МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1993

УДК 531.383

© 1993 г. Н. Е. ЕГАРМИН

ДИНАМИКА НЕИДЕАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ И УПРАВЛЕНИЕ ЕЕ КОЛЕБАНИЯМИ

Рассматривается тонкая оболочка, форма которой близка к осесимметричной. Упругомассовые и диссипативные характеристики ее материала, вообще говоря, неоднородны. На оболочку действуют внешние поверхностные и объемные силы, в том числе обусловленные движением основания. В качестве базисной принята модель тонкой упругой однородной осесимметричной оболочки, установленной на неподвижном основании и свободной от внешних сил. Изучены особенности эволюции ее колебаний при учете перечисленных обстоятельств. Сформулированы законы управления, обеспечивающие формирование колебаний требуемого типа. Задачи подобного типа возникают, в частности, при анализе функционирования и проектировании волновых твердотельных гироскопов (ВТГ).

1. Модальный анализ уравнений динамики неидеальной осесимметричной оболочки. Колебания осесимметричной тонкой оболочки описываются векторным дифференциальным уравнением в частных производных.

$$L_0(\mathbf{u}) = -\rho_0 H_0 \ddot{\mathbf{u}} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещения точек срединной поверхности оболочки, $\rho_0 = \text{const}$ — плотность материала оболочки, $H_0 = \text{const}$ — ее толщина. Свяжем с недеформированной оболочкой правую декартову систему координат $O\xi\eta\zeta$ такую, что ось $O\zeta$ совпадает с ее осью симметрии. Введем также ортогональные криволинейные координаты, связанные с меридианами и параллелями ее срединной поверхности. В качестве одной криволинейной координаты возьмем угол φ в окружном направлении (азимутальный угол), $0 \le \varphi < 2\pi$. В качестве другой координаты будем брать длину дуги образующей s ($s_1 \le s \le s_2$) или угол Λ ($\Lambda_1 \le \Lambda \le \Lambda_2$), образуемый нормалью к оболочке и осью симметрии. Оператор L_0 содержит операции дифференцирования по s (или Λ) и операции умножения на функции от s (или Λ). Вектор-функции $\mathbf{u}(\Lambda, \varphi, t)$ будем считать достаточно гладкими и удовлетворяющими некоторым самосопряженным граничным условиям [1]. Конкретный вид оператора L_0 в дальнейшем не используется и потому здесь не приводится.

В теории оболочек показано, что оператор L_0 имеет дискретный спектр с предельной точкой на $+\infty$. Нулевые собственные значения возможны только в случаях, когда граничные условия не препятствуют перемещениям оболочки как твердого тела. Собственные частоты, соответствующие неосесимметричным колебаниям, двукратновырождены. Отвечающие им собственные формы $\mathbf{V}_{kl}$ и $\mathbf{W}_{kl}$ могут быть представлены в виде (в проекциях на оси локальной системы координат):

$$\mathbf{V}_{kl} = \left\| \begin{matrix} U_{kl}(\Lambda)\cos k\varphi \\ V_{kl}(\Lambda)\sin k\varphi \\ W_{kl}(\Lambda)\cos k\varphi \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{W}_{kl} = \left\| \begin{matrix} U_{kl}(\Lambda)\sin k\varphi \\ -V_{kl}(\Lambda)\cos k\varphi \\ W^{kl}(\Lambda)\sin k\varphi \end{matrix} \right\| \tag{1.2}$$

$$k = 2, 3\ldots; \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Число k — количество волн по параллели. Число l характеризует изменяемость вдоль меридиана. Вид функций $U_{kl}(\Lambda)$, $V_{kl}(\Lambda)$, $W_{kl}(\Lambda)$ определяется формой оболочки и граничными условиями.

При каждых фиксированных k, l существуют две равные собственные частоты ν_{kl}, соответствующие формам (1.2):

$$L_0(\mathbf{V}_{kl}) = \rho_0 H_0 \nu_{kl}^2 \mathbf{V}_{kl}, \quad L_0(\mathbf{W}_{kl}) = \rho_0 H_0 \nu_{kl}^2 \mathbf{W}_{kl} \tag{1.3}$$

Вектор-функции (1.2) образуют в конфигурационном пространстве системы ортогональный базис

$$(\mathbf{V}_{kl}, \mathbf{V}_{mn}) = \iint_G (\mathbf{V}_{kl} \cdot \mathbf{V}_{mn})\, dS = m_{kl}\delta_{km}\delta_{ln} \tag{1.4}$$

где δ_{km} и δ_{ln} — символы Кронекера; G — область, занимаемая оболочкой; $dS = B(s)dsd\varphi$ — элемент площади срединной поверхности; $B(s)$ — расстояние от точки срединной поверхности до оси симметрии. Аналогично

$$(\mathbf{W}_{kl}, \mathbf{W}_{mn}) = m_{kl}\delta_{km}\delta_{ln}, \quad (\mathbf{V}_{kl}, \mathbf{W}_{mn}) = 0 \tag{1.5}$$

Фигурирующий в формулах (1.4), (1.5) нормировочный множитель m_{kl} определяется следующей формулой

$$m_{kl} = \pi \int_{s_1}^{s_2} (U_{kl}^2 + V_{kl}^2 + W_{kl}^2)\, B(s)\, ds \tag{1.6}$$

В связи со сказанным выше вектор перемещения $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ может быть представлен в виде разложения

$$\mathbf{u} = \sum_{k,l} (x_{kl}(t)\, V_{kl}(\Lambda, \varphi) + y_{kl}(t)\, W_{kl}(\Lambda, \varphi)) \tag{1.7}$$

Подставляя равенство (1.7) в уравнение (1.1) и принимая во внимание свойства собственных форм (1.3)—(1.5), получим в идеальном случае бесконечную систему не связанных между собой дифференциальных уравнений в обыкновенных производных

$$\ddot{x}_{kl} + \nu_{kl}^2 x_{kl} = 0 \quad (k = 2, 3 \ldots + \infty) \tag{1.8}$$

$$\ddot{y}_{kl} + \nu_{kl}^2 y_{kl} = 0 \quad (l = 0, 1, 2, \ldots + \infty)$$

В случае неидеальной оболочки будем иметь вместо уравнения (1.1) другое

$$L_0(\mathbf{u}) + \rho_0 H_0 \ddot{\mathbf{u}} = \varepsilon L^* \tag{1.9}$$

где L^* — оператор возмущения, конкретный вид которого будет приводиться в дальнейшем по мере необходимости. Формальный малый параметр ε выписан в явном виде только для того, чтобы подчеркнуть то, что во всех последующих конкретных задачах возмущения (неидеальности) характеризуются теми или иными физическими безразмерными малыми параметрами. Под возмущениями (неидеальностями) здесь понимается зависимость характеристики материала резонатора от азимутального угла, внутреннее трение, внешние поверхностные и объемные силы, в том числе обусловленные движением основания, и так далее.

Подставляя равенство (1.7) в уравнение (1.9), получим вместо уравнений (1.8) следующую бесконечную систему, вообще говоря «перевязанных» уравнений

$$\ddot{x}_{kl} + \nu_{kl}^2 x_{kl} = \varepsilon f_{kl}^{(x)}, \quad \ddot{y}_{kl} + \nu_{kl}^2 y_{kl} = \varepsilon f_{kl}^{(y)}$$

$$f_{kl}^{(x)} = (\mathbf{V}_{kl}, L^*)/\rho_0 H_0, \quad f_{kl}^{(y)} = (\mathbf{W}_{kl}, L^*)/\rho_0 H_0 \tag{1.10}$$

Функции $f^{(x)}_{kl}, f^{(y)}_{kl}$ зависят, вообще говоря, от всех обобщенных координат x_{mn}, y_{mn}, их производных по времени, от времени и так далее.

Пусть начальные условия таковы, что при фиксированных k, l $x_{kl}(0) = x^0_{kl}$, $y_{kl}(0) = y^0_{kl}$, $\dot{x}_{kl}(0) = \dot{x}^0_{kl}$, $\dot{y}_{kl}(0) = \dot{y}^0_{kl}$, а при других номерах $m \neq k$, $n \neq l$ $x_{mn}(0) = y_{mn}(0) = \dot{x}_{mn}(0) = \dot{y}_{mn}(0) = 0$. Будем также считать, что внешнее возбуждение форм с номерами $m \neq k, n \neq l$ отсутствует. Примем также во внимание то, что в силу структуры оператора L_0 внутренние резонансы отсутствуют. В связи с этим решения уравнений (1.10) с номерами $m \neq k, n \neq l$ будут отличны от нуля лишь постольку, поскольку имеются перекрестные связи $f^{(x)}_{mn}, f^{(y)}_{mn}$ в правых частях соответствующих уравнений. Значит, x_{mn}, y_{mn} при $m \neq k, n \neq l$ будут величинами порядка не ниже ε.

Поэтому, желая построить одночастотное решение системы (1.10) с точностью до членов порядка ε, из бесконечной системы (1.10) можно выделить подсистему двух дифференциальных уравнений второго порядка для x_{kl}, y_{kl} и в их правых частях пренебречь членами, описывающими взаимодействие с другими формами колебаний. В дальнейшем, как правило, исследуются только одночастотные режимы колебаний с частотой ν_{kl}. В связи с этим там, где это возможно индексы k, l будем опускать. При желании конкретизировать результаты будем полагать $k=2$, $l=0$.

2. Осредненные уравнения динамики волновой картины. Итак, пусть выполнены условия, описанные в конце предыдущего пункта, и при исследовании динамики резонатора можно пренебречь межмодовым взаимодействием. Тогда при исследовании колебаний достаточно рассмотреть систему двух уравнений второго порядка

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon f^{(x)}, \quad \ddot{y} + \nu^2 y = \varepsilon f^{(y)} \tag{2.1}$$

Наличие малых параметров позволяет воспользоваться для исследования этой системы одним из методов малого параметра. Пусть это будет для определенности метод осреднения [2]. Тогда вместо переменных x, y введем новые «медленные» переменные a, m, b, n по формулам

$$x = a\cos\lambda t + m\sin\lambda t, \quad \dot{x} = -a\lambda\sin\lambda t + m\lambda\cos\lambda t \tag{2.2}$$

$$y = b\cos\lambda t + n\sin\lambda t, \quad \dot{y} = -b\lambda\sin\lambda t + n\lambda\cos\lambda t$$

Здесь λ — некий вспомогательный частотный параметр, близкий к собственной частоте ν. В автономных задачах удобно полагать $\lambda = \nu$. В общем случае величину расстройки частоты $\delta = (\lambda^2 - \nu^2)/2\lambda \approx \lambda - \nu$ считаем величиной порядка ε в том смысле, что $(\lambda - \nu)/\nu = O(\varepsilon)$. Величины a, m, b, n логично назвать декартовыми переменными волновой картины.

Воспользовавшись формулами (2.2), систему уравнений (2.1) приведем к четырем дифференциальным уравнениям первого порядка относительно медленных переменных. После осреднения правых частей получим (промежуточные выкладки опускаем):

$$\dot{\mathbf{e}}_I = \varepsilon\lambda^{-1}\mathbf{f} + \delta\mathbf{e}^*_\gamma \tag{2.3}$$

где $\mathbf{f} = (-\langle f^{(x)}\sin\lambda t\rangle, \ \langle f^{(x)}\cos\lambda t\rangle, \ -\langle f^{(y)}\sin\lambda t\rangle, \ \langle f^{(y)}\cos\lambda t\rangle)^T$; $\mathbf{e}_I = (a, m, b, n)^T$, $\mathbf{e}^*_\gamma = (-m, a, -n, b)^T$; $\langle\ldots\rangle$ означает осреднение по времени.

После того, как система уравнений (2.3) будет решена, можно составить и искомые выражения для вектора перемещения точек срединной поверхности. В частности, как следует из формул (1.7) и (2.2):

$$w(\Lambda, \varphi, t) = W(\Lambda)\,[a\cos\lambda t\cos k\varphi +$$

$$+ m\sin\lambda t\cos k\varphi + b\cos\lambda t\sin k\varphi + n\sin\lambda t\sin k\varphi] \tag{2.4}$$

С формальной точки зрения решение уравнений (2.3) дает исчерпывающий ответ на поставленную задачу об эволюции колебаний неидеальной оболочки. Однако даже в достаточно простых случаях получающиеся выражения (2.4) столь громоздки, что не позволяют выявить качественные закономерности. В этом отношении значительно более удобным оказалось представление прогиба резонатора в виде двух стоячих волн, которые ортогональны по азимутальному углу и квадратурны по времени.

3. Естественные координаты волновой картины. С физической точки зрения наиболее наглядным было бы представление колебаний резонатора в виде одной стоячей волны. Однако это в общем случае невозможно. Дело в том, что стоячие волны характеризуются тремя параметрами, в то время как фазовое пространство задачи (2.1) четырехмерно. Поэтому для того, чтобы решение (2.4) представляло собой стоячую волну, переменные a, m, b, n должны быть связаны некоторым соотношением. Нетрудно видеть, что эта связь имеет вид $an - bm = 0$.

Представим решение в виде суперпозиции двух стоячих волн. В связи с тем, что две стоячие волны в общем случае характеризуются шестью параметрами, сделать это можно бесконечным числом способов. Имеющийся произвол устраним, потребовав, чтобы эти две волны были ортогональны по азимутальному углу и квадратурны по времени. Тогда

$$w(\Lambda, \varphi, t) = W(\Lambda)\,[p \cos k(\varphi - \theta) \sin(\lambda t + \gamma) -$$
$$- q \sin k(\varphi - \theta) \cos(\lambda t + \gamma)] \qquad (3.1)$$

Такую суперпозицию будем называть волновой картиной, а параметры θ и γ — соответственно, углом ориентации и фазой волновой картины; p и q — соответственно, амплитуды основной и квадратурных волн. Для того, чтобы убедиться в законности такого описания колебаний резонатора, достаточно показать, что в случае общего положения решение (2.4) может быть записано в виде (3.1). Другими словами, надо установить взаимно однозначное соответствие между переменными a, m, b, n и p, q, θ, γ. Сделать это удобно с помощью имеющегося изоморфизма представления (2.4) и квадратных матриц размерности 2×2:

$$w \Leftrightarrow M = \begin{Vmatrix} n & b \\ m & a \end{Vmatrix}$$

Стоячим волнам соответствуют вырожденные матрицы. В общем случае $\det M \neq 0$. Величина детерминанты матрицы M характеризует меру отличия колебания от стоячей волны. Назовем удвоенную величину этого детерминанта эллиптичностью колебаний и введем для нее обозначение S. Квадрат эвклидовой нормы матрицы, то есть сумму квадратов ее элементов, будем называть интенсивностью колебаний и обозначим $I = I(M)$. Две стоячие волны ортогональны и квадратурны, если выполняется следующее соотношение между соответствующими им матрицами P, Q:

$$Q = T^{-1}PT, \quad P = TQT^{-1}, \quad T = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Поставленная задача в терминах матричного исчисления может быть сформулирована таким образом: для каждой невырожденной матрицы M найти вырожденную матрицу P $(I(P) = 1)$ и числа p, q такие, что

$$M = pP + qT^{-1}PT \qquad (3.2)$$

Рассматривая равенство (3.2) как уравнение относительно неизвестной P, находим

$$P = (pM - qT^{-1}MT)/(p^2 - q^2) \qquad (3.3)$$

Из требований $\det P = 0$, $I(P) = 1$ получаем два нелинейных алгебраических уравнения для определения переменных p, q:

$$2pq = S, \quad p^2 + q^2 = I \tag{3.4}$$

Формулы (3.3), (3.4) дают решение поставленной задачи, если только $I \neq |S|$, так как при этом $p^2 - q^2 = 0$ и возникает неопределенность. Физически это означает, что колебания резонатора в этом случае представляют собой чистую бегущую волну и понятие ориентации волновой картины теряет смысл. Во многих приложениях одна из амплитуд p, q много больше другой. Поэтому в дальнейшем для определенности полагаем $p > 0$, $p > |q|$. Из формул (3.4) легко выразить p, q, через I, S. Сопоставляя формулы (3.1) и (2.4), найдем выражения и для переменных θ, γ. Соответствующие формулы даны в [3].

Остановимся на физическом смысле параметров представления (3.1). Представим себе, что сигналы $x(t)$, $y(t)$ выведены на экран осциллографа. Получающаяся при этом фигура Лиссажу представляет собой эллипс. Нетрудно показать, что его большая полуось пропорциональна p, а малая — пропорциональна $|q|$. Угол наклона эллипса равен $k\theta$. Площадь эллипса пропорциональна величине S, чем и объясняется введение термина эллиптичность. Совокупность величин I, S, θ, γ будем называть естественными параметрами волновой картины.

Каждой волновой картине соответствует некоторая точка a, m, b, n четырехмерного фазового пространства. Стоячим волнам в этом пространстве соответствует трехмерная гиперповерхность. Каждая волновая картина может быть представлена в виде разложения на две стоячие волны. Можно показать, что разложение (3.1) оптимально в том смысле, что расстояние между исходной точкой a, m, b, n и точкой a_*, m_*, b_*, n_*, соответствующей основной волне, минимально.

4. Уравнения эволюции волновой картины в естественных переменных. Выделим из фигурирующих в уравнениях (2.1) сил $f^{(x)}, f^{(y)}$ линейные по координатам и скоростям и не зависящие от времени составляющие

$$\varepsilon \left\| \begin{matrix} f^{(x)} \\ f^{(y)} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{matrix} \right\| + \varepsilon \left\| \begin{matrix} F^{(x)} \\ F^{(y)} \end{matrix} \right\|$$

Из матриц A и B выделим симметричные и кососимметричные части, а симметричные части в свою очередь разобьем на шаровые и девиаторные составляющие. В результате получим

$$A = A_0E + A_1T + A_dd_A, \quad B = B_0E + B_1T + B_dd_B$$

$$A_0 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}, \quad E = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad A_1 = \frac{a_{12} - a_{21}}{2}, \quad T = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$A_d = \tfrac{1}{2}\,[(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2]^{1/2} \geq 0, \quad B_d = \tfrac{1}{2}\,[(b_{11} - b_{22})^2 + (b_{12} + b_{21})^2]^{1/2} \geq 0$$

$$B_0 = (b_{11} + b_{22})/2, \quad B_1 = (b_{12} - b_{21})/2$$

$$d_A = \left\| \begin{matrix} -\cos 2k\varphi_1 & \sin 2k\varphi_1 \\ \sin 2k\varphi_1 & \cos 2k\varphi_1 \end{matrix} \right\|, \quad d_B = \left\| \begin{matrix} -\cos 2k\varphi_2 & \sin 2k\varphi_2 \\ \sin 2k\varphi_2 & \cos 2k\varphi_2 \end{matrix} \right\| \tag{4.1}$$

$$\sin 2k\varphi_1 = (a_{12} + a_{21})/2A_d, \quad \cos 2k\varphi_1 = (a_{22} - a_{11})/2A_d$$

$$\sin 2k\varphi_2 = (b_{12} + b_{21})/2B_d, \quad \cos 2k\varphi_2 = (b_{22} - b_{11})/2B_d$$

Углы φ_1, φ_2 здесь вводятся формально. В частном случае консервативных и диссипативных дефектов оболочки их физический смысл объясняется в п. 8.

Уравнения для естественных переменных получим из уравнений (2.3) с помощью правила дифференцирования сложной функции, принимая во внимание приведенные в предыдущем пункте выражения этих величин через декартовы переменные. После несложных, но достаточно громоздких преобразований, будем иметь

$$\dot{I} = B_0 I - A_1\lambda^{-1}S + (p^2 - q^2)\, B_d \cos 2k\,(\theta - \varphi_2) + 2\varepsilon\lambda^{-1}\,(\mathrm{e}_I, \mathrm{F})$$

$$\dot{S} = B_0 S - A_1\lambda^{-1}I - (p^2 - q^2)\,\lambda^{-1}A_d \sin 2k\,(\theta - \varphi_1) + 2\varepsilon\lambda^{-1}\,(\mathrm{e}_S, \mathrm{F})$$

$$2k\dot{\theta} = -B_1 - I\,(p^2 - q^2)^{-1}B_d \sin 2k\,(\theta - \varphi_2) +$$

$$+ S\lambda^{-1}\,(p^2 - q^2)^{-1}A_d \cos 2k\,(\theta - \varphi_1) + 2\varepsilon\lambda^{-1}\,(p^2 - q^2)^{-1}\,(\mathrm{e}_\theta, \mathrm{F})$$

$$2\dot{\gamma} = -A_0\lambda^{-1} - 2\delta - I\lambda^{-1}\,(p^2 - q^2)^{-1}A_d \cos 2k\,(\theta - \varphi_1) +$$

$$+ S\,(p^2 - q^2)^{-1}B_d \sin 2k\,(\theta - \varphi_2) - 2\varepsilon\,(p^2 - q^2)^{-1}\lambda^{-1}\,(\mathrm{e}_\gamma, \mathrm{F}) \qquad (4.2)$$

$$\mathrm{e}_\theta = (I\mathrm{e}_\theta^* + S\mathrm{e}_\gamma^*)/(p^2 - q^2), \quad \mathrm{e}_\gamma = (I\mathrm{e}_\gamma^* + S\mathrm{e}_\theta^*)/(p^2 - q^2)$$

$$\mathrm{e}_S = (n, -b, -m, a)^T, \quad \mathrm{e}_\theta^* = (-b, -n, a, m)^T$$

$$\mathrm{F} = (-\langle F^{(x)} \sin \lambda t\rangle, \langle F^{(x)} \cos \lambda t\rangle, -\langle F^{(y)} \sin \lambda t\rangle, \langle F^{(y)} \cos \lambda t\rangle)^T$$

Из уравнений (4.2) видно, что силы различной структуры (позиционные, скоростные; шаровые, кососимметричные, девиаторные) оказывают на эволюцию волновой картины разное влияние. Более подробно эти вопросы будут обсуждаться в дальнейшем при рассмотрении тех или иных конкретных физических факторов, порождающих возмущения в уравнениях (1.9) или (2.1).

5. Оператор Кориолиса. При вращении оболочки в правой части уравнений динамики (1.9) появляется оператор возмущения следующего вида (назовем его оператором Кориолиса):

$$\varepsilon L^* = -2\rho_0 H_0\,(\Omega \times \dot{\mathrm{u}})$$

где Ω — вектор угловой скорости вращения основания. В проекциях на оси декартовой системы координат $O\xi\eta\zeta$ этот вектор имеет вид $\Omega = (\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta)^T$.

Воспользовавшись процедурой, описанной в п. 1, находим выражения для обобщенных сил, соответствующих обобщенным координатам x_{kl}, y_{kl}:

$$\varepsilon f_{kl}^{(x)} = 2\Omega_\zeta \alpha_{kl}^{(C)} \dot{y}_{kl}, \quad \varepsilon f_{kl}^{(y)} = -2\Omega_\zeta \alpha_{kl}^{(C)} \dot{x}_{kl} \qquad (5.1)$$

$$\alpha_{kl}^{(C)} = \frac{2\pi}{m_{kl}} \int_{s_1}^{s_2} V_{kl}\,(W_{kl} \sin \Lambda - U_{kl} \cos \Lambda)\, B\,(s)\, ds \qquad (5.2)$$

Коэффициент m_{kl} определяется формулой (1.6). Из формул (5.1) видно, что экваториальные проекции Ω_ξ, Ω_η вектора Ω в первом приближении не влияют на эволюцию волновой картины. А осевая проекция Ω_ζ порождает гироскопические силы, которые, согласно уравнениям (4.2), вызывают только пространственную прецессию волновой картины со скоростью

$$\dot{\theta} = -\Omega_\zeta \alpha_{kl}^{(C)}/k = K\Omega_\zeta, \quad K = -\alpha_{kl}^{(C)}/k \qquad (5.3)$$

Назовем K масштабным коэффициентом и вычислим его значение для полусферической оболочки. Собственные формы колебаний оболочек, представляющих собой сферический сегмент (в частности, полусферу) исследовались многими авторами. Так, например, для функций $U_{k0}(\Lambda)$, $V_{k0}(\Lambda)$, $W_{k0}(\Lambda)$ для куполообразных сферических оболочек со свободным краем Рэлеем предложены следующие выражения [4]:

$$U_{k0}\,(\Lambda) = V_{k0}\,(\Lambda) = \sin \Lambda\,(\mathrm{tg}\,\Lambda/2)^k, \quad W_{k0}\,(\Lambda) = (k + \cos \Lambda)\,(\mathrm{tg}\,\Lambda/2)^k \qquad (5.4)$$

Подставляя эти выражения в формулы (5.2), (5.3), находим значение $K = -0{,}277$. Сравнение с известными экспериментальными данными показывает, что погрешность равна приблизительно одному проценту. Формулы (5.2), (5.3) и приведенное расчетное значение масштабного коэффициента полусферы ранее были получены другим методом в [5]. В [6] даны расчеты масштабного коэффициента для эллипсоидальных и некоторых других классов оболочек.

6. Пространственное вращение неидеальной оболочки. Рассмотрим теперь более общий случай, когда параметры оболочки зависят от азимутального угла. Пусть для определенности

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{\rho i} \cos i (\varphi - \varphi_{\rho i})\right] \tag{6.1}$$

Тогда оператор возмущения имеет вид

$$\varepsilon L^* = -2\rho_0 H_0 (\Omega \times \dot{\mathbf{u}}) \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{\rho i} \cos i (\varphi - \varphi_{\rho i})\right]$$

Воспользовавшись процедурой, описанной в п. 1, находим выражения для обобщенных сил, соответствующих обобщенным координатам x_{kl}, y_{kl}:

$$\varepsilon f_{kl}^{(x)} = 2\varepsilon_{\rho 1} \Omega_{\rho 1} \beta_{kl}^{(C)} \dot{y}_{kl}, \quad \varepsilon f_{kl}^{(y)} = -2\varepsilon_{\rho 1} \Omega_{\rho 1} \beta_{kl}^{(C)} \dot{x}_{kl} \tag{6.2}$$

где $\Omega_{\rho 1} = \Omega_\xi \cos \varphi_{\rho 1} + \Omega_\eta \sin \varphi_{\rho 1}$ — т. е. $\Omega_{\rho 1}$ это проекция вектора Ω на ось дефекта. Коэффициент $\beta_{kl}^{(C)}$ определяется формулой

$$\beta_{kl}^{(C)} = \frac{\pi}{m_{kl}} \int_{s_1}^{s_2} V_{kl} (U_{kl} \sin \Lambda + W_{kl} \cos \Lambda) B(s)\, ds \tag{6.3}$$

Из формул (6.2) видно, что на эволюцию волновой картины влияют только первые гармоники дефектов упругомассовых характеристик оболочек. Они приводят к появлению гироскопических сил. В результате возникает прецессия волновой картины со скоростью, пропорциональной произведению проекции угловой скорости вращения основания на ось дефекта и величины этого дефекта.

Необходимо отметить, что при наличии дефекта плотности и вращения основания будут иметь место и другие физические эффекты. Так, например, появится расщепление собственной частоты, равное по порядку величины квадрату дефекта плотности, что будет вызывать разрушение стоячей волны. Соответствующие члены в уравнениях (6.2) не выписаны, чтобы не усложнять выражения. Однако это обстоятельство не отражается на скорости прецессии волновой картины. Поэтому можно считать, что величина $\varepsilon_{\rho 1} \beta_{kl}^{(C)}$ определяет чувствительность оболочки к поперечной компоненте угловой скорости вращения основания.

Говоря более конкретно, из формул (4.2) следует, что $\dot{\theta} = -\Omega_{\rho 1} \beta_{kl}^{(C)} \varepsilon_{\rho 1}/k = -\Omega_{\rho 1} G_{kl}$. Введенную здесь величину G_{kl} естественно назвать чувствительностью резонатора при колебаниях по форме kl к поперечным компонентам угловой скорости.

Для полусферической оболочки, формы колебаний которой описываются функциями Рэлея (5.4), а $k = 2$, расчет по формуле (6.3) дает $\beta_{20}^{(C)} = (6 \ln 2 - 7/2)/(20 \ln 2 - 37/3) \approx 0{,}43$. Следовательно, $G_{20} \approx 0{,}2\varepsilon_{\rho 1}$.

7. Вибрация основания. Рассмотрим влияние на оболочку внешней вибрации. Пусть плотность материала зависит от окружного угла φ в соответствии с формулой (6.1). Тогда уравнение динамики (1.9) будет иметь вид

$$(\rho H)_0 \ddot{\mathbf{u}} + L_0(\mathbf{u}) = ((\rho H)_0 - \rho H)\, \ddot{\mathbf{u}} - \rho H \ddot{\mathbf{r}} \tag{7.1}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор подвижной системы координат, связанной с оболочкой, $\mathbf{r} = (\xi, \eta, \zeta)$. Ограничимся случаями, когда связанная с оболочкой система координат движется относительно инерциальной по закону $\xi = \xi_0 \cos \lambda t$, $\eta = \eta_0 \cos \lambda t$, $\zeta = \zeta_0 \cos \lambda t$. Будем предполагать, что в разложении (6.1) четвертая гармоника отсутствует. Или, в более общем случае, отсутствует гармоника по окружному углу с номером $2k$. В этих ситуациях первый член в правой части уравнения (7.1) не приведет к появлению обобщенных сил в уравнениях для двух осцилляторов (1.10). Гармоника плотности с номером $2k$ вызывает только расщепление собственной частоты.

Рассмотрим отдельно два случая: а) продольная вибрация, когда $\xi_0 = \eta_0 = 0$, $\zeta_0 \neq 0$ и б) поперечная вибрация, когда $\xi \neq 0$, $\eta_0 = \zeta_0 = 0$.

а) *Продольная вибрация.* Обобщенные силы будут отличны от нуля только при наличии в дефекте плотности гармоники с номером k:

$$\varepsilon f_{kl}^{(x)} = N_{kl}\varepsilon_{\rho k} \cos k\varphi_{\rho k}\zeta_0\lambda^2 \cos \lambda t, \quad \varepsilon f_{kl}^{(y)} = N_{kl}\varepsilon_{\rho k} \sin k\varphi_{\rho k}\zeta_0\lambda^2 \cos \lambda t \tag{7.2}$$

$$N_{kl} = \frac{\pi}{m_{kl}} \int_{s_1}^{s_2} (U_{kl} \sin \Lambda + W_{kl} \cos \Lambda)\, B(s)\, ds \tag{7.3}$$

Для полусферической оболочки с собственными функциями (5.4) при $k = 2$ расчет коэффициента N_{kl} по формуле (7.3) дает следующее значение: $N_{20} = (2 - \ln 2)/(20 \ln 2 - 37/3) \approx 0{,}85$.

б) *Поперечная вибрация.* В этом случае обобщенные силы в уравнениях (1.10) будут возникать только при наличии дефектов с номерами $k \pm 1$:

$$\varepsilon f_{kl}^{(x)} = [M_{kl}^{-}\varepsilon_{\rho,k-1} \cos (k-1)\, \varphi_{\rho,k-1} + M_{kl}^{+}\varepsilon_{\rho,k+1} \cos (k+1)\, \varphi_{\rho,k+1}]\, \xi_0\lambda^2 \cos \lambda t \tag{7.4}$$

$$\varepsilon f_{kl}^{(y)} = [M_{kl}^{-}\varepsilon_{\rho,k-1} \sin (k-1)\, \varphi_{\rho,k-1} + M_{kl}^{+}\varepsilon_{\rho,k+1} \sin (k+1)\, \varphi_{\rho,k+1}]\, \xi_0\lambda^2 \cos \lambda t$$

$$M_{kl}^{\pm} = \frac{\pi}{2m_{kl}} \int_{s_1}^{s_2} (U_{kl} \cos \Lambda \pm V_{kl} - W_{kl} \sin \Lambda)\, B(s)\, ds \tag{7.5}$$

Для полусферического резонатора с собственными функциями (5.4) имеет место соотношение $M_{k0}^{-} = 3M_{k0}^{+}$. Расчет по формулам (7.5) дает $M_{20}^{+} = (1 - 3\pi/8)/(20 \ln 2 - 37/3) \approx -0{,}12$, $M_{20}^{-} \approx -0{,}35$.

Из формул (7.2), (7.4) следует, что внешняя вибрация действует на неидеальную оболочку как позиционное возбуждение. Если говорить об оболочке-резонаторе ВТГ, то из приведенного исследования вытекает необходимость более широко понимать балансировку резонатора. Устранять надо не только разность собственных частот резонатора, обусловленную главным образом, четвертыми гармониками консервативных дефектов, но и первую, и вторую, и третью гармоники в отдельности. В противном случае при вибрации основания будет возникать дрейф волновой картины к некоторым определенным направлениям. С другой стороны, из формул этого пункта видно, что величины и ориентации гармоник консервативных дефектов могут быть определены с помощью экспериментов на вибростенде.

8. Консервативные и диссипативные дефекты. При наличии консервативных дефектов в системе (2.1) снимается вырождение собственной частоты и появляется две системы собственных осей с различными частотами ν_1 и ν_2. Пусть для определенности $2\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 \leq 0$. Нетрудно показать, что при этом $A_d = -(\nu_1^2 - \nu_2^2)/2 \simeq -2\lambda\Delta\nu \geq 0$, а A_0, A_1 равны, естественно, нулям.

Аналогично, при наличии диссипативных дефектов в системе (2.1) появляется две системы «осей диссипации», имеющих различные постоянные времени затухания τ_1, τ_2. Также для определенности без ограничения общности будем полагать, что $1/\tau_1 - 1/\tau_2 \leq 0$. В этом случае $B_0 = -(1/\tau_1 + 1/\tau_2)$, $B_1 = 0$, $B_d = -(1/\tau_1 - 1/\tau_2) \geq 0$.

Фигурирующие в формулах (4.1) углы φ_1 и φ_2 будут углами ориентации консервативных и диссипативных дефектов оболочки. Угол φ_1 указывает направление собственных осей с меньшей из двух собственных частот. Угол φ_2 указывает направление осей диссипации с меньшим демпфированием (с большей постоянной времени).

Как видно из уравнений (4.2), консервативные дефекты приводят к разрушению стоячих волн и вызывают прецессию волновой картины при $S \neq 0$. В [3] описан еще один механизм дрейфа при $S \neq 0$. Отсюда вытекает требование управлять колебаниями резонатора так, чтобы обеспечивать постоянное выполнение условия $S = 0$. Устранение расщепления частот $\Delta\nu$ полностью проблемы не решает. Вопросы управления будут рассмотрены в следующем пункте.

Рассмотрим теперь влияние неоднородного демпфирования. Будем считать, что консервативные дефекты отсутствуют и кроме того $S = 0$. Не ограничивая общности, положим $\varphi_2 = 0$. Будем также предполагать, что $k = 2$, $K = -{}^2/_5$. Тогда из уравнений (4.2) получим, что

$$\dot{\theta} = -\tfrac{2}{5}\Omega + \tfrac{1}{4}(\tau_1^{-1} - \tau_2^{-1}) \sin 4\theta \tag{8.1}$$

Из структуры уравнения (8.1) видно, что при выполнении неравенства $|\Omega| < \Omega_* = \tfrac{5}{8}(\tau_2^{-1} - \tau_1^{-1})$ решение ограничено. Угол поворота стоячей волны при этом экспоненциально приближается к своему стационарному значению. При $|\Omega| > \Omega_*$ решение монотонно возрастает. Более подробно эти вопросы рассмотрены в [7]. Здесь принята простейшая реологическая модель вязкоупругости — модель Кельвина — Фойхта. Эффекты, возникающие в случае более сложных реологических моделей, изучались в [8].

В случае волнового твердотельного гироскопа аналогичные явления имеют место при неоднородности зазора между резонатором и кольцевым электродом параметрического возбуждения. Пусть разложение величины зазора в ряд Фурье по азимутальному углу имеет четвертую гармонику. Тогда волновая картина будет стремиться выставиться вдоль направлений минимума зазора, что вполне соответствует физическим представлениям.

9. Управление позиционными неконсервативными силами. Как отмечено выше, в задачах динамики ВТГ очень важной проблемой является устранение эллиптичности колебаний. Для решения этого вопроса обратимся к уравнениям движения относительно естественных координат. Из уравнений (4.2) видно, что управлять эллиптичностью можно с помощью позиционных неконсервативных сил (параметр A_1) или с помощью консервативного дефекта (параметр A_d).

Рассмотрим сначала первую возможность. Пусть $B_0 = b_0(I_0 - I)$, $A_1 = a_0\lambda S$. Коэффициенты b_0, I_0, очевидно, положительны, а знак коэффициента a_0 предстоит определить. Силами другой структуры пренебрегаем. Тогда два первых уравнения системы (4.2) образуют независимую подсистему

$$\dot{I} = b_0(I_0 - I)I - a_0S^2, \quad \dot{S} = b_0(I_0 - I)S - a_0SI \tag{9.1}$$

Рассмотрим следующие три случая: 1) $a_0 > 0$, 2) $a_0 < 0$, но $a_0 + b_0 > 0$, 3) $a_0 + b_0 \leq 0$.

При $a_0 > 0$ уравнения (9.1) имеют четыре положения равновесия: а) $I = S = 0$ — состояние покоя, б) $I = I_0$, $S = 0$ — стоячая волна, в) $I = S = I_*$, г) $I = -S = I_*$ — бегущие волны. Здесь $I_* = b_0I_0/(b_0 + a_0)$. Анализ устойчивости по линейному приближению показывает, что состояние покоя является неустойчивым узлом. Стоячая волна является положением равновесия типа устойчивого узла, а бегущим волнам соответствуют неустойчивые положения равновесия типа седел. Таким образом, при управлении колебаниями оболочки с помощью неконсервативных позиционных сил с $a_0 > 0$ система из любого начального положения приходит в требуемое положение с $I = I_0$, $S = 0$. Частный случай системы (9.1) при $a_0 = b_0 > 0$ рассматривался в [9]. Однако приведенный там анализ содержит ряд ошибок.

При $a_0 < 0$, но $a_0 + b_0 > 0$ уравнения (9.1) будут иметь те же четыре положения равновесия. Состояние покоя по-прежнему будет неустойчивым узлом. Стоячая волна становится неустойчивым положением равновесия типа седла. Бегущим волнам будут соответствовать устойчивые узлы. Таким образом, в этом случае с помощью неконсервативных позиционных сил в системе будут сформированы колебания в виде бегущей волны. Направление ее распространения определяется начальными условиями.

Наконец, при $a_0 + b_0 \leq 0$ уравнения (9.1) будут иметь только два положения равновесия. Состояние покоя будет по-прежнему неустойчивым узлом, а стоячая волна $I = I_0$, $S = 0$ — седлом. Устойчивых положений равновесия в системе не будет.

10. Управление позиционными консервативными силами. Обратимся теперь к другой возможности управления величиной эллиптичности колебаний. Будем считать, что позиционные консервативные силы отсутствуют ($A_1 = 0$). Диссипативные силы малы и ими будем пренебрегать ($B_0 = B_d = 0$). Тогда из первого уравнения системы (4.2) следует, что $I = I_0 = \mathrm{const}$.

Для того, чтобы девиаторная составляющая позиционных сил не вызывала дрейфа волновой картины, следует выбрать φ_1 так, чтобы $\cos 2k(\theta - \varphi_1) = 0$. Ввиду малости величины S приближенно полагаем, что $p^2 - q^2 = I_0$. Тогда уравнение, описывающее эволюцию эллиптичности, принимает вид

$$\dot{S} = -I_0\lambda^{-1}A_d \sin 2k(\theta - \varphi_1) \tag{10.1}$$

где коэффициент A_d по определению не отрицателен. При $S \geq 0$ примем $\sin 2k(\theta - \varphi_1) = 1$, $A_d = Sk_1$, а при $S < 0$ будем полагать $\sin 2k(\theta - \varphi_1) = -1$, $A_d = -Sk_1$, где k_1 — некий положительный коэффициент пропорциональности. Тогда уравнение (10.1) независимо от знака эллиптичности примет следующий простой вид: $\dot{S} = -I_0\lambda^{-1}k_1S$. Отсюда следует, что при описанном алгоритме управления эллиптичность экспоненциально стремится к нулю. Из сказанного следует, что управляющие силы должны быть пропорциональны величине S. Прикладываться эти силы должны под углами $\pm\pi/4k$ к осям волновой картины. Выбор знака определяется знаком S. В частности, при $k = 2$ эти углы равны, очевидно, $\pm 22{,}5°$.

Описанный алгоритм управления обладает статической ошибкой. Для ее устранения следует в соответствии с общими правилами теории автоматического регулирования [10] заменить пропорциональное усиление в цепи обратной связи k_1S на управление с так называемым «пропорциональным + интегральным» усилением $k_1S(t) + k_2\int_0^t S(\tau)\,d\tau$. Один из возможных вариантов технической реализации такого закона управления предложен в [11]. Выбором коэффициентов k_1, k_2 обеспечивается требуемое качество управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
2. *Найфэ А. Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
3. *Егармин Н. Е.* Нелинейные эффекты в динамике вращающегося кругового кольца//Изв. АН. МТТ. 1993. № 3. С. 50—59.
4. *Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей)*. Теория звука. Т. I. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.

5. *Егармин Н. Е.* О прецессии стоячих волн колебаний вращающейся осесимметричной оболочки//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 142—148.
6. *Дзама М. А., Егармин Н. Е.* Прецессия упругих волн при вращении некоторых классов осесимметричных оболочек//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 170—175.
7. *Егармин Н. Е.* Прецессия стоячих волн во вращающемся кольце при несимметричном демпфировании//Гироскопические системы и их элементы. Тула, 1990. С. 24—28.
8. *Егармин Н. Е.* Свободные и вынужденные колебания вращающегося вязкоупругого кольца//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 150—154.
9. *Журавлев В. Ф.* Об управлении формой колебаний в резонансных системах//ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 827—836.
10. *Айзерман М. А.* Лекции по теории автоматического регулирования. М.: ГИТТЛ, 1956. 428 с.
11. *Loper E. J., jr., Lynch D. D.* Sonic Vibrating Bell Gyro. USA Patent No. 4. 157.041 (June 1979).

Москва

Поступила в редакцию
19.IV.1993