

УДК 531.39

© 1993 г. А. Ю. ИШЛИНСКИЙ, В. А. СТОРОЖЕНКО, М. Е. ТЕМЧЕНКО

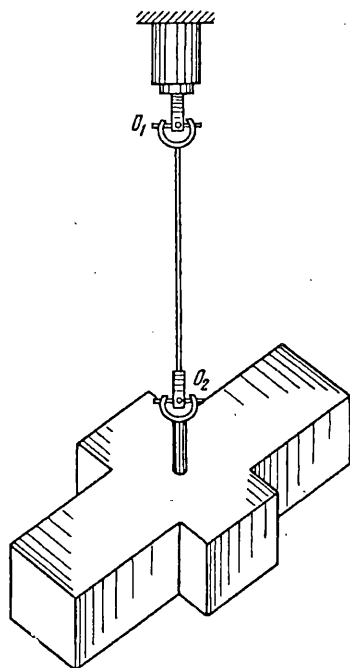
К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ФОРМ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ПОДВЕШЕННОГО НА СТЕРЖНЕ ДИНАМИЧЕСКИ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

Задача о движении твердого тела с трехосным эллипсоидом инерции, подвешенного на невесомом недеформируемом стержне, представляет большой как практический, так и теоретический интерес с точки зрения своеобразия ветвления кривых стационарных движений и распределения на них устойчивости. Эта задача являлась предметом исследования в частности в работах [1—3]. При этом были получены [3] достаточные условия устойчивости стационарных движений методом, основанным на применении теоремы Рауса [4]. Этот метод, состоящий в изучении свойств второй вариации некоторой функции W_* , не требует исследования дифференциальных уравнений движения, и в ряде случаев весьма эффективен. В то же время этот метод не дает полной картины распределения устойчивости на ветвях стационарных движений. В частности, он оставляет открытым вопрос об устойчивости довольно большого класса стационарных движений с четной степенью неустойчивости. Для окончательного решения вопроса об их устойчивости приходится все же прибегать к исследованию полных уравнений движения или хотя бы уравнений первого приближения. В последнем случае речь, разумеется, может идти лишь о необходимых условиях устойчивости, и задача сводится к исследованию свойств корней соответствующего характеристического уравнения, что часто является непростым делом. В этом смысле оказываются полезными методы, основанные на графоаналитических исследованиях [5]. В частности, с их помощью может быть решен вопрос об устойчивости упомянутых выше форм стационарного движения с четной степенью неустойчивости. Ниже это продемонстрировано на примере исследования движения тела, подвешенного на стержне.

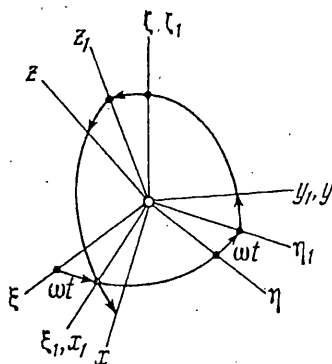
1. Итак, рассмотрим движение твердого тела с неравными главными центральными моментами инерции ($A \neq B \neq C \neq A$), прикрепленного посредством шарнира Гука к невесомому недеформируемому стержню, другой конец которого O_1 посредством такого же шарнира прикреплен к оси ротора вертикально поставленного мотора (фиг. 1). Центр нижнего шарнира Гука O_2 расположен на одной из главных центральных осей инерции тела. Принимается, что мотор сообщает телу вращение с постоянной угловой скоростью ω .

Введем неподвижную систему координат $\xi\eta\zeta$ с началом в центре верхнего шарнира O_1 и вертикально направленной вверх осью ζ , а также вращающуюся с постоянной угловой скоростью ω систему $\xi_1\eta_1\zeta_1$ с тем же началом. Тогда положение невесомого стержня относительно системы координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$ можно определить при помощи двух углов γ и θ так, как показано на (фиг. 2). Аналогичные углы γ_1 и θ_1 определяют положение главной центральной оси инерции тела z относительно системы координат $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'$ с началом в центре нижнего шарнира O_2 и осями, параллельными соответствующим осям вращающейся системы координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$.

Уравнения возмущенного движения тела вокруг положения равновесия, в котором невесомый стержень и главная центральная ось инерции тела z совпадают с неподвижной вертикалью ζ с учетом членов не выше первого порядка малости



Фиг. 1



Фиг. 2

относительно углов γ , θ , γ_1 , θ_1 и их производных по времени имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m l^2 \ddot{\gamma} + m l a \ddot{\gamma}_1 - 2 \omega m l (l \dot{\theta} + a \dot{\theta}_1) + m l (g - l \omega^2) \gamma - m l a \omega^2 \gamma_1 &= 0 \\ m l^2 \ddot{\theta} + m l a \ddot{\theta}_1 + 2 \omega m l (l \dot{\gamma} + a \dot{\gamma}_1) + m l (g - l \omega^2) \theta - m l a \omega^2 \theta_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$m a l \ddot{\gamma} + A^\circ \ddot{\gamma}_1 - 2 \omega m a l \dot{\theta} - (A^\circ + B^\circ - C) \omega \dot{\theta}_1 - m a l \omega^2 \gamma + [m g a + (C - B^\circ) \omega^2] \gamma_1 = 0$$

$$m a l \ddot{\theta} + B^\circ \ddot{\theta}_1 + 2 \omega m a l \dot{\gamma} + (A^\circ + B^\circ - C) \omega \dot{\gamma}_1 - m a l \omega^2 \theta + [m g a + (C - A^\circ) \omega^2] \theta_1 = 0$$

$$(A^\circ = A + m a^2; B^\circ = B + m a^2)$$

Здесь m — масса тела, l — длина невесомого стержня, a — расстояние между центром нижнего шарнира Гука O_2 и центром масс тела.

Систему (1.1) можно представить в матричной форме

$$D \ddot{x} + G \dot{x} + F x = 0, \quad (1.2)$$

где матрица D , составленная из коэффициентов при вторых производных по времени от координат $x = (\gamma, \theta, \gamma_1, \theta_1)$, определяет инерционные свойства данной механической системы; кососимметрическая матрица G , включающая коэффициенты при первых производных, соответствует действующим на систему гироскопическим силам и, наконец, симметрическая матрица F , элементами которой являются коэффициенты при самих координатах $\gamma, \theta, \gamma_1, \theta_1$, описывает действие консервативных сил.

При исследовании устойчивости тривиального решения уравнения (1.2) предположим вначале, что система находится под воздействием только консервативных сил. Тогда задача сводится к изучению свойств корней векового уравнения [6]:

$$\det \|F - \lambda E\| = 0 \quad (1.3)$$

которое в силу уравнений движения (1.1) разбивается на два однотипных уравнения

$$\begin{aligned} & \kappa^2 - [mg(l+a) - \omega^2(mI^2 + J_k - C)]\kappa + ml(g - l\omega^2)[mga - (J_k - C)\omega^2] - \\ & - m^2a^2I^2\omega^4 = 0, \quad (k = 1, 2; J_1 = A^0; J_2 = B^0). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Определим точки бифуркации, т. е. те значения угловой скорости ω , при которых хотя бы один из корней векового уравнения (1.3) обращался в нуль. Очевидно, при этих значениях ω должны обращаться в нуль свободные члены в уравнениях (1.4). Отсюда получаем

$$(\omega_k^\pm)^2 = \frac{g}{l} \frac{mal + J_k - C \pm \sqrt{(mal + J_k - C)^2 - 4mal(J_k - ma^2 - C)}}{2(J_k - ma^2 - C)} \quad (k = 1, 2) \quad (1.5)$$

Количество действительных значений ω , определяемых равенством (1.5), зависит от соотношений между главными центральными моментами инерции тела. Например, при $A > B > C$ (ось z — большая ось инерции тела) имеется четыре точки бифуркации, связанные неравенствами

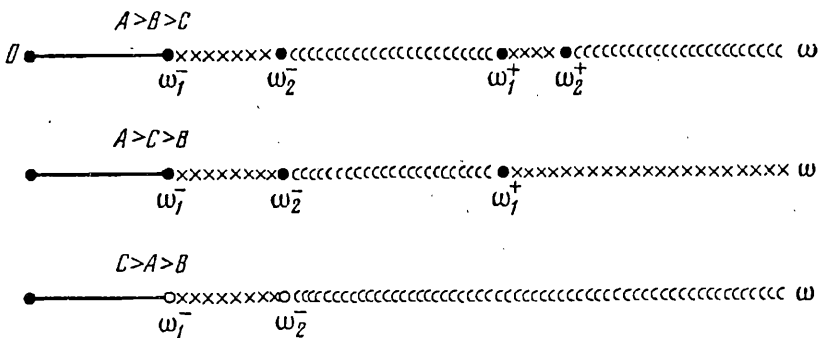
$$\omega_1^- < \omega_2^- < \omega_1^+ < \omega_2^+ \quad (1.6)$$

Несложный анализ коэффициентов уравнений (1.4) показывает, что в интервале $(0, \omega_1^-)$ все четыре корня векового уравнения положительны. Движение системы является устойчивым, и эта устойчивость вековая, так как она не может быть нарушена добавлением гироскопических и диссипативных сил [6]. При $\omega \in (\omega_1^-, \omega_2^-)$ один из корней κ становится отрицательным, т. е. по Пуанкаре показатель неустойчивости χ при этом равен единице. Движение является неустойчивым и, согласно теореме Томсона — Тэта [7], стабилизировать движение нельзя никакими гироскопическими и диссипативными силами. При $\omega \in (\omega_2^-, \omega_1^+)$ уже два корня векового уравнения являются отрицательными, т. е. показатель неустойчивости χ равен двум. В этом случае вопрос об устойчивости остается открытым. Его следует решать с учетом гироскопических членов в уравнениях (1.1). Продолжая и далее этот процесс, определим для каждого из интервалов угловой скорости количество отрицательных корней векового уравнения, тем самым решив вопрос об устойчивости на всем интервале $\omega \in (0, \infty)$. Такое решение представлено на фиг. 3 для трех характерных вариантов зависимостей между главными центральными моментами инерции тела. Шпильными линиями выделены интервалы угловой скорости с вековой устойчивостью, крестиками обозначены значения, при которых движение неустойчиво и, наконец, при значениях угловой скорости, принадлежащих интервалам, обозначенным кружочками, требуется дополнительное исследование вопроса об устойчивости.

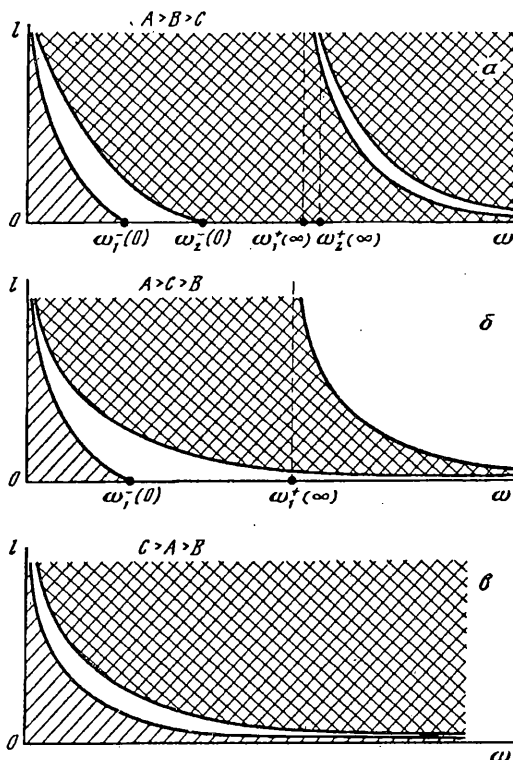
Заметим, что эта картина распределения устойчивости, полученная из рассмотрения уравнений первого приближения (1.1), полностью совпадает с достаточными условиями устойчивости, полученными в [3] при использовании теоремы Рауса.

Так как точки бифуркации заданы в явном виде посредством формулы (1.5), то полученное распределение устойчивости вертикального вращения тела можно изобразить в пространстве параметров ω, l, a, A, B, C . Построим, например, области устойчивости на плоскости (ω, l) при фиксированных значениях остальных параметров a, A, B, C . Для этого исследуем правую часть равенств (1.5) как функцию l . На концах интервала $l \in [0, \infty)$ получим следующие значения:

$$\omega_k^-(0) = \begin{cases} \frac{mga}{J_k - C} & \text{при } J_k > C \\ \infty & \text{при } J_k < C \end{cases}; \quad \omega_k^-(\infty) = 0$$



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\omega_k^+(0) = \infty; \quad \omega_k^+(\infty) = \frac{mga}{J_k - ma^2 - C} \quad (k = 1, 2; J_1 = A + ma^2; J_2 = B + ma^2) \quad (1.7)$$

Исследуя производную от правой части равенства (1.5) по параметру l , приходим к выводу, что все функции $\omega_k^\pm(l)$ ($k = 1, 2$) являются монотонными. Функции $\omega_k^-(l)$ имеют при $J_k < C$ асимптоту $l = 0$.

В результате для различных соотношений между моментами инерции тела A, B, C получим на плоскости (ω, l) картины распределения устойчивости, представленные на фиг. 4. Незаштрихованные участки плоскости (ω, l) соответствуют неустойчивым формам движения тела, одинарной штриховкой показаны области вековой устойчивости, и, наконец, в областях с двойной штриховкой применяемый метод исследования не дает ответа на вопрос об устойчивости движения.

2. Для более полного изучения устойчивости рассматриваемого движения обратимся к системе уравнений (1.1), решение которой будем искать в виде

$$\gamma = \gamma^{\circ} e^{i\lambda t}, \quad \theta = \theta^{\circ} e^{i\lambda t} \quad (2.1)$$

В результате характеристическое уравнение, соответствующее совокупности уравнений (1.1), можно представить в следующей дробной для дальнейшего исследования форме:

$$(1 - z)^2 p(z; \nu) l^2 + q(z; \nu) \nu l + r(z; \nu) \nu^2 = 0 \quad (2.2)$$

$$p(z; \nu) = ABz^2 - [AB + (A - C)(B - C) + (A + B)mva]z + \quad (2.3)$$

$$+ (A - C - mva)(B - C - mva)$$

$$q(z; \nu) = -[2AB + ma^2(A + B)]z^3 + \{2[(A - C)(B - C) + (A + B)mva] +$$

$$+ ma^2[A + B + 2(C + mva)]\}z^2 + [2AB + 4mva(A + B - C) +$$

$$+ (mva)^2]z - \{2(B - C - mva)(A - C - mva) + ma^2(A + B - 2C - 2mva)\}$$

$$r(z; \nu) = A^{\circ}B^{\circ}z^2 - [A^{\circ}B^{\circ} + (A^{\circ} - C^{\circ})(B^{\circ} - C^{\circ}) + (A^{\circ} + B^{\circ})mva]z +$$

$$+ (A^{\circ} - C^{\circ} - mva)(B^{\circ} - C^{\circ} - mva)$$

Необходимым условием устойчивости исследуемого стационарного движения твердого тела является согласно (2.1) условие вещественности всех корней z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) характеристического уравнения (2.2).

Применим графоаналитический способ [5] исследования корней уравнения (2.2) в зависимости от изменения двух характерных параметров — длины стержня l и параметра $\nu = g/\omega^2$ — при различных соотношениях, связывающих главные центральные моменты инерции тела A, B, C и расстояние a .

Уравнение (2.2) разрешим относительно l . Имеем

$$l^{\pm}(z; \nu) = \nu \frac{-q(z; \nu) \pm \sqrt{q^2(z; \nu) - 4(1 - z)^2 p(z; \nu) r(z; \nu)}}{2(1 - z)^2 p(z; \nu)} \quad (2.4)$$

Будем рассматривать здесь l как функцию z , и построим ее график. Тогда, согласно сказанному выше, исследуемое движение тела, характеризуемое заданными величинами ν° и l° , будет устойчивым, когда на плоскости $(z; D)$ прямая $l = l^{\circ}$ будет пересекать кривые $l^{\pm}(z; \nu^{\circ})$ в четырех точках, причем все они должны находиться в правой полуплоскости.

Обратимся к построению функций (2.4) при использовании соотношений (2.3). Заметим, прежде всего, что подкоренное выражение в (2.4) может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} \Delta(z; \nu) &= q^2(z; \nu) - 4(1 - z)^2 p(z; \nu) r(z; \nu) = \\ &= \nu^2 \{4z [2(R_1 R_3 - z R_2^2) + ma^2(1 - z)^2 R_2]^2 + (ma^2)^2 (1 - z)^4 (R_1 - R_3)^2\} \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$R_1 = -Az - (B - C - mva), \quad R_2 = A + B - C, \quad R_3 = -Bz - (A - C - mva) \quad (2.6)$$

Из выражения (2.5) следует, что подкоренное выражение положительно при $z > 0$ и обращается в нуль только в случае, когда $z = 1$ и $\nu = 2(A + B - C)/(ma)$. Следовательно, функции $l^{+}(z; \nu)$ и $l^{-}(z; \nu)$ могут иметь лишь одну общую точку при только что упомянутых значениях z и ν .

Непосредственно из формул (2.4) и (2.3) следует, что кривые $l^{\pm}(z; \nu)$ имеют двойную асимптоту $z = 1$. Дальнейший анализ кривых $l^{\pm}(z; \nu)$ зависит от характера функций $p(z; \nu)$, $q(z; \nu)$, $r(z; \nu)$, в частности, их знаков и взаимного расположения нулей. При этом важное значение имеют соотношения между мо-

ментами инерции A, B, C и $A^\circ, B^\circ, C^\circ$. Примем, что вращение происходит вокруг малой оси инерции тела, т. е. выполняются условия $C > A > B$.

Рассмотрим вначале функцию $p(z; \nu)$, определяющуюся первым равенством (2.3). Для исследования нулей этой функции получим уравнение

$$p(z; \nu) = (m\nu a)^2 - Q(z) m\nu a + R(z) = 0 \quad (2.7)$$

$$Q(z) = A + B - 2C + (A + B)z \quad (2.8)$$

$$R(z) = (1 - z) [(A - C)(B - C) - ABz]$$

Разрешая уравнение (2.7) относительно ν , получим

$$\nu_p^\pm = \frac{1}{2ma} [Q(z) \pm \sqrt{Q^2(z) - 4R(z)}] \quad (2.9)$$

Очевидно, что нулями функции $p(z; \nu)$ при $\nu = \nu^\circ$ будут точки пересечения на плоскости (z, ν) прямой $\nu = \nu^\circ$ с кривыми (2.9).

Исследуем функции $\nu_p^\pm(z)$. Непосредственно из соотношений (2.9) с учетом (2.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} \nu_p^+(0) &= (A - C)/(ma), & \nu_p^-(0) &= (B - C)/(ma) \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \nu_p^+(z) &= \infty, & \lim_{z \rightarrow \infty} \nu_p^-(z) &= \infty \end{aligned} \quad (2.10)$$

Учитывая последние равенства, а также то обстоятельство, что уравнение (2.7) не может иметь более двух корней, приходим к выводу, что при $A > B$ функция $\nu_p^+(z)$ должна быть монотонной, а функция $\nu_p^-(z)$ может иметь один минимум. Последнее будет в том случае, если первая производная по z от этой функции при $z = 0$ будет отрицательной. Это условие с использованием равенств (2.9) и (2.10) приводится к виду

$$B^2 + C^2 + 3AB - 2C(A + B) = R^* > 0 \quad (2.11)$$

Несимметричное тело, компоненты тензора инерции которого удовлетворяют неравенству (2.11), по аналогии с [8], будем называть «толстым». Именно для такого тела функция $\nu_p^-(z)$ будет иметь минимум. Для «тонкого» твердого тела ($R^* < 0$) она окажется монотонной.

Основываясь на полученных данных о свойствах функций $\nu_p^\pm(z)$, нетрудно построить примерные их графики. Из их анализа убеждаемся, что в рассматриваемом случае ($C > A > B$) для всех значений $\nu > 0$ функция $p(z; \nu)$ будет иметь два вещественных нуля как для «толстого», так и для «тонкого» тела.

Аналогично исследуются нули функций $q(z; \nu)$ и $r(z; \nu)$. Оказалось, что все три функции $\nu_p^-(z)$, $\nu_q^-(z)$ и $\nu_r^-(z)$ имеют общий нуль в точке $z = 1$. Кроме того, их производные в этой точке равны между собой, именно:

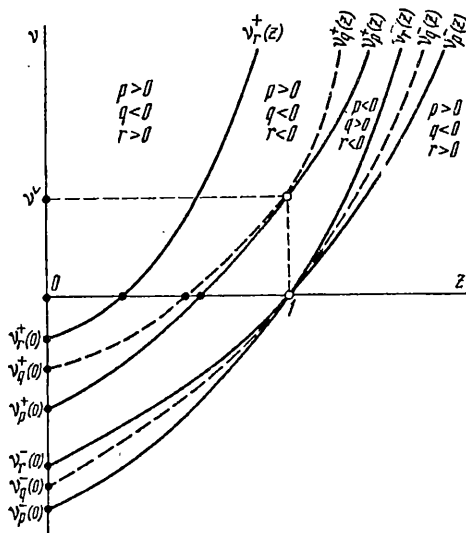
$$[\nu_p^-(z)]' = [\nu_q^-(z)]' = [\nu_r^-(z)]' = C/(ma) \quad (2.12)$$

В точке $z = 1$ кривые $\nu_q^+(z)$ и $\nu_p^+(z)$ имеют общую касательную. При этом значения самих функций в точке $z = 1$ определяются из формулы

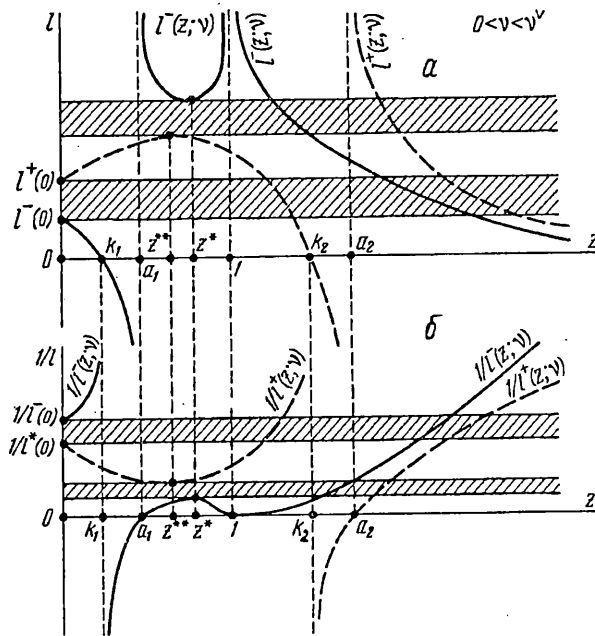
$$\nu_q^+(1) = \nu_p^+(1) = 2(A + B - C)/(ma) \quad (2.13)$$

Для дальнейшего решения задачи необходимо определить взаимное расположение функций $\nu_p^\pm(z)$, $\nu_q^\pm(z)$ и $\nu_r^\pm(z)$. Здесь существенными оказываются соотношения между моментами инерции A, B, C и введенным выше параметром a . Возможны следующие пять вариантов при основном предположении $C > A > B$:

$$\begin{aligned} 1) & C^\circ = C > A^\circ = A + ma^2 > A > B^\circ = B + ma^2 > B \\ 2) & C^\circ > A^\circ > B^\circ > A > B, & 3) & A^\circ > C^\circ > A > B^\circ > B \end{aligned} \quad (2.14)$$



Фиг. 5



Фиг. 6

4) $A^\circ > C^\circ > B^\circ > A > B$, 5) $A^\circ > B^\circ > C^\circ > A > B$

Рассмотрим первый из вариантов, приведенных в (2.14). Можно установить здесь выполнение неравенств

$$v_p^+(z) < v_q^+(z) < v_r^+(z), \quad v_p^-(z) < v_q^-(z) < v_r^-(z) \quad (2.15)$$

Примерный вид графиков функций $v_p^\pm(z)$, $v_q^\pm(z)$, $v_r^\pm(z)$ в рассматриваемом случае представлен на фиг. 5. На этом же рисунке указаны области положительных и отрицательных значений соответствующих функций $p(z; v)$, $q(z; v)$ и $r(z; v)$.

Используя фиг. 5, перейдем к построению графиков функций (2.4) в зависимости от переменного $z > 0$ при различных значениях v .

Рассмотрим вначале изменение переменной $v = g/\omega^2$ в интервале $(0, v^v)$, где v^v — ордината точки пересечения функций $v_q^+(z)$ и $v_p^+(z)$, определяемая формулой (2.13).

Исследуя первую производную от функций $l^\pm(z; v)$, устанавливаем, что

$$[l^+(0, v)]'_z > 0, \quad [l^-(0, v)]'_z < 0 \quad (2.16)$$

Отсюда следует, что функция $l^-(z, v)$ с увеличением z уменьшается, начиная с положительного значения

$$l^-(0, v) = v \frac{A^\circ - C^\circ - mva}{A - C - mva} \quad (2.17)$$

и в точке k_1 (фиг. 6, а) обращается в нуль (эта точка — нуль функции $r(z; v)$). При $k_1 < z < a_1$ функция $l^-(z; v)$, будучи отрицательной, стремится к асимптоте $z = a_1$, где через a_1 обозначен нуль функции $p(z; v)$ (фиг. 6, а). В интервале $a_1 < z < 1$ функция $l^-(z, v)$ положительна, на концах интервала асимптотически стремится к ∞ . Это означает, что существует ее минимум в некоторой точке $z^* \in (a_1, 1)$. В интервале $(1, \infty)$, как будет показано ниже, функция $l^-(z; v)$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0.

Функция $l^+(z; v)$, начиная с положительного значения

$$l^+(0; v) = v \frac{B^\circ - C^\circ - mva}{B - C - mva} \quad (2.18)$$

при увеличении z растет, но при $z = k_2 > 1$ (это значение является нулем функции $r(z; v)$) обращается в нуль. Следовательно, в интервале $z \in (0, k_2)$ эта функция обязательно имеет максимум в некоторой точке $z^{**} \in (0, k_2)$.

При $z \in (k_2, a_2)$ (a_2 — нуль функции $p(z; v)$) функция $l^+(z; v)$, будучи отрицательной, монотонно уменьшается, стремясь асимптотически к $-\infty$. Наконец, при $z \in (a_2, \infty)$ функция $l^+(z; v)$, аналогично функции $l^-(z; v)$, монотонно убывает от ∞ до нуля. Примерные графики этих двух функций представлены на (фиг. 6, а). Из его анализа видно, что при $0 < v < v^v$ для всех $0 < l^\circ < l^-(0, v^v)$ прямая $l = l^\circ$ пересекает график функций $l^\pm(z; v)$ в четырех точках. Это означает, что все четыре корня характеристического уравнения действительны и положительны. Движение тела устойчиво.

При $l^-(0; v) < l^\circ < l^+(0; v)$ точек пересечения в области $z > 0$ лишь три. Движение неустойчиво.

Далее для всех $l^\circ \in (l^+(0; v); l^+(z^{**}, v))$ и $l^\circ \in (l^-(z^*, v); \infty)$ движение тела станет устойчивым, а при $l^\circ \in (l^+(z^{**}, v), l^-(z^*, v))$ имеет место неустойчивое движение тела.

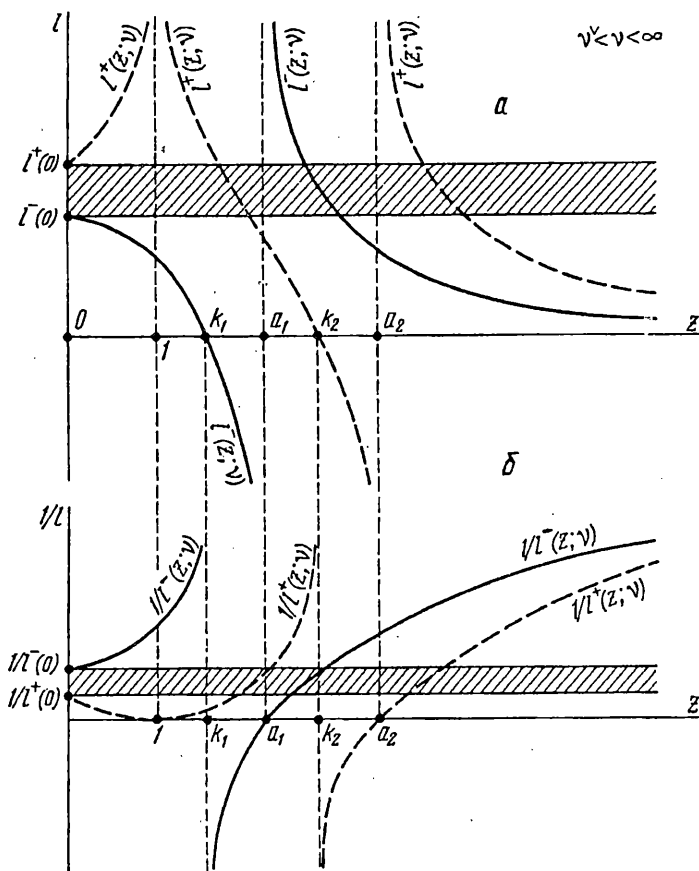
Аналогично строятся графики функций $l^\pm(z; v)$ для $v^v < v < \infty$. Примерный их вид представлен на (фиг. 7, а). Из их рассмотрения убеждаемся, что в этом случае движение тела будет устойчивым для всех l за исключением интервала $l^-(0; v) < l^\circ < l^+(0; v)$, где движение, как и в предыдущем случае, является неустойчивым.

Итак, при любом $v \in (0, \infty)$ имеется интервал изменения параметра

$$l^-(0; v) < l < l^+(0; v) \quad (2.19)$$

где движение является неустойчивым. Используя формулы (2.17) и (2.18), на концах этого интервала получаем

$$l = v \frac{A^\circ - C^\circ - mva}{A - C - mva} \quad (2.20)$$



Фиг. 7

и

$$l = \nu \frac{B^0 - C^0 - mva}{B - C - mva} \quad (2.21)$$

Используя обозначение $\nu = g/\omega^2$, убеждаемся в том, что равенства (2.17) и (2.18) совпадают с ранее полученными уравнениями для определения бифуркационных значений угловой скорости (1.5). Отсюда следует, что данный интервал неустойчивости движения при всех $\nu \in (0, \infty)$ совпадает с обнаруженной ранее областью неустойчивого движения тела, показанной для этого случая ($C > A > B$) на (фиг. 4, в). Кроме того, как оказалось, применяемый здесь графоаналитический метод исследования показывает, что в области, где вопрос об устойчивости оставался открытым (на фиг. 4, в показана двойной штриховкой), имеется еще одна область неустойчивости. Она существует при $\nu < \nu^* = 2(A + B - C)/(ma)$ и определяется неравенствами

$$l^+(z^{**}; \nu) < l < l^-(z^*; \nu) \quad (2.22)$$

Следует отметить, что изложенные выше результаты для случая $a > 0$ (точка подвеса тела к стержню находится выше его центра масс) полностью относятся к случаю 2), указанному в (2.14). Случаи же 3) — 5) рассматриваются аналогично изложенному в настоящей статье.

3. В предыдущем пункте при построении графика функции (2.4) отмечалось, что ветви $l^+(z; \nu)$ и $l^-(z; \nu)$ в интервале изменения переменного $z \in (1, \infty)$ и

параметра $v \in (0, v^v)$ монотонно убывают от ∞ до нуля (фиг. 6, а). Однако, в принципе, не исключено, что для некоторых фиксированных значений функции (2.4) на интервале $(l^+(z^{**}; v); l^-(z^*; v))$ возможно существование четырех ее действительных нулей. Последнее будет означать, что на этом интервале может иметь место устойчивое движение тела. Покажем, что это предположение в рассматриваемом случае не оправдывается. Для доказательства рассмотрим полином

$$F(z; l, v) = (1 - z)^2 p(z; v) l^2 + q(z; v) vl + r(z; v) v^2 \quad (3.1)$$

который совпадает с левой частью характеристического уравнения (2.2). Покажем, что при изменении переменного z в интервале $(1, \infty)$ и параметров l и v , пробегающих соответственно интервалы (l^v, ∞) и $(0, v^v)$ (l^v — значение положительной ветви функции (2.4) при $z = 1$, v^v , как уже упоминалось, равно $\frac{1}{2}(A + B - C)/(ma)$), функция (2.4) будет иметь два и только два действительных корня (см. фиг. 6, а). Последнее и будет доказательством упомянутого выше утверждения.

Воспользуемся теоремой Бюдана — Фурье [9]. Согласно ее условиям, составим последовательность из полинома (3.1) и его производных по переменному z , именно

$$F(z; l, v), F'(z; l, v), F''(z; l, v), F'''(z; l, v), F^{IV}(z; l, v) \quad (3.2)$$

Обозначим через $S(1)$ и $S(\infty)$ соответственно число перемен знаков в ряду (3.2) при $z = 1$ и $z = \infty$ — началу и окончанию интервала $(1, \infty)$, в котором ищется количество корней полинома (3.1). Тогда число корней этого полинома в интервале $(1, \infty)$, подсчитываемых столько раз, какова их кратность, равно разности $S(1) - S(\infty)$ или меньше ее на четное число раз.

При использовании равенства (3.1) и соотношений (2.3) легко убеждаемся в том, что $S(\infty)$ равно нулю.

Для нахождения $S(1)$ определим, прежде всего при $z = 1$, знак полинома $F(z; l, v)$. Принимая во внимание равенства (3.1) и (2.2) и проводя соответствующие преобразования, находим

$$F(1; l, v) = v^2 \{ (v - 4l) [mva - 2(A + B - C)] - 4vma^2 \} \quad (3.3)$$

Приравняем правую часть соотношения (3.3) нулю и разрешим полученное равенство относительно l . Будем иметь тогда

$$l = \frac{v [mva - 2(A + B - C) - 4ma^2]}{4 [mva - 2(A + B - C)]} \quad (3.4)$$

Рассматривая l как функцию v и построив ее график, убеждаемся, что на интервале $(0, v^v)$ геометрическое место нулей функции (3.4) представляет собой кривую, монотонно стремящуюся от нуля к своей асимптоте $v = v^v$. Эта кривая, как легко убедиться, представляет собой не что иное, как значение функции $l^+(z; v)$ при $z = 1$, т. е. $l^v(v)$. Оказывается, что выше этой кривой функция (3.3) будет всегда положительной, ниже — отрицательной.

Рассмотрим теперь вторую производную полинома (3.1). После соответствующих преобразований получим

$$F''(z; l, v) \Big|_{z=1} = 2v \{ ma [mva - 2(A + B - C)] l^2 - 2 [2AB - (A + B) mva + C(A + B - C)] l + v [2AB + ma^2(A + B + ma^2)] \} \quad (3.5)$$

Аналогично предыдущему, приравняем соотношение (3.5) нулю и разрешим полученное равенство относительно l . Имеем

$$l = [Q^v \pm \sqrt{Q^{v^2} - 4P^v R^v}] / (2P^v) \quad (3.6)$$

где

$$P^v = ma [mva - 2(A + B - C)];$$

$$Q^v = 2 [2AB - (A + B) mva + C(A + B - C)]$$

$$R^v = v [2AB + ma^2(A + B + ma^2)] \quad (3.7)$$

Вновь рассматривая l как функцию v , построим ее график. Оказывается, что при его построении существенное значение имеет знак выражения Q^v при $v = v^v$. Подставив значение $v = v^v$ во второе выражение (3.7), убеждаемся, что $Q^v(v^v)$ отрицательно для всех значений C , меньших величины C_1 , и положительно, если $C_1 < C < A + B$. Здесь A, B, C , как упоминалось, главные центральные моменты инерции тела, а C_1 — меньший корень уравнения

$$-C^2 + (3A + 3B + ma^2)C - [2(A^2 + AB + B^2) + ma^2(A + B)] = 0 \quad (3.8)$$

Анализ графика, построенного для функции (3.6); показывает, что при $Q^v(v^v) < 0$ на интересующем нас интервале $(0, v^v)$ изменения v и при $l > 0$ будет располагаться лишь отрицательная ветвь функции (3.6), представляющая собой монотонную кривую, возрастающую от 0 до ∞ и имеющую своей асимптотой прямую $v = v^v$. При этом положительная ветвь функции (3.6) будет располагаться ниже оси абсцисс.

Если упомянутое выше выражение $Q^v(v^v) > 0$, то легко убедиться, анализируя график функции (3.6), что для всех $l > 0$ и $v \in (0, v^v)$ будет существовать лишь положительная ветвь функции (3.6), монотонно возрастающая от нуля, но уже до некоторого фиксированного значения.

Как в случае $Q^v(v^v) < 0$, так и при $Q^v(v^v) > 0$ в интервале $(0, v^v)$ для всех $l > 0$ выше упомянутых монотонных кривых функция (3.5) будет отрицательной, ниже — положительной.

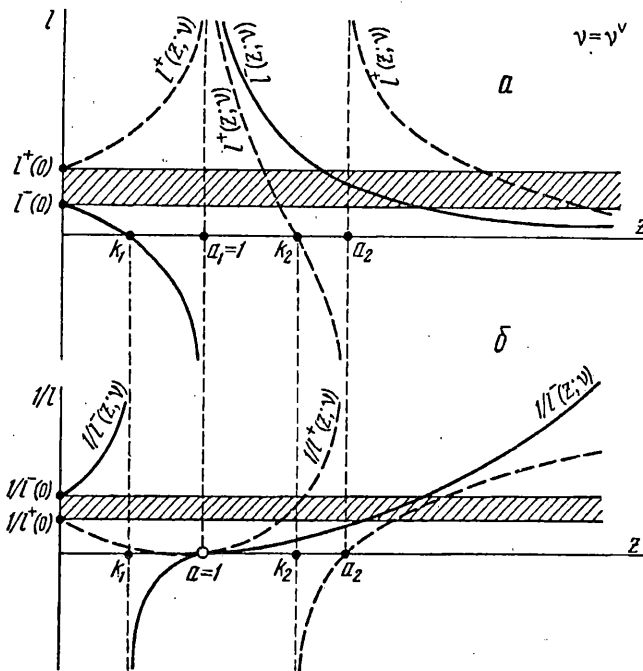
Используя выражения (3.3) и (3.5), убеждаемся, что в случае, когда $Q^v(v^v) < 0$ на интересующем нас интервале изменения $v \in (0, v^v)$ и $l \in (l^v, \infty)$ кривая, являющаяся геометрическим местом нулей функции (3.3) будет располагаться выше аналогичной кривой функции (3.5). В результате при $z = 1$ и $v \in (0, v^v)$ для всех $l \in (l^v, \infty)$ в ряду (3.2) полином $(F(z; l, v))$ будет положительным, а его вторая производная — отрицательной.

Используя далее соотношения (3.1), (2.3), убеждаемся, что в ряду (3.2) четвертая производная $(F^{IV}(z; l, v))$ при $z = 1$ всегда положительна для любых значений v и l .

Учитывая все вышеизложенное, без исследования первой и третьей производных в ряду (3.2) легко убеждаемся, что в рассматриваемом случае ($Q^v(v^v) < 0$) искомая величина $S(1)$ может быть равна только двум. А это, согласно сказанному выше, будет означать, что в данном случае на интересующем нас интервале $l \in (l^+(z^{**}, v), l^-(z^*, v))$ функция (2.4) будет иметь лишь два действительных корня, как это показано на фиг. 6, а.

Исследование количества корней функции (2.4) на интервале $(l^+(z^{**}, v), l^-(z^*, v))$ во втором случае (при $Q^v(v^v) > 0$) более громоздко. Оно требует дополнительно к изложенному выше определению знаков первой и третьей производных полинома $F(z; l, v)$ в ряду (3.2). Тем не менее, вновь при использовании теоремы Бюдана — Фурье довольно просто доказывается, что на упомянутом выше интервале $(l^+(z^{**}, v); l^-(z^*, v))$ и в данном случае функция (2.4) будет иметь лишь два действительных корня. В результате на основании всего изложенного выше можно утверждать, что при $v \in (0, v^v)$ неустойчивость движения твердого тела на интервале $(l^+(z^{**}, v); l^-(z^*, v))$ доказана.

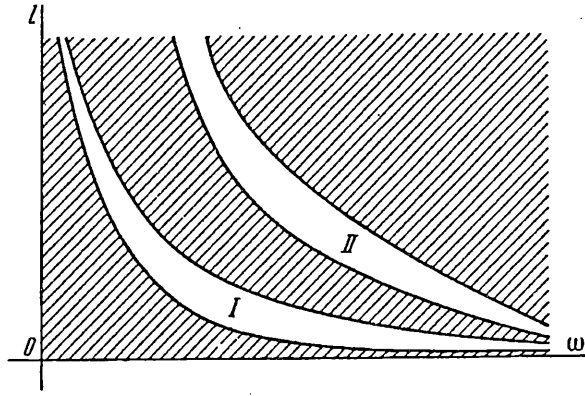
4. Представляет определенный интерес рассмотрение процесса видоизменения графиков функций $l^{\pm}(z; v)$, представленных на фиг. 6, а и 7, а, при непрерывном изменении параметра $v \in (0, \infty)$. С этой целью дополним эти два рисунка третьим



Фиг. 8

(фиг. 8, а), где изображены графики упомянутых функций при $\nu = \nu^v$. Из анализа этих рисунков следует, что при увеличении параметра ν от 0 до ∞ характерные точки k_1, k_2, a_1, a_2 , определяющие нули и асимптоты функций $l^\pm(z; \nu)$, сдвигаются вправо. При значении $\nu = \nu^v$ (фиг. 8, а) происходит совпадение асимптоты $z = a_1$ функции $l^-(z; \nu)$ с ее двойной асимптотой $z = 1$. Однако последняя становится двойной асимптотой уже для функций $l^+(z; \nu)$. Другими словами, при значении параметра $\nu = \nu^v$ происходит как бы передача двойной асимптоты $z = 1$ от функции $l^-(z; \nu)$ к функции $l^+(z; \nu)$. С другой стороны, при изменении параметра ν от 0 до ν^v увеличиваются максимум функции $l^-(z; \nu)$ и минимум функции $l^+(z; \nu)$; при $\nu = \nu^v$ оба эти экстремума уходят в бесконечность. В результате кривые $l^+(z; \nu)$ и $l^-(z; \nu)$ имеют одну общую точку на бесконечности. Это именно та общая точка, о которой шла речь в п. 2. Вместе с тем при $\nu = \nu^v$ уходит в бесконечность (т. е. исчезает) и зона неустойчивости, находящаяся между этими экстремумами и определяемая неравенствами (2.21).

Для более наглядного рассмотрения процесса возникновения или исчезновения данной зоны неустойчивости рассмотрим дополнительно графики функций $1/l^\pm(z; \nu)$, представленные на фиг. 6, б — 8, б. Естественно, при этом нули функций $l^\pm(z; \nu)$ определяют асимптоты функций $1/l^\pm(z; \nu)$ и наоборот. При $0 < \nu < \nu^v$ (фиг. 6, б) функция $1/l^-(z; \nu)$ имеет минимум, равный нулю, в точке $z = 1$, и максимум в точке $z = z^*$. Последний соответствует минимуму функции $l^-(z; \nu)$ в этой же точке. Кроме того, эта функция в точке a_1 имеет нуль, соответствующий асимптоте функции $l^-(z; \nu)$. Функция же $1/l^+(z; \nu)$ в точке $z = z^{**}$ имеет минимум, соответствующий максимуму функции $l^+(z; \nu)$. Интервал величины $1/l$, находящийся между минимумом функции $1/l^+(z; \nu)$ и максимумом функции $1/l^-(z; \nu)$, и является интервалом неустойчивости исследуемой системы. При $\nu \rightarrow \nu^v$ все четыре перечисленных точки кривых $1/l^\pm(z; \nu)$ сливаются в одну точку, которая является при этом точкой касания этих функций (фиг. 8, б). Упомянутая зона неустойчивости исчезает. При дальнейшем увеличении ν точка $z = 1$ становится минимумом и нулем функции $1/l^+(z; \nu)$. Других экстремумов



Фиг. 9

функции $1/l^{\pm}(z; \nu)$ не имеют и поэтому не возникает других зон неустойчивости, кроме зоны $1/l^{+}(0) < 1/l < 1/l^{-}(0)$, соответствующей зоне (2.19).

Числовой пример. Для проверки полученных результатов был пррссчитан числовой пример. В качестве исследуемого тела была выбрана конфигурация, схематически представленная на фиг. 1, параметры которой следующие: $A/m = 4,374 \text{ м}^2$; $B/m = 0,438 \text{ м}^2$; $C/m = 4,645 \text{ м}^2$; $a = 0,5 \text{ м}$.

Для угловой скорости вращения тела, изменяющейся в пределах $10 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 45 \text{ с}^{-1}$, были вычислены значения функции (2.4) $l^{+}(0)$, $l^{-}(0)$ и $l^{-}(z^{*}, \nu)$, $l^{+}(z^{**}, \nu)$. По этим данным на плоскости (ω, l) построен график (см. фиг. 9), при помощи которого для каждого значения l можно определить зоны значений ω , в которых движение тела будет неустойчивым. Обнаруженные зоны неустойчивого движения исследуемого тела необходимо учитывать на практике, например, при создании центрифуг на «струнном» подвесе и в ряде других конструкций, где используется подвес подобного рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рубановский В. Н. Перманентные вращения и относительные равновесия тела, подвешенного на стержне, их ветвление и устойчивость//Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1986. С. 19—34.
2. Нозадзе Г. Т. Об устойчивости и бифуркации положений относительного равновесия тяжелого твердого тела, подвешенного на струне//Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 22—29.
3. Рубановский В. Н. Ветвление и устойчивость перманентных вращений и относительных равновесий тела, подвешенного на стержне//ПММ, 1987, Т. 51. Вып. 3. С. 382—389.
4. Рубановский В. Н., Степанов С. Я. О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения//ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 904—911.
5. Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. М.: Наука. 1991. 330 с.
6. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 532 с.
7. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
8. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 351 с.
9. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: ГИТТЛ, 1955. 379 с.

Москва, Киев

Поступила в редакцию
5.V.1993