового движения и программного управления, реализующее плоский эйлеров разворот твердого тела. Во второй части работы рассматриваются различные кватернионные формы уравнений ошибок системы управления ориентацией, предлагаются кватернионные законы стабилизации программного движения твердого тела, приводящие в нелинейной постановке к линейным, стационарным уравнениям ошибок, инвариантным относительно программного движения, предлагаются алгоритмы бесплатформенных инерциальных систем управления ориентацией подвижных объектов и систем управления угловым движением работов-манипуляторов.

В работе развивается кватернионный подход к решению кинематических задач управления ориентацией твердого тела, использованный в [1, 2] для построения законов управления ориентацией твердого тела в случае, когда в качестве управления выступает вектор абсолютной угловой скорости твердого тела.

1. Уравнения движения. Рассмотрим кинематические уравнения углового движения твердого тела в инерциальной (абсолютной) системе координат ξ, используемые в дальнейшем для решения кинематической задачи управления ориентацией твердого тела. Введем следующие обозначения: Z-опорная (программная) система координат, вращающаяся в инерциальной системе координат с заданной угловой скоростью $\omega^0 = \omega^0(t)$ и заданным программным угловым ускорением $\varepsilon^0 = \varepsilon^0(t)$; X-система координат, жестко связанная с твердым телом; ω_v, ε_v — векторы абсолютной угловой скорости и абсолютного углового ускорения твердого тела.

Взаимную ориентацию введенных систем координат зададим кватернионами λ^0, $\mu\,(\mathring{\mu}^*)$, λ в соответствии со схемой поворотов

$$\xi \xrightarrow[\omega^0,\varepsilon^0]{\lambda^0} Z \xrightarrow{\mu(\mu^*)} X, \qquad \xi \xrightarrow[\omega_v,\varepsilon_v]{\lambda} X \tag{1.1}$$

Кинематические уравнения абсолютного углового движения твердого тела, связывающие величины λ, ω_v, ε_v, в кватернионной записи имеют вид

$$\boldsymbol{\omega}_x^{\cdot} = \boldsymbol{\varepsilon}_x, \quad 2\lambda^{\cdot} = \lambda \circ \boldsymbol{\omega}_x \tag{1.2}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \mathbf{i}_k, \quad \lambda^{\cdot} = \lambda_0^{\cdot} + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^{\cdot} \mathbf{i}_k$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \omega_0 + \boldsymbol{\omega}_{vx} = \omega_0 + \sum_{k=1}^{3} \omega_{vx_k} \mathbf{i}_k, \quad \boldsymbol{\omega}_x^{\cdot} = \omega_0^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}_{vx}^{\cdot} = \omega_0^{\cdot} + \sum_{k=1}^{3} \omega_{vx_k}^{\cdot} \mathbf{i}_k$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \varepsilon_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_{vx} = \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{vx_k} \mathbf{i}_k$$

Здесь и далее $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты гиперкомплексного пространства [1], λ — кватернион, характеризующий действительную (текущую) ориентацию твердого тела в абсолютной системе координат ξ; λ_j $(j = \overline{0, 3})$ — компоненты кватерниона λ, одинаковые в базисах ξ и X; ω_{vx_k}, ε_{vx_k} — проекции векторов $\boldsymbol{\omega}_v$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_v$ на оси связанной системы координат X; $\boldsymbol{\omega}_{vx}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{vx}$ — отображения векторов $\boldsymbol{\omega}_v$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_v$ на базис X, являющиеся векторными частями кватерниона угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_x$ и кватерниона углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_x$; ω_0, ε_0 — скалярные части кватернионов $\boldsymbol{\omega}_x$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$; точка означает производную по времени t (производная от кватерниона вычисляется в предположении неизменности ортов $\mathbf{i}_k$), знак $\circ$ означает кватернионное умножение.

Кватернионные уравнения (1.2) эквивалентны следующим скалярным

$$\omega_0^{\cdot} = \varepsilon_0, \quad \omega_k^{\cdot} = \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned}
2\lambda_0^{\cdot} &= \omega_0\lambda_0 - \omega_1\lambda_1 - \omega_2\lambda_2 - \omega_3\lambda_3 \\
2\lambda_1^{\cdot} &= \omega_1\lambda_0 + \omega_0\lambda_1 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3 \\
2\lambda_2^{\cdot} &= \omega_2\lambda_0 - \omega_3\lambda_1 + \omega_0\lambda_2 + \omega_1\lambda_3 \\
2\lambda_3^{\cdot} &= \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2 + \omega_0\lambda_3
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\omega_k = \omega_{vx_k}, \quad \varepsilon_k = \varepsilon_{vx_k} \quad (k = 1, 2, 3)$$

В кинематических уравнениях (1.2) используются отображения векторов $\boldsymbol{\omega}_v$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_v$ на связанный базис X. При использовании отображений $\boldsymbol{\omega}_{v\xi}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{v\xi}$ этих векторов на инерциальный базис ξ кинематические уравнения абсолютного углового движения твердого тела имеют следующий вид

$$\boldsymbol{\omega}_\xi^{\cdot} = \boldsymbol{\varepsilon}_\xi, \quad 2\lambda^{\cdot} = \boldsymbol{\omega}_\xi \circ \lambda \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\xi = \omega_0 + \boldsymbol{\omega}_{v\xi} = \omega_0 + \sum_{k=1}^{3} \omega_{v\xi_k} \mathbf{i}_k, \quad \boldsymbol{\omega}_\xi^{\cdot} = \omega_0^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}_{v\xi}^{\cdot} = \omega_0^{\cdot} + \sum_{k=1}^{3} \omega_{v\xi_k} \mathbf{i}_k$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\xi = \varepsilon_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_{v\xi} = \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{v\xi_k} \mathbf{i}_k$$

где $\omega_{v\xi_k}$, $\varepsilon_{v\xi_k}$ — проекции векторов ω_v и ε_v на оси системы координат ξ.

Отметим, что отображения кватернионов и векторов угловой скорости углового ускорения на базисы X и ξ связаны соотношениями [1]:

$$\boldsymbol{\omega}_\xi = \lambda \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \lambda^{-1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\xi = \lambda \circ \boldsymbol{\varepsilon}_x \circ \lambda^{-1}, \quad \boldsymbol{\omega}_{v\xi} = \lambda \circ \boldsymbol{\omega}_{vx} \circ \lambda^{-1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{v\xi} = \lambda \circ \boldsymbol{\varepsilon}_{vx} \circ \lambda^{-1}$$

где λ^{-1} — кватернион, обратный кватерниону λ.

Фигурирующая в уравнениях (1.2) ((1.3)) или (1.4) переменная ω_0 (скалярная часть кватерниона ω_x или ω_ξ) в силу имеющих место дифференциальных соотношений

$$2\lambda^{\cdot} = \omega_0\lambda, \quad (\lambda^2)^{\cdot} = \omega_0\lambda^2, \quad \omega_0 = -\frac{d}{dt}(\ln \lambda^2)$$

определяет собой характер изменения нормы $\lambda^2 = \|\lambda\| = \lambda \circ \bar{\lambda} = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ кватерниона λ. В свою очередь поведение переменной ω_0 обусловливается (в силу первого уравнения (1.3)) выбором величины ε_0 (скалярной части кватерниона ε_x или ε_ξ), которая является произвольной функцией времени t, а также переменных λ_j, $\lambda_j^{\cdot}$ (или ω_k): $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(t, \lambda, \lambda^{\cdot}) = \varepsilon_0(t, \lambda, \omega_v)$.

Таким образом, для описания действительной ориентации твердого тела нами используется ненормированный кватернион λ, норма которого λ^2 в общем случае изменяется с течением времени по определенному, нами выбранному закону.

Кватернион λ^0 программной ориентации твердого тела, вектор ω^0 программной абсолютной угловой скорости и вектор ε^0 программного абсолютного углового ускорения удовлетворяют уравнениям, аналогичным (1.2), (1.4):

$$(\omega_z^0)^{\cdot} = \varepsilon_z^0, \quad 2(\lambda^0)^{\cdot} = \lambda^0 \circ \omega_z^0 \tag{1.5}$$

$$\lambda^0 = \lambda_0^0 + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^0 \mathbf{i}_k, \quad (\lambda^0)^{\cdot} = (\lambda_0^0)^{\cdot} + \sum_{k=1}^{3} (\lambda_k^0)^{\cdot} \mathbf{i}_k$$

$$\omega_z^0 = \sum_{k=1}^{3} \omega_{zk}^0 \mathbf{i}_k, \quad (\omega_z^0)^{\cdot} = \sum_{k=1}^{3} (\omega_{zk}^0)^{\cdot} \mathbf{i}_k, \quad \varepsilon_z^0 = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{zk}^0 \mathbf{i}_k$$

$$(\omega_\xi^0)^{\cdot} = \varepsilon_\xi^0, \quad 2(\lambda^0)^{\cdot} = \omega_\xi^0 \circ \lambda^0 \tag{1.6}$$

$$\omega_\xi^0 = \sum_{k=1}^{3} \omega_{\xi k}^0 \mathbf{i}_k, \quad (\omega_\xi^0)^{\cdot} = \sum_{k=1}^{3} (\omega_{\xi k}^0)^{\cdot} \mathbf{i}_k, \quad \varepsilon_\xi^0 = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{\xi k}^0 \mathbf{i}_k$$

Здесь ω_{zk}^0, ε_{zk}^0 и $\omega_{\xi k}^0$, $\varepsilon_{\xi k}^0$ — проекции векторов ω^0, ε^0 на оси систем координат Z и ξ; ω_z^0, ε_z^0 и ω_ξ^0, ε_ξ^0 — отображения векторов ω^0, ε^0 на базисы Z и ξ, связанные соотношениями $\omega_\xi^0 = \lambda^0 \circ \omega_z^0 \circ \bar{\lambda}^0$, $\varepsilon_\xi^0 = \lambda^0 \circ \varepsilon_z^0 \circ \bar{\lambda}^0$, где $\bar{\lambda}^0$ — кватернион, сопряженный кватерниону λ^0.

В отличиие от уравнений (1.2), (1.4) в дифференциальных уравнениях программного движения (1.5), (1.6) скалярные части ω_0^0 и ε_0^0 кватерниона угловой скорости ω_z^0 (ε_ξ^0) и кватерниона углового ускорения ε_z^0 (ε_ξ^0) равны нулю, так как для описания программной ориентации твердого тела нами используется нормированный кватернион λ^0, норма $(\lambda^0)^2$ которого не изменяется с течением времени и равна единице

$$(\lambda^0)^2 = \|\lambda^0\| = \lambda^0 \circ \bar{\lambda}^0 = (\lambda_0^0)^2 + (\lambda_1^0)^2 + (\lambda_2^0)^2 + (\lambda_3^0)^2 = 1$$

2. Постановка задачи. Построение законов управления ориентацией твердого тела включает в себя решение двух задач: задачи построения законов программного углового движения и законов программного управления и задачи построения корректирующего (стабилизирующего) управления, обеспечивающего асимптотически устойчивый и оптимальный в некотором смысле процесс отслеживания системой управления ориентацией программного углового движения.

Нами рассматривается кинематическая постановка задачи управления ориентацией твердого тела: в качестве математической модели абсолютного углового движения твердого тела принимаются кинематические уравнения движения (1.2) ((1.3)) или (1.4), содержащие кинематические уравнения в ненормированных параметрах Родрига — Гамильтона λ_j, а в качестве управлений — проекции вектора абсолютного углового ускорения ε_v твердого тела на связанные с ним координатные оси X_k или на оси ξ_k абсолютной системы координат ξ (величины

ε_{vx_k} или $\varepsilon_{v\xi_k}$). Таким образом полагается, что управление ориентацией твердого тела осуществляется за счет сообщения ему абсолютного углового ускорения, складывающегося из программного абсолютного углового ускорения и корректирующего (стабилизирующего) углового ускорения. При этом построение требуемого вектора абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_v$ (вектора управления) выполняется либо в связанной системе координат X по формуле

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{vx} = \boldsymbol{\varepsilon}_z^0 + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{kvx} = \sum_{k=1}^{3} (\varepsilon_{z_k}^0 + \delta\varepsilon_{kvx_k})\,\mathbf{i}_k \tag{2.1}$$

либо в инерциальной (абсолютной) системе координат ξ по формуле

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{v\xi} = \boldsymbol{\varepsilon}_\xi^0 + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{kv\xi} = \sum_{k=1}^{3} (\varepsilon_{\xi_k}^0 + \Delta\varepsilon_{kv\xi_k})\,\mathbf{i}_k \tag{2.2}$$

Отметим, что вектор $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{kv}$ корректирующего (стабилизирующего) углового ускорения (управления), вводимый в соответствии с (2.1), не равен геометрической разности векторов $\boldsymbol{\varepsilon}_v$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^0$: $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{kv} \neq \boldsymbol{\varepsilon}_v - \boldsymbol{\varepsilon}^0$, в то время как вектор $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{kv}$ корректирующего (стабилизирующего) углового ускорения (управления), вводимый в соответствии с (2.2) этой разности равен $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{kv} = \boldsymbol{\varepsilon}_v - \boldsymbol{\varepsilon}^0$.

Фигурирующие в формулах (2.1), (2.2) кватернионы $\boldsymbol{\varepsilon}_z^0$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_\xi^0$ программного углового ускорения (управления) являются известными функциями времени t: $\boldsymbol{\varepsilon}_z^0 = \boldsymbol{\varepsilon}_z^0(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_\xi^0 = \boldsymbol{\varepsilon}_\xi^0(t)$. Они находятся в результате решения задачи построения программного углового движения и управления. Корректирующие (стабилизирующие) управления $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{kv}$ и $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{kv}$ строятся в виде некоторых, определенным образом выбранных функций времени, ошибки ориентации и ошибки по угловой скорости твердого тела с использованием принципа обратной связи.

Рассматриваемая постановка кинематической задачи управления ориентацией твердого тела представляет интерес с точки зрения построения инерциальных систем управления угловым движением подвижных объектов на бесплатформенных принципах [1], когда подвижный объект имеет на своем борту бесплатформенную инерциальную систему ориентации, измеряющую проекции ω_{vx_k} вектора $\boldsymbol{\omega}_v$ абсолютной угловой скорости вращения объекта на связанные с ним координатные оси и вырабатывающую с помощью бортового вычислителя компоненты λ_j кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ действительной ориентации объекта в инерциальной системе координат. Применение такого же рода управления обсуждается в робототехнике, где рядом авторов при построении систем управления угловым движением манипулятора предлагается формировать командный управляющий сигнал в виде требуемого вектора абсолютного углового ускорения выходного звена манипулятора с использованием обратной связи по абсолютному угловому положению и абсолютной угловой скорости вращения выходного звена манипулятора.

Так в работе [3] рассматриваемое управление называется независимым программным управлением движением манипулятора по ускорению. Для уменьшения ошибки ориентации выходного звена манипулятора предлагается обеспечить такие прикладываемые к манипулятору силы и моменты, чтобы вектор абсолютного углового ускорения выходного звена манипулятора был равен сумме вектора абсолютного программного углового ускорения и векторных слагаемых, пропорциональных ошибкам по абсолютному угловому положению и абсолютной угловой скорости этого звена. Ошибка по угловому положению выходного звена формируется в виде половинной суммы векторных произведений единичных векторов, направленных вдоль координатных осей X_k и Z_k.

В [4] рассматривается аналогичный подход к управлению угловым движением манипулятора: в качестве командного управляющего сигнала предлагается использовать требуемый вектор абсолютного углового ускорения выходного звена манипулятора, формируемый аналогично [3], однако ошибку по абсолютному угловому положению выходного звена манипулятора предлагается брать в кватернионной форме. Для предлагаемого закона управления с помощью второго метода Ляпунова доказывается (в кинематической постановке) асимптотическая устойчивость процесса управления ориентацией выходного звена манипулятора. Следует отметить, что уравнения ошибок (уравнения возмущенного движения) для законов кинематического управления ориентацией выходного звена манипулятора, предложенных в [3, 4], существенно нелинейны и нестационарны, что затрудняет исследование свойств системы управления ориентацией и решение задачи нахождения оптимальных коэффициентов (параметров) законов управления.

В настоящей работе предлагается аналитическое решение задачи построения кинематического управления ориентацией твердого тела в виде вектора абсолютного углового ускорения на основе кватернионного описания углового движения, свободное от указанных недостатков решений, предложенных в [3, 4]. Предлагаемые законы корректирующего (стабилизирующего) управления приводят к линейным (без линеаризации), стационарным и инвариантным относительно программного движения уравнения ошибок системы управления ориентацией, что позволяет дать полный анализ свойств кинематического управления ориентацией твердого тела и определить оптимальные значения параметров управления. Работа развивает кватернионный подход к решению кинематических задач управления ориентацией твердого тела, использованный в [1, 2, 4] для построения законов управления ориентацией твердого тела по угловой скорости, когда в качестве управления выступает вектор абсолютной угловой скорости вращения твердого тела.

Замечание 1. Для бесплатформенных инерциальных систем управления ориентацией подвижных объектов формирование вектора управления (требуемого вектора абсолютного углового ускорения твердого тела) целесообразно проводить в связанной системе координат X (по формуле (2.1)), так как в этих системах непосредственно измеряются проекции вектора действительной абсолютной угловой скорости вращения подвижного объекта на связанные с ним координатные оси, используемые при вычислении корректирующего управления $\delta\varepsilon_{kux}$. В системах управления угловым движением роботов — манипуляторов формирование вектора управления в связанной системе координат наиболее эффективно, если на выходном звене робота — манипулятора установлен инерциальный трехкомпонентный измеритель абсолютной угловой скорости, для традиционных же систем управления угловым движением роботов — манипуляторов, имеющих в своем составе датчики углов и угловых скоростей относительных поворотов звеньев манипулятора, формирование вектора управления (требуемого вектора абсолютного углового ускорения выходного звена манипулятора) может осуществляться как в связанной системе координат X (по формуле (2.1)), так и в абсолютной системе координат ξ (по формуле (2.2)).

Замечание 2. Поскольку для твердого тела со сферическим распределением масс имеют место равенства $\varepsilon_{ux_k} = M_{x_k}/J_k$, $\varepsilon_{u\xi_k} = M_{\xi_k}/J_k$, где M_{x_k} и M_{ξ_k} — проекции главного вектора моментов внешних сил, действующих на твердое тело, на оси систем координат X и ξ, $J_k = J = \text{const}$ — момент инерции тела относительно связанной оси X_k, то предлагаемое решение кинематической задачи управления ориентацией твердого тела является решением и динамической задачи управления ориентацией космического аппарата, имеющего сферическое распределение масс.

3. Программное угловое движение и управление. Рассмотрим построение программного углового движения твердого тела в виде плоского эйлерова разворота, обеспечивающего кратчайший перевод твердого тела из заданного начального углового положения в требуемое конечное, и построение программного управления (вектора программного абсолютного углового ускорения ε^0), обеспечивающего его реализацию. Программное движение твердого тела рассматриваем на интервале времени $[t_0, t_*]$, где t_* — в общем случае не фиксированная величина. Считаем, что начальная программная ориентация твердого тела задана в системе координат

ξ кватернионом λ_0^0, равным кватерниону действительной начальной ориентации твердого тела $\lambda_0^0 = \lambda^0(t_0) = \lambda(t_0)$, а конечная — кватернионом $\lambda_*^0 = \lambda^0(t_*)$. Необходимо построить программную траекторию перевода твердого тела из его начального углового положения λ_0^0 в требуемое конечное λ_*^0 в виде кватернионной функции времени $\lambda^0 = \lambda^0(t)$, а также построить в виде векторных функций времени программную абсолютную угловую скорость $\omega^0 = \omega^0(t)$ и программное абсолютное угловое ускорение $\varepsilon^0 = \varepsilon^0(t)$ плоского эйлерова разворота. Этот перевод должен быть осуществлен либо за минимально возможное время (оптимальный по быстродействию разворот), либо за фиксированное время $T = t_* - t_0$.

В соответствии с теоремой Эйлера твердое тело с одной неподвижной точкой может быть переведено из произвольного начального углового положения в произвольное конечное положение с помощью одного поворота на определенный угол Φ_* вокруг оси $\mathbf{e}$, неизменно ориентированной в системе координат ξ. Используя теорему Эйлера, дадим кватернионное решение задачи построения программного углового движения и управления.

Рассмотрим схему поворотов

$$\xi \xrightarrow{\lambda_*^0} Z_*, \qquad \xi \xrightarrow{\lambda_0^0} Z_0 = X_0 \xrightarrow{a^*} Z_* \tag{3.1}$$

где $Z_0 = X_0$ и Z_* — начальное и требуемое конечное угловые положения твердого тела в системе координат ξ, $\mathbf{a}^*$ — кватернион, характеризующий эйлеров разворот твердого тела из положения X_0 в положение Z_*.

Полагая, что кватернионы λ_0^0 и λ_*^0 заданы своими компонентами в одном базисе ξ, в соответствии с (3.1) имеем

$$\lambda_*^0 = \mathbf{a}_\xi^* \circ \lambda_0^0 = \lambda_0^0 \circ \mathbf{a}_z^* \tag{3.2}$$

где $\mathbf{a}_\xi^*$ и $\mathbf{a}_Z^*$ — кватернионы плоского эйлерова разворота, определенные своими компонентами в базисах ξ и Z_* соответственно. Из (3.2) находим

$$\mathbf{a}_\xi^* = a_0 + \mathbf{a}_{v\xi}^* = \lambda_*^0 \circ \overline{\lambda}_0^0 \tag{3.3}$$

$$a_0 = \mathrm{sgal}\,(\lambda_*^0 \circ \overline{\lambda}_0^0), \qquad \mathbf{a}_{v\xi}^* = \mathrm{vect}\,(\lambda_*^0 \circ \overline{\lambda}_0^0) \tag{3.4}$$

$$\mathbf{a}_z^* = a_0 + \mathbf{a}_{vz}^* = \overline{\lambda}_0^0 \circ \lambda_*^0 \tag{3.5}$$

$$a_0 = \mathrm{sgal}\,(\overline{\lambda}_0^0 \circ \lambda_*^0), \qquad \mathbf{a}_{vz}^* = \mathrm{vect}\,(\overline{\lambda}_0^0 \circ \lambda_*^0) \tag{3.6}$$

где $\mathrm{sgal}(\cdot)$ и $\mathrm{vect}(\cdot)$ — скалярная и векторная части кватерниона $(\cdot)$.

С другой стороны кватернионы $\mathbf{a}_\xi^*$ и $\mathbf{a}_z^*$ могут быть представлены в виде

$$\mathbf{a}_\xi = \cos(\Phi_*/2) + \mathbf{e}_\xi \sin(\Phi_*/2), \qquad \mathbf{a}_z = \cos(\Phi_*/2) + \mathbf{e}_z \sin(\Phi_*/2) \tag{3.7}$$

Из сопоставления (3.7) с (3.3)—(3.6) вытекают формулы для нахождения по известным кватернионам λ_0^0 и λ_*^0 угла Φ_* и единичного вектора $\mathbf{e}$ оси конечного поворота, переводящего твердое тело из его начального углового положения в требуемое конечное:

$$\cos(\Phi_*/2) = a_0, \qquad \sin^2(\Phi_*/2) = |\mathbf{a}_v^*|^2 = |\mathbf{v}_{v\xi}^*|^2 = |\mathbf{a}_{vz}^*|^2 \tag{3.8}$$

$$\mathbf{e}_\xi = (\sin\Phi_*/2)^{-1}\,\mathbf{a}_{v\xi}^* \tag{3.9}$$

$$\mathbf{e}_z = (\sin\Phi_*/2)^{-1}\,\mathbf{a}_{vz}^* \tag{3.10}$$

Формулы (3.9), (3.8), (3.4) позволяют вычислить проекции единичного вектора e на оси инерциальной системы координат ξ, а формулы (3.10), (3.8), (3.6) — на оси программной системы координат Z (направляющие косинусы вектора e в системах координат ξ и Z).

По определению единичный вектор e направляется в сторону, откуда поворот тела на угол $\Phi_* > 0$ наблюдается происходящим против хода часовой стрелки. Считая, что угол Φ_* изменяется в интервале $[0, 2\Pi]$, получаем, что угол $\alpha = \Phi_*/2$ лежит в первой или второй четвертях, поэтому угол α является в соответствии с (3.8) главным значением arccos a_0. Для этого значения угла α $\sin\alpha = \sin(\Phi_*/2) \geq 0$, поэтому направление вектора e определяется в соответствии с (3.9), (3.10) направлением вектора a_v^*. Исходя из сказанного и учитывая, что одному и тому же угловому положению твердого тела соответствует два значения кватерниона ориентации $+a^*$ и $—a^*$, алгоритм вычисления угла плоского эйлерова разворота и направляющих косинусов единичного вектора эйлеровой оси разворота может быть построен следующим образом: в соответствии с (3.8) вычисляется главное значение arccos $a_0 = \alpha$, при этом если окажется, что $\alpha \leq \Pi/2$, то угол Φ_* полагается равным 2α, а направляющие косинусы вектора e в системах координат ξ и Z находятся по формулам (3.9), (3.10). Если же окажется, что $\alpha > \Pi/2$, то угол Φ_* полагается равным $2\Pi — 2\alpha$, а направляющие косинусы вектора e вычисляются по формулам, отличающимся от (3.9), (3.10) знаками правых частей (правые части этих формул должны быть взяты со знаками «минус»).

Программное движение твердого тела из начального в требуемое конечное положение строим в виде эйлерова плоского вращения вокруг оси e, сохраняющей свою ориентацию в инерциальной системе координат ξ неизменной, с переменной по величине угловой скоростью. Вектор программной абсолютной угловой скорости ω^0 и вектор программного абсолютного углового ускорения ε^0 (программного управления) в этом случае будут направлены вдоль оси e и имеют вид

$$\omega^0(t) = \Phi^{\cdot}(t)\, e, \qquad \varepsilon^0(t) = \Phi^{\cdot\cdot}(t)\, e \tag{3.11}$$

где $\Phi(t)$ — программный угол поворота твердого тела вокруг оси e для текущего момента времени t.

Кватернион λ^0 программной ориентации твердого тела в инерциальной системе координат ξ для текущего момента времени t определяется в соответствии с (3.9), (3.10) и схемой поворотов

$$\xi \xrightarrow{\lambda^0(t)} Z, \quad \xi \xrightarrow{\lambda_0^0}, \qquad Z_0 \xrightarrow{a(t)} Z$$

формулами

$$\lambda^0(t) = a_\xi(t) \circ \lambda_0^0 = [\cos(\Phi(t)/2) + e_\xi \sin(\Phi(t)/2)] \circ \lambda_0^0 \tag{3.12}$$

$$\lambda^0(t) = \lambda_0^0 \circ a_z(t) = \lambda_0^0 \circ [\cos(\Phi(t)/2) + e_z \sin(\Phi(t)/2)] \tag{3.13}$$

$$\Phi(t_0) = 0$$

Проекции векторов $\omega^0(t)$ и $\varepsilon^0(t)$ на оси систем координат ξ и Z в соответствии с (3.11) находятся по формулам

$$\omega_\xi^0(t) = \Phi^{\cdot}(t)\, e_\xi, \qquad \varepsilon_\xi^0(t) = \Phi^{\cdot\cdot}(t)\, e_\xi \tag{3.14}$$

$$\omega_z^0(t) = \Phi^{\cdot}(t)\, e_z, \qquad \varepsilon_z^0(t) = \Phi^{\cdot\cdot}(t)\, e_z \tag{3.15}$$

где кватернионы e_ξ и e_z определяются формулами (3.9), (3.8), (3.4) и (3.10), (3.8), (3.6).

Таким образом, алгоритмы построения программного углового движения твердого тела в виде плоского эйлерова разворота и программного управления, использующие проекции векторов e, ω^0, ε^0 на оси инерциальной системы координат ξ, образуются соотношениями (3.12), (3.14), (3.9), (3.8), (3.4), а алгоритмы, использующие проекции векторов e, ω^0, ε^0 на оси программной системы координат Z — соотношениями (3.13), (3.15), (3.10), (3.8), (3.6). Траектория программного разворота твердого тела во времени описывается соотношением (3.12), ((3.13)), программная абсолютная угловая скорость — первым соотношением (3.14) ((3.15)), а програмное абсолютное угловое ускорение (программное управление) — вторым соотношением (3.14) ((3.15)).

Соотношения (3.12)—(3.15) необходимо дополнить законами изменения во времени угла Ф, алгебраических величин угловой скорости $\Phi^{\cdot}$ и углового ускорения $\Phi^{\cdot\cdot}$ плоского разворота, т. е. необходимо дополнить построенными их тех или иных соображений зависимостями $\Phi = \Phi(t)$, $\Phi^{\cdot} = \Phi^{\cdot}(t)$, $\Phi^{\cdot\cdot} = \Phi^{\cdot\cdot}(t)$. Эти зависимости строятся либо на основе принципа максимума Понтрягина [1], когда необходимо реализовать оптимальный по быстродействию разворот твердого тела, либо в виде кубических полиномов (сплайнов) [3], когда задано время разворота $T = t_* - t_0$ и ограничения на максимально допустимую угловую скорость и угловое ускорение программного разворота.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. *Плотников П. К., Сергеев А. Н., Челноков Ю. Н.* Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. N 5. С. 9—18.
3. *Fu K. S., Gonzalez R. C., Lee C. S. G.* Robotics: control, sensing, vision and intelligence. McGraw-Hill, 1987. 624 p.
4. *Yuan J. S—C.* Closed-loop manipulator control using quaternion feedback//IEEEJ. Rob. and Autom. 1988. No. 4. P. 434—440.

Саратов

Поступила в редакцию
10.XII.1991