

УДК 531.36

© 1993 г. А. П. СЕЙРАНЯН

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается линейная гироскопическая система, зависящая от параметров. Исследуются взаимодействие и эволюция частот колебаний. Изучены сильные и слабые взаимодействия. Показано, что сильное взаимодействие частот является механизмом потери устойчивости и гироскопической стабилизации системы, а слабое взаимодействие не приводит к качественному изменению поведения. Выявлены некоторые закономерности изменения частот. Приведены примеры. Гироскопические системы рассматривались во многих работах, из которых отметим [1—11].

1. Рассмотрим уравнения движения линейной потенциальной системы с гироскопическими силами

$$M\ddot{q} + G\dot{q} + Aq = 0 \quad (1.1)$$

где M , A — симметричные матрицы масс и потенциальных сил размерности $n \times n$, причем матрица M — положительно определенная; G — кососимметричная матрица, характеризующая гироскопические силы; q — вектор обобщенных координат.

Предполагается, что матрицы M , G , A зависят от вектора параметров $h = (h_1, h_2, \dots, h_k)$. Отделяя время $q = X \exp(\lambda t)$ приходим к обобщенной задаче на собственные значения

$$[M\lambda^2 + G\lambda + A]X = 0 \quad (1.2)$$

Собственные значения λ определяются из характеристического уравнения

$$\det [M\lambda^2 + G\lambda + A] = 0 \quad (1.3)$$

В силу того, что детерминанты транспонированных матриц равны и $M^T = M$, $A^T = A$, $G^T = -G$, то из (1.3) следует, что $-\lambda$ также является корнем характеристического уравнения, т. е. собственным значением. Кроме того, в силу вещественности величин M , G , A комплексно-сопряженная величина $\bar{\lambda}$ также является собственным значением. Итак, если λ собственное значение, то величины $-\lambda$, $\bar{\lambda}$, $-\bar{\lambda}$ также являются собственными значениями. Это означает зеркальную симметрию собственных значений гироскопической системы относительно осей $\text{Im } \lambda$ и $\text{Re } \lambda$.

Для вычисления вариаций собственных значений по параметрам необходимо знание собственного вектора Y сопряженной к (1.2) задачи

$$[M\bar{\lambda}^2 - G\bar{\lambda} + A]Y = 0 \quad (1.4)$$

2. Рассмотрим случай, когда матрица A положительно определена, т. е. $(AX, X) > 0$ для любого X . Круглыми скобками обозначено скалярное произведение векторов в комплексном пространстве. Напомним, что $(X, Y) = \sum x_i \bar{y}_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Исследуем собственные значения λ . Для этого умножим (1.2) скалярно на X ; в результате получим квадратное уравнение относительно λ

$$m\lambda^2 + i g \lambda + a = 0 \quad (2.1)$$

$$m = (MX, X), a = (AX, X), ig = (GX, X)$$

где m и a положительны ввиду положительной определенности M и A , величина (GX, X) чисто мнимая ввиду кососимметричности G , g — действительная величина.

Корни уравнения (2.1) равны

$$\lambda = 1/2 [-ig \pm (-g^2 - 4am)^{1/2}]/m \quad (2.2)$$

Один из корней (2.2) является собственным значением, соответствующим собственному вектору X . В силу того, что $a > 0, m > 0$ из (2.2) следует, что оба корня λ чисто мнимые величины. Таким образом, при положительной определенности матрицы A все собственные значения λ системы (1.2) чисто мнимые $\lambda = i\omega$ и $\bar{\lambda} = -i\omega$, где ω — частота колебаний, $\omega \neq 0$. При изменении параметров h_1, h_2, \dots, h_k собственные значения независимо от кратности двигаются по мнимой оси, не достигая нуля.

В [12, 13] вводится понятие о сильных и слабых взаимодействиях собственных значений. Сильное взаимодействие означает «столкновение» λ в комплексной плоскости под равными углами $2\pi/r$, где r — кратность λ , и последующее их расхождение под биссектрисам этих углов. В частности, при $r = 2$ два собственных значения сближаются при изменении параметра по прямой, сливаются в одно, а затем расходятся вдоль прямой, перпендикулярной линии сближения. При слабом взаимодействии собственные значения не изменяют своих траекторий на комплексной плоскости. Условия реализации этих случаев таковы. Если r — кратному λ соответствует лишь один собственный вектор, то реализуется сильное взаимодействие. Если же r — кратному λ соответствуют r линейно независимых собственных векторов, то реализуется слабое взаимодействие.

Возможные случаи взаимодействия двух частот гироскопической системы ($A > 0$) представлены на фиг. 1. Взаимодействие (слабое) происходит в плоскости $\text{Re } \lambda = 0$.

3. Рассмотрим теперь случай, когда положительно определенная матрица потенциальных сил A при изменении параметров теряет это свойство. В качестве простого примера рассмотрим A в виде

$$A = C - pB \quad (3.1)$$

где B и C положительно определенные матрицы, а p — параметр, $p \geq 0$. Согласно [11] имеем

$$\frac{d\omega}{dp} = - \frac{\omega (BX, X)}{\omega^2 (MX, X) + (C - pB) X, X} \quad (3.2)$$

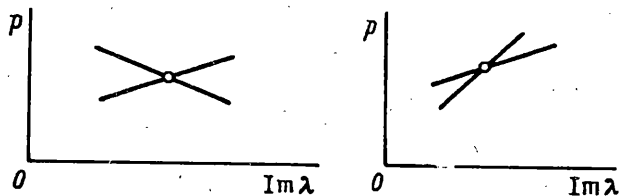
Это соотношение справедливо при $A > 0$, т. е. при $0 \leq p \leq p_1$, где p_1 — первое собственное значение задачи

$$CX = pBX \quad (3.3)$$

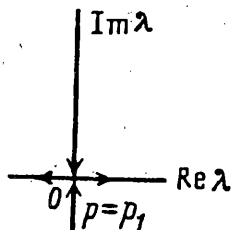
Как и следовало ожидать, при увеличении p от нуля все частоты уменьшаются. При $p = p_1$ происходит слияние собственных значений $\lambda = i\omega$ и $\bar{\lambda} = -i\omega$ в ноль, формула (3.2) при этом теряет силу. Исследуем кратность значения $\lambda = 0$. Положив в (1.2) $\lambda = 0$ и используя (3.1), придем к задаче на собственные значения (3.3). Если первому собственному значению этой задачи $p = p_1$ соответствует лишь один собственный вектор, то взаимодействие λ будет сильным [12, 13], в результате чего гироскопическая система (1.1) при $p > p_1$ потеряет устойчивость (фиг. 2). Потеря устойчивости является статической.

Для вычисления вариаций собственного значения $\lambda = 0$ при $p = p_1$ в случае сильного взаимодействия используем результаты [12, 13]. В итоге для гироскопической системы (1.2), (3.1) имеем:

$$\lambda_1^2 = (BX_0, X_0) [(MX_0, X_0) + (GX_1, X_0)]^{-1} \quad (3.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где собственный вектор X_0 определяется из уравнения

$$CX_0 = p_1 BX_0 \quad (3.5)$$

а для нахождения присоединенного вектора X_1 служит соотношение

$$(C - p_1 B)X_1 = -GX_0 \quad (3.6)$$

Заметим, что величина (GX_1, X_0) в (3.4) положительна. Действительно, в силу (3.6) получим $([C - p_1 B]X_1, X_1) = -(GX_0, X_1) = (X_0, GX_1) = (GX_1, X_0)$. Последние два равенства справедливы ввиду кососимметрии матрицы G и вещественности векторов X_0, X_1 . Итак

$$(GX_1, X_0) + ([C - p_1 B]X_1, X_1) > 0 \quad (3.7)$$

Это равенство справедливо в силу теоремы Рэлея, так как p_1 является первым собственным значением самосопряженной задачи (3.3). Используя (3.7), запишем (3.4) в виде

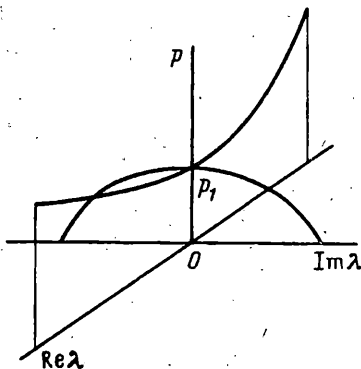
$$\lambda_1^2 = \frac{(BX_0, X_0)}{(MX_0, X_0) + ([C - p_1 B]X_1, X_1)} \quad (3.8)$$

Итак, знаменатель и числитель выражения (3.8) положительны. Следовательно, разложения двукратного собственного значения $\lambda = 0$ при $p = p_1$ примут вид [12, 13]:

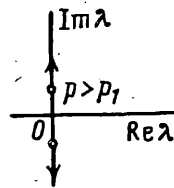
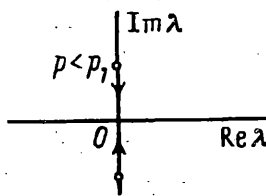
$$\lambda = \pm \lambda_1 \sqrt{\delta p} + O(\delta p) \quad (\delta p > 0) \quad (3.9)$$

$$\lambda = \pm i \lambda_1 \sqrt{|\delta p|} + O(\delta p) \quad (\delta p < 0)$$

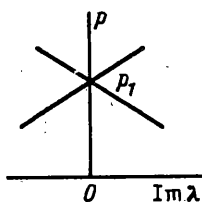
где λ_1 — действительное число, определяемое из (3.8). Таким образом, сильное взаимодействие описывается формулами (3.5)—(3.9). В трехмерном пространстве $p - \lambda$ картина взаимодействия характеризуется сменой плоскости (фиг. 3), что означает потерю устойчивости системы. Кривые на фиг. 3 при $p \approx p_1$ согласно (3.9) ведут себя как квадратные параболы.



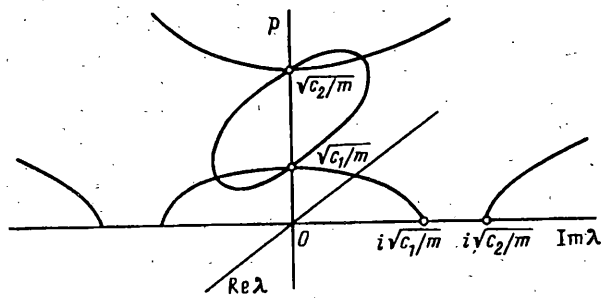
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Отметим, что в других точках спектра задачи (3.3) $p_i > p_1$ ($i = 2, \dots, n$) также может происходить сильное взаимодействие, однако знаменатель выражения (3.8) не обязательно положительный, поскольку неравенство (3.7) выполняется лишь для первого собственного значения p_1 . Это означает, что величина λ_1 в (3.8), (3.9) может быть мнимой. Этот случай соответствует сближению двух действительных корней λ при увеличении p , их слиянию в ноль, а затем расхождению в разные стороны по мнимой оси.

Опишем теперь слабое взаимодействие. Если p_1 является двукратным корнем характеристического уравнения $\det [C - pB] = 0$, то ему соответствуют два собственных вектора X_1 и X_2 , так как B и C — симметричные матрицы. Таким образом, при $p = p_1$ двукратному $\lambda = 0$ в (1.2) соответствуют два собственных вектора X_1 и X_2 . С использованием результатов [12, 13] для гироскопической системы (1.2), (3.1) получают следующие формулы для разложений при $p = p_1$:

$$\lambda = \pm i\lambda_1 \delta p, \quad \lambda_1 = |(GX_1, X_2)|^{-1}$$

Векторы X_1 и X_2 предполагаются ортонормированными $(BX_i, X_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Картина слабого взаимодействия представлена на фиг. 4, 5. В результате слабого взаимодействия собственные значения не сходят с мнимой оси (фиг. 4) и остаются в плоскости $\text{Im } \lambda - p$ (фиг. 5); поэтому система остается устойчивой. Она остается устойчивой и в критической точке при $p = p_1$, так как в решении уравнений (1.1) отсутствуют секулярные члены

$$q = d_1 X_1 + d_2 X_2 + \sum_{i=2}^n d_i V_i \exp(i\omega_i t) + \bar{d}_i \bar{V}_i \exp(-i\omega_i t) \quad (3.10)$$

где d_i — неопределенные константы, V_i — собственные векторы.

При дальнейшем увеличении параметра $p > p_1$ в точках спектра задачи (3.3) $p = p_2, p_3, \dots, p_n$; $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ собственные значения λ также проходят через ноль, при этом их взаимодействие может быть как сильным, так и слабым.

При достаточно больших значениях p система (1.1), (3.1) потеряет устойчивость. Для доказательства воспользуемся выражением для корней (2.2). Система неустойчива, если выполняется неравенство $-g^2 - 4am > 0$. Согласно (3.1) $a = c - pb$, где $b = (BX, X)$, $c = (CX, X)$. Тогда условие неустойчивости примет вид

$$p > p_c, p_c = (g^2 + 4cm)/(4bm) \quad (3.11)$$

Если это неравенство выполняется хотя бы для одного собственного вектора X , то система теряет устойчивость. Получим верхнюю и нижнюю оценки на критическое значение параметра p_c . Прежде всего

$$p_c = (g^2 + 4cm)/(4bm) \geq c/m \geq p_1 \quad (3.12)$$

Последнее неравенство справедливо в силу теоремы Рэлея. Теперь получим верхнюю оценку для p_c . Используя выражения $X = X_1 + iX_2$, $ig = (GX, X) = 2i(GX_2, X_1)$, $b = (BX_1, X_1) + (BX_2, X_2)$, $m = (MX_1, X_1) + (MX_2, X_2)$ имеем

$$\begin{aligned} p_c &= \frac{g^2 + 4cm}{4bm} = \frac{g^2}{4bm} + \frac{c}{b} \leq \frac{(GX_1, X_2)^2}{bm} + \max \frac{c}{b} \leq \\ &\leq \frac{(GX_1, GX_1)(X_2, X_2)}{bm} + p_n \leq \frac{g_{\max}(X_1, X_1)(X_2, X_2)}{b_1 m_1 [(X_1, X_1) + (X_2, X_2)]^2} + p_n \leq \frac{1}{4} \frac{g_{\max}}{b_1 m_1} + p_n \end{aligned}$$

Здесь использованы очевидные соотношения $(GX_1, GX_1) = -(G^2 X_1, X_1)$; $(X_1, X_1)(X_2, X_2) \leq 1/4 [(X_1, X_1) + (X_2, X_2)]^2$ и обозначения: g_{\max} является максимальным собственным значением положительно определенной матрицы $-G^2$, b_1 и m_1 — минимальные собственные значения матриц B и M , p_1 и p_n — минимальное и максимальное собственные значения задачи (3.3).

Объединяя оценки (3.12), (3.13), получим $p_1 \leq p_c \leq p_c^*$, $p_c^* = 1/4 g_{\max}/(b_1 m_1) + p_n$. Отсюда и из (3.11) следует, что при $p > p_c^*$ система (1.1), (3.1) потеряет устойчивость. Потеря устойчивости может быть колебательной или статической.

4. В качестве иллюстрации взаимодействия частот рассмотрим вращающийся двухпорный вал некругового поперечного сечения, на который посередине насажен диск. Исследуем устойчивость вращения вала. Линеаризованные уравнения движения диска в системе координат, вращающейся вместе с валом, имеют вид [6]:

$$x_1 - 2px_2 + (c_1/m - p^2)x_1 = 0 \quad (4.1)$$

$$x_2 + 2px_1 + (c_2/m - p^2)x_2 = 0$$

где p — угловая скорость вращения вала, m — масса диска, c_1 и c_2 — упругие константы, характеризующие жесткость вала в двух главных направлениях, для определенности предположим $c_1 < c_2$.

Отыскивая решение системы уравнений (4.1) в виде $x_1 = a \exp(\lambda t)$, $x_2 = b \exp(\lambda t)$, приходим к задаче на собственные значения

$$(\lambda^2 + c_1/m - p^2)a - 2p\lambda b = 0 \quad (4.2)$$

$$2p\lambda a + (\lambda^2 + c_2/m - p^2)b = 0$$

Отсюда получим характеристическое уравнение [6]:

$$\lambda^4 + [(c_1 + c_2)/m + 2p^2]\lambda^2 + (c_1/m - p^2)(c_2/m - p^2) = 0 \quad (4.3)$$

Нетрудно убедиться, что система устойчива, если скорость вращения p удовлетворяет неравенствам $p^2 < c_1/m$ или $p^2 > c_2/m$ и неустойчива, если $c_1/m \leq p^2 \leq c_2/m$. Картина взаимодействия собственных значений в пространстве $p - \lambda$ представлена на фиг. 6. Взаимодействие происходит в плоскостях $\text{Re } \lambda = 0$ и $\text{Im } \lambda = 0$.

При увеличении p от нуля два минимальных по абсолютной величине мнимых корня сближаются, затем при $p = (c_1/m)^{1/2}$ происходит сильное взаимодействие, и эти корни расходятся от нуля по действительной оси в разные стороны — система теряет устойчивость. Затем при дальнейшем увеличении p начинается сближение этих корней. При $p = (c_2/m)^{1/2}$ происходит сильное взаимодействие, и собственные значения расходятся от нуля по мнимой оси — система вновь обретает устойчивость. Что же касается второй пары мнимых корней, больших по абсолютной величине, то при увеличении p они монотонно возрастают по абсолютной величине, не оказывая влияния на устойчивость.

Разложения λ при критических значениях $p^2 = c_1/m$ и $p^2 = c_2/m$ с точностью до величин более высокого порядка малости записываются в виде

$$\lambda = \pm [(c_2 - c_1) \delta (p^2)/(3c_1 + c_2)]^{1/2} (p^2 = c_1/m)$$

$$\lambda = \pm i [(c_2 - c_1) \delta p^2/(c_1 + 3c_2)]^{1/2} (p^2 = c_2/m)$$

Такая картина взаимодействия реализуется, если $c_1 < c_2$. В этом случае двукратный ноль $\lambda = 0$ в задаче на собственные значения (4.2) при $p^2 = c_1/m$ и $p^2 = c_2/m$ характеризуется одним собственным вектором, что означает сильное взаимодействие. Если же $c_1 = c_2$, то двукратный ноль $\lambda = 0$ в задаче (4.2) будет отвечать двум линейно независимым собственным векторам: $X_1 = (1, 0)^T$ и $X_2 = (0, 1)^T$. Следовательно, в этом случае взаимодействие собственных значений λ при $p^2 = c/m$, $c = c_1 = c_2$ будет слабым, и система не потеряет устойчивость.

Действительно, в этом случае согласно (4.3) имеем

$$\lambda^2 = - ((c/m)^{1/2} \pm p)^2 \quad (4.4)$$

Зависимость всех четырех корней λ от p согласно (4.4) — линейная (фиг. 7). Их взаимодействие происходит в плоскости $\text{Re } \lambda = 0$. При $p = 0$ корни $\lambda_1 = i(c/m)^{1/2}$ и $\lambda_2 = -i(c/m)^{1/2}$ двукратные. При увеличении p они расходятся по мнимой оси. Два минимальных по абсолютной величине корня сближаются и при $p = (c/m)^{1/2}$ обращаются в ноль. Однако смены плоскости не происходит (слабое взаимодействие) и устойчивость не теряется ни при каких p .

Скорость $p = (c/m)^{1/2}$ называется критической [6]. Между тем в этом случае двукратному $\lambda = 0$ соответствуют два линейно независимых собственных вектора. Решение устойчиво, поскольку секулярные члены отсутствуют, см. (3.10). Однако отмеченная устойчивость вращения вала будет чувствительна к несовершенствам: сколь угодно малое изменение жесткостей c_1 или c_2 приведет к появлению малой области неустойчивости $c_1/m \leq p^2 \leq c_2/m$.

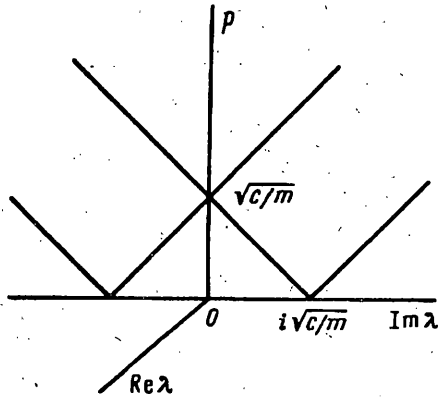
Устойчивость движения при превышении критической скорости (точки бифуркации) отмечается и в других задачах о вращении тел [3].

5. Рассмотрим гироскопическую систему (1.1), в которой матрица A является отрицательно определенной $A = -C$, $C > 0$, гироскопические силы пропорциональны параметру $v \geq 0$ и $\det G \neq 0$. В результате приходим к задаче на собственные значения

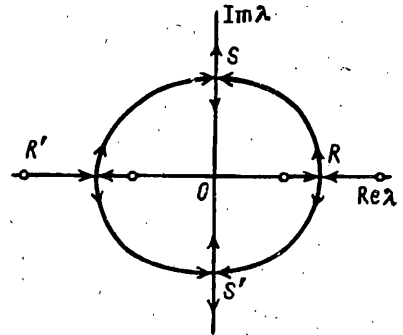
$$[M\lambda^2 + p\lambda G - C] X = 0 \quad (5.1)$$

Исследуем поведение собственных значений λ в зависимости от параметра p . При $p = 0$ из (5.1) получим

$$CX = \lambda^2 MX \quad (5.2)$$



Фиг. 7



Фиг. 8

Это уравнение имеет n собственных значений $0 < \omega_1^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$, которые положительны ввиду $M > 0, C > 0$. Поэтому при $p=0$ все корни $\lambda = \pm \omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$ лежат на действительной оси симметрично относительно начала координат — система неустойчива.

Наряду с (5.1) рассмотрим сопряженную задачу

$$[M\lambda^2 - p\lambda G - C]Y = 0 \quad (5.3)$$

С использованием (5.1), (5.3) найдем производную простого собственного значения λ [11]:

$$\frac{d\lambda}{dp} = - \frac{\lambda (GX, Y)}{2\lambda (MX, Y) + p (GX, Y)} \quad (5.4)$$

При $p=0$ имеем $\lambda = \omega_i, Y = X$. Поэтому $(GX, Y) = 0$, так как $G^T = -G$. Следовательно, $d\lambda/dp = 0$ при $p=0$ для всех λ .

Известно, что условия $C > 0$ и $\det G \neq 0$ являются достаточными условиями для стабилизации гироскопической системы при достаточно больших $p > p_s$ [8]. В этой же работе дается оценка p_s . Заметим, что поскольку наряду с λ собственными значениями также являются $-\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$, то стабилизация гироскопической системы означает переход всех λ на мнимую ось. Этот переход не может быть осуществлен через $\lambda=0$ ввиду $C > 0$.

Проследим особенности поведения λ при изменении p . При $p=0$ все λ действительны и $d\lambda/dp = 0$. При увеличении p значения λ начинают двигаться по действительной оси, фиг. 8. Они не могут с нее сойти, поскольку это означало бы появление дополнительных корней $\bar{\lambda}$ и $-\bar{\lambda}$, что невозможно. Поэтому сход λ с действительной оси возможен только при их встрече и сильном взаимодействии в т. R, R' . Если λ — действительное число, то соответствующий вектор X также действительный. Поэтому умножая (5.1) на X и используя $(GX, X) = 0$, найдем $\lambda^2 = (CX, X)/(MX, X)$. Следовательно, действительные величины λ^2 находятся в пределах $\omega_1^2 \leq \lambda^2 \leq \omega_n^2$, где ω_1^2, ω_n^2 — минимальное и максимальное собственные значения задачи (5.2).

Рассмотрим теперь случай r — кратных λ^2 при $p=0$, что означает в задаче (5.2) наличие r ортогональных собственных векторов X_1, X_2, \dots, X_r , соответствующих λ^2 (слабое взаимодействие). Согласно [12, 13] при малых p разложения λ имеют вид $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 p + o(p)$, где поправки λ_1 находятся из решения уравнения

$$\det [(GX_i, X_j) + 2\lambda_1 (MX_i, X_j)] = 0 \quad (i, j = 1, \dots, r)$$

Так как матрица $[(GX, X)]$ кососимметричная, а матрица $[(MX, X)]$ — симметричная, то все корни λ чисто мнимые или нули. Например, если $r=2$, то

$$\lambda_1 = \pm 1/2i |(GX_1, X_2)| |(MX_1, X_1)(MX_2, X_2)|^{-1/2}$$

Это означает, что при возрастании p от нуля действительные λ расходятся в разные стороны параллельно мнимой оси.

Последующий переход собственных значений на мнимую ось при дальнейшем увеличении p происходит при встрече пар $\lambda, -\lambda$ и $-\lambda, \lambda$ в точках S, S' и их сильном взаимодействии (фиг. 8). Стабилизация гироскопической системы достигается при выходе всех λ на мнимую ось. Сход λ с мнимой оси (потеря колебательной или статической устойчивости) возможен лишь при встрече двух частот и их сильном взаимодействии. Таким образом, сильное взаимодействие частот колебаний является механизмом как гироскопической стабилизации, так и потери устойчивости.

Заметим, что согласно теореме Томсона — Тета — Четаева [1, 5] стабилизация гироскопической системы возможна лишь при четной степени неустойчивости потенциальной системы, т. е. поскольку $C > 0$ при четном n . В нашем случае это условие выполнено, так как $\det G \neq 0$. В случае нечетного n , как известно, для любой кососимметричной матрицы G имеем $\det G = 0$. Интерпретация теоремы Томсона — Тета — Четаева следующая: гироскопическая стабилизация обуславливается парным взаимодействием частот колебаний. При нечетном n нет пары, взаимодействие с которой могло бы вывести λ с действительной оси (фиг. 8).

В точках сильного взаимодействия R, R', S, S' справедливы разложения

$$\lambda = \lambda_0 \pm \lambda_1 (p - p_0)^{1/2} \quad (p > p_0)$$

$$\lambda = \lambda_0 \pm i\lambda_1 (1p - p_0)^{1/2} \quad (p < p_0)$$

где величина λ_1 определяется из уравнения

$$\lambda_1^2 = - \frac{\lambda_0 (GX_0, Y_0)}{([Gp + 2\lambda_0 M] X_1, Y_0) + (MX_0, Y_0)} \quad (5.5)$$

В этом уравнении X_0 и Y_0 определяются из (5.1), (5.3), а для определения присоединенного вектора X_1 служит уравнение $[M\lambda_0^2 + pG\lambda_0 - C] X_1 = -pGX_0 - 2\lambda_0 MX_0$. В точке кратности выполняется условие ортогональности

$$([\lambda_0 p G + 2\lambda_0^2 M] X_0, Y_0) = 0 \quad (5.6)$$

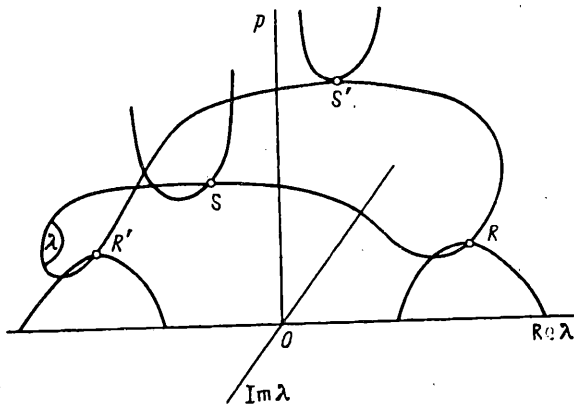
В точках S, S' при выходе на мнимую ось $\lambda_0 = i\omega_0, \bar{\lambda}_0 = -i\omega_0, p = p_s$, поэтому в (5.5), (5.6) следует положить $Y_0 = X_0$. Отсюда следует, что числитель выражения (5.5) положительный $-\lambda_0 (GX_0, X_0) = 2\omega_0^2 (MX_0, X_0)/p_s > 0$. Это означает, что сильное взаимодействие не вырождено [12, 13].

Оценим частоту ω_0 . Из условия ортогональности (5.6) и (5.1) найдем $\omega_0^2 = (CX_0, X_0)/(MX_0, X_0)$. Следовательно, $\omega_1^2 \leq \omega_0^2 \leq \omega_n^2$, где ω_1^2, ω_n^2 — минимальное и максимальное собственные значения в задаче (5.2).

При выходе частот на мнимую ось, в т. S, S' они затем расходятся по ней в разные стороны (фиг. 8). Производная частоты по p равна

$$d\omega/dp = -(\omega/p)(c + \omega^2 m)/(c - \omega^2 p)$$

Отсюда следует, что для половины частот $c - \omega^2 m > 0$, а для другой половины $c - \omega^2 m < 0$. Докажем монотонность движения частот по мнимой оси. Действительно, если для какой-то частоты величина $c - \omega^2 m$ изменяет знак, то при некотором p эта величина обращается в ноль. Это есть условие ортогональности, что означает сильное взаимодействие (потерю устойчивости). Так как при



Фиг. 9

$p > p_s$ система устойчива, то величины $c - \omega^2 m$ не меняют знак. Итак, $n/2$ положительных частот при $p > p_s$ монотонно уходят в бесконечность, а $n/2$ положительных частот стремятся к нулю. Соответственно движутся и n отрицательных частот. Все это согласуется с асимптотическим поведением частот при больших p [4].

Картина стабилизации гироскопическими силами представлена на фиг. 9. Здесь показано поведение четырех частот. В точках R, R', S, S' происходит сильное взаимодействие.

Пример: система с двумя степенями свободы. Рассмотрим гироскопическую систему [5]: $x_1 + px_2 - c_1 x_1 = 0, x_2 - px_1 - c_1 x_2 = 0$.

Константы c_1 и c_2 и параметр p будем считать положительными величинами, $c_2 > c_1$. Данная система неустойчива при одних потенциальных силах ($p = 0$). При достаточно больших гироскопических силах $p > p_s$ система стабилизируется.

Характеристическое уравнение системы записывается в виде $\lambda^4 + (p^2 - c_1 - c_2)\lambda^2 + c_1 c_2 = 0$. При $p = 0$ имеем $\lambda_1^2 = c_1, \lambda_2^2 = c_2$. При увеличении p действительные корни λ_1, λ_2 сближаются, при $p = p_R = c_2^{1/2} - c_1^{1/2}$ становятся кратными $\lambda^2 = (c_1 c_2)^{1/2}$, а затем покидают действительную ось. При $p = p_S = c_1^{1/2} + c_2^{1/2}$ корни вновь становятся кратными $\lambda^2 = -(c_1 c_2)^{1/2}$, происходит их сильное взаимодействие, и при $p > p_s$ система стабилизируется (фиг. 8, 9).

При $c_2^{1/2} - c_1^{1/2} \leq p \leq c_1^{1/2} + c_2^{1/2}$ все корни λ лежат на окружности радиуса $(c_1 c_2)^{1/4}$.

Автор благодарит А. Ю. Ишлинского и В. Ф. Журавлева за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
2. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
3. Ишлинский А. Ю. Пример бифуркации, не приводящей к появлению неустойчивых форм стационарного движения // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117. № 1. С. 47—49.
4. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
5. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.
6. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
7. Lancaster P. Lambda — matrices and vibrating syst ms. Oxford: Pergamon Press, 1966. 193 p.
8. Лахаданов В. М. О стабилизации потенциальных систем // ПММ, 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 53—58.
9. Журавлев В. Ф. Обобщение теоремы Рэлея на гироскопические системы // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 606—610.

10. *Huseyin K.* Vibrations and stability of multiple parameter systems. Alphen aan den Rijn: Noordhoff, 1978. 216 p.
11. *Сейранян А. П., Шаранюк А. В.* Анализ чувствительности частот колебаний механических систем// Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 37—41.
12. *Сейранян А. П.* Взаимодействие собственных значений. М., 1990. 37 с. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. № 446.
13. *Сейранян А. П.* Анализ чувствительности собственных значений и развитие неустойчивости//
Strojnický Cas. 1991. Т. 42. № 3. С. 193—208.

Москва

Поступила в редакцию
5.X.1990