

УДК 539.3

© 1993 г. Ю. А. АНТИПОВ, Н. Х. АРУТЮНЯН

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО СТРИНГЕРА С ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ И ПОЛОСОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ

Решается задача о передаче нагрузки от полубесконечного стрингера к упругим полуплоскости или полосе, сцепленной с жестким основанием. Стрингер, подверженный равномерно распределенному по длине давлению, растягивается сосредоточенной на конце силой. Область контакта разбивается на конечный участок проскальзывания, на котором учитывается кулоновское трение, и полубесконечный отрезок сцепления, который описывается условиями контакта [1]. Длина зоны проскальзывания определяется в ходе решения задачи из условия ограниченности контактных касательных напряжений в точке перехода от трения к сцеплению. Задача сводится к интегродифференциальному уравнению типа Прандтля на полубесконечном отрезке, допускающему точное решение при помощи аппарата краевой задачи Римана. Для задачи о взаимодействии стрингера с полуплоскостью определяются условия, которым должна удовлетворять нормальная нагрузка, чтобы задача была разрешима. Найдены формулы для контактных касательных напряжений и скачка смещений в зоне проскальзывания. В отличие от задачи Койтера [2] контактные напряжения непрерывны всюду в области контакта (в том числе ограничены на конце стрингера). Численные расчеты проведены для задачи о контакте накладки с полосой.

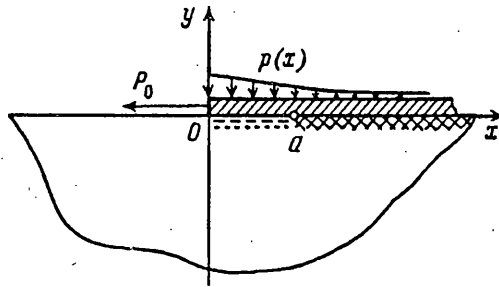
1. Задача о контакте с учетом трения полубесконечного стрингера с полуплоскостью. Пусть в условиях плоской деформации полубесконечный стрингер $\{0 < x < \infty, 0 < y < h\}$ контактирует с упругой полуплоскостью $\{-\infty < x < \infty, -\infty < y < 0\}$. Модули упругости и коэффициенты Пуассона соответственно полуплоскости и стрингера есть E, ν и E_0, ν_0 . Накладка вдавлируется в полуплоскость под действием нормальной нагрузки интенсивности $p(x)$ и растягивается приложенной на конце $x=0$ сосредоточенной силой P_0 (фиг. 1). В области контакта выделяется зона проскальзывания $\{0 < x < a, y = 0\}$, в которой выполняются условия кулоновского трения. На остальной части предполагается сцепление стрингера с полуплоскостью.

Так как накладка лишена изгибной жесткости, то нормальная нагрузка «проникает» сквозь накладку, т. е. $\sigma_y(x, 0) = -p(x), 0 < x < \infty$. На участке проскальзывания касательные и нормальные напряжения связаны законом сухого трения

$$\tau(x) = -\mu p(x), \quad 0 \leq x \leq a \quad (1.1)$$

где $\mu = \mu_* \operatorname{sgn} P_0$, μ_* — коэффициент трения. В точке $x = a$ касательные напряжения $\tau(x)$ ограничены, а на полубесконечном отрезке сцепления недостаточны для того, чтобы вызвать проскальзывание $|\tau(x)| < \mu_* p(x), a < x < \infty$. Кроме того в соответствии с [1] требуем совпадения осевой деформации накладки $\varepsilon_x^\circ(x)$ и деформации $\varepsilon_x(x, 0)$ граничных точек полуплоскости в направлении оси Ox , т. е.

$$\varepsilon_x^\circ(x) = \varepsilon_x(x, 0), \quad a < x < \infty \quad (1.2)$$



Фиг. 1.

Указанные деформации имеют вид ($x > 0$):

$$\varepsilon_x^0(x) = \frac{1 - \nu_0^2}{hE_0} \left[P_0 + \int_0^x \tau(\xi) d\xi \right] \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_x(x, 0) = \frac{1 + \nu}{E} \left[-\kappa_- p(x) + \frac{\kappa_+}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau(\xi) d\xi}{\xi - x} \right], \quad \kappa_\pm = \frac{\kappa \pm 1}{2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu$$

Подставляя последние два выражения в равенство (1.2), приходим к интегродифференциальному уравнению Прандтля

$$\int_0^x \tau(\xi) d\xi + \frac{\gamma_+}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau(\xi) d\xi}{x - \xi} = -P_0 - \gamma_- p(x), \quad a < x < \infty$$

$$\gamma_\pm = \kappa_\pm \gamma_0, \quad \gamma_0 = (1 + \nu) hE_0 [E(1 - \nu_0^2)]^{-1} \quad (1.4)$$

решение которого должно удовлетворять условию равновесия стрингера

$$\int_0^\infty \tau(\xi) d\xi + P_0 = 0 \quad (1.5)$$

Доопределим уравнение (1.4) на всю вещественную ось при помощи функций $\tau_\pm(x)$ таких, что $\text{supp } \tau_+ \subset [0, \infty)$, $\text{supp } \tau_-(x) \subset (-\infty, a]$, причем $\tau_+(x) = -\mu p(x)$, $0 \leq x \leq a$ и $\tau_+(x) = \tau(x)$, $a < x < \infty$, а $\tau_-(x)$ — неизвестная функция при $x < a$. Имеем ($H(x)$ — функция Хевисайда)

$$\int_{-\infty}^x \tau_+(\xi) d\xi + \frac{\gamma_+}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\tau_+(\xi) d\xi}{x - \xi} = -P_0 H(x - a) - \gamma_- p(x) H(x - a) + \tau_-(x),$$

$$-\infty < x < +\infty \quad (1.6)$$

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi^+(\alpha) = \int_0^\infty \tau(a+t) e^{i\alpha t} dt, \quad \Phi^-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \tau_-(a+t) e^{i\alpha t} dt$$

$$P^+(\alpha) = \int_0^\infty p(a+t) e^{i\alpha t} dt, \quad P^-(\alpha) = \int_{-a}^0 p(a+t) e^{i\alpha t} dt \quad (1.7)$$

и подействуем преобразованием Фурье на уравнение (1.6). В результате получим краевую задачу Римана

$$(1 + \gamma_+ |\alpha|) [\Phi^+(\alpha) - \mu P^-(\alpha)] = -P_0 + i\alpha \gamma_- P^+(\alpha) - i\alpha \Phi^-(\alpha)$$

$$(-\infty < \alpha < +\infty) \quad (1.8)$$

Факторизуем функцию $1 + \gamma_+ |\alpha|$:

$$1 + \gamma_+ |\alpha| = X^+(\alpha)X^-(\alpha), \quad X^\pm(\alpha) = K^\pm(\alpha)X_0^\pm(\alpha)$$

$$K^\pm(\alpha) = (\pi\gamma_+)^{1/2} \Gamma(1 \mp i\alpha/\pi) [\Gamma(1/2 \mp i\alpha/\pi)]^{-1}, \quad X_0^\pm(\alpha) = X_0^{\pm 1}(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C}^\pm$$

$$X_0(\alpha) = \exp\left(\frac{\alpha}{\pi i} \int_0^\infty \ln G_0(\eta) \frac{d\eta}{\eta^2 - \alpha^2}\right), \quad X_0^\pm(0) = \gamma_\pm^{-1/2} \quad (1.9)$$

$$G_0(\alpha) = (\gamma_+ \alpha)^{-1} \operatorname{th} \alpha + \operatorname{th} |\alpha|, \quad \operatorname{ind} G_0(\alpha) = 0$$

и представим функции $[X_0^\pm(\alpha)]^{\pm 1} P^\mp(\alpha)$ в виде

$$[X^\pm(\alpha)]^{\pm 1} P^\mp(\alpha) = \Psi_\pm^+(\alpha) - \Psi_\pm^-(\alpha), \quad \Psi_\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{[X^\pm(\alpha)]^{\pm 1} P^\mp(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha \quad (1.10)$$

Решение задачи (1.8) в классе функций $\Phi^\pm(\alpha) = O(\alpha^{-3/2})$, $\alpha \rightarrow \infty$, $\alpha \in \mathbb{C}^\pm$: $\operatorname{Im} \alpha \geq 0$ (контактные напряжения $\tau(x)$ ищутся ограниченными в точке $x=a$) определяется формулами

$$\Phi^+(\alpha) = [X^+(\alpha)]^{-1} [i\alpha\gamma_- \Psi_-^+(\alpha) + \mu\Psi_+^+(\alpha)] \quad (1.11)$$

$$\Phi^-(\alpha) = -(i\alpha)^{-1} [\mu X^-(\alpha) \Psi_-^+(\alpha) + P_0] - \gamma_- X^-(\alpha) \Psi_-^-(\alpha)$$

Функция $\Phi^-(\alpha)$ аналитична в точке $\alpha=0$ тогда и только тогда, когда $(X^-(0)=1)$:

$$P_0 + \mu\Psi_-^+(0) = 0 \quad (1.12)$$

С другой стороны условие равновесия (1.5) вследствие соотношений (1.7) и (1.11) преобразуется к виду

$$P_0 - \mu P^-(0) + \mu [X^+(0)]^{-1} \Psi_+^+(0) = 0 \quad (1.13)$$

Учитывая первое равенство в (1.10), убеждаемся в совпадении условий (1.12) и (1.13). Соотношение (1.12) обеспечивает не только аналитичность функции $\Phi^-(\alpha)$ в точке $\alpha=0$ и равновесие стрингера, но и является трансцендентным уравнением относительно длины зоны проскальзывания a .

Рассмотрим случай постоянной нагрузки: $p(x) = p$, $0 < x < \infty$. Тогда можно переобозначить $P_0^* = P_0 + \gamma_- p$ и считать в уравнении (1.4) $p(x) \equiv 0$. Вследствие этого имеем

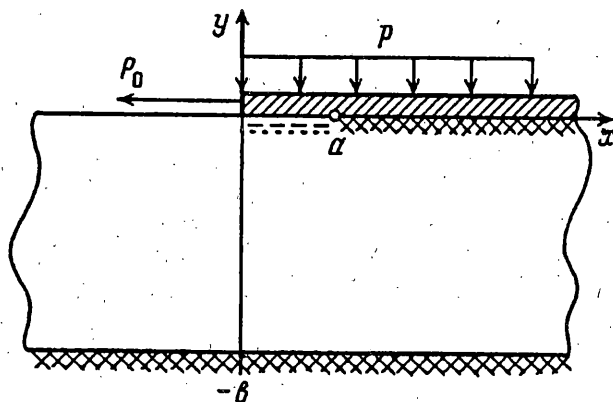
$$P^+(\alpha) = 0, \quad P^-(\alpha) = (i\alpha)^{-1} p (1 - e^{-i\alpha a}), \quad \Psi_\pm^-(\alpha) = 0$$

Условие аналитичности функции $\Phi^-(\alpha)$ в точке $\alpha=0$ запишется в виде $P_0^* + \mu\Psi_-^+(0) = 0$, а условие равновесия стрингера сохранит вид (1.12). Так как $P_0 \neq P_0^*$ ($p \neq 0$), то решение не существует. Заметим при этом, что решение не будет существовать и в более широком классе: $\Phi^\pm(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$, $\alpha \rightarrow \infty$, $\alpha \in \mathbb{C}^\pm$.

Следование схеме решения задачи доказывает, что условие аналитичности функции $\Phi^-(\alpha)$ в точке $\alpha=0$ эквивалентно условию равновесия (1.5) тогда и только тогда, когда выполняются условия: $p(x) \in L_1(0, A)$ ($0 < A < \infty$) и $|p(x)| \leq Cx^\varepsilon$ ($C > 0$, $\varepsilon < 0$) при $x \rightarrow \infty$.

В частности, решение существует, если $p(x) = pH(b-x)$, $0 < b < \infty$. Тогда

$$P^+(\alpha) = p(i\alpha)^{-1} (e^{i\alpha(b-a)} - 1), \quad P^-(\alpha) = p(i\alpha)^{-1} (1 - e^{-i\alpha a})$$



Фиг. 2

$$\Psi_+(z) = \frac{p}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X^+(\alpha) (1 - e^{-i\alpha a})}{i\alpha (\alpha - z)} d\alpha,$$

$$\Psi_-(\alpha) = \frac{p}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[X^-(\alpha)]^{-1} (e^{i\alpha(b-a)} - 1)}{i\alpha (\alpha - z)} d\alpha.$$

2. Контакт полубесконечного стрингера с упругой полосой в условиях трения и сцепления. Рассмотрим контактную задачу для упругой полосы $\{-\infty < x < \infty, -b < y < 0\}$, сцепленной с жестким основанием и усиленной полубесконечным стрингером $\{0 < x < \infty, -b < y < 0\}$ (фиг. 2). Стрингер растягивается сосредоточенной на конце $x = 0$ силой P_0 и вдавливается в слой равномерно распределенной постоянной нагрузкой интенсивности p (в этом случае в отличие от задачи для полуплоскости задача имеет решение). Как и в п. 1, зона контакта разбивается на участки проскальзывания $(0, a)$ и сцепления (a, ∞) . Определим длину зоны трения a , формулы для контактных касательных напряжений $\tau(x)$ на участке сцепления и скачка смещений накладке и слоя в зоне проскальзывания.

Горизонтальная деформация граничных точек слоя имеет вид

$$\varepsilon_x(x, 0) = \frac{1 + \nu}{E} \left[-\frac{\kappa_+}{b} \int_0^{\infty} S\left(\frac{x - \xi}{b}\right) \tau(\xi) d\xi + \frac{p}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(\alpha b)}{\alpha} e^{-i\alpha x} d\alpha \right] \quad (2.1)$$

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(\alpha) \sin \alpha x d\alpha, \quad g(\alpha) = \frac{\kappa \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + \alpha}{\kappa \operatorname{sh}^2 \alpha + \alpha^2 + \kappa_+^2},$$

$$g_1(\alpha) = \frac{\kappa \kappa_- \operatorname{sh}^2 \alpha - \alpha^2}{\kappa \operatorname{sh}^2 \alpha + \alpha^2 + \kappa_+^2}$$

Подставляя соотношения (1.3) и (2.1) в (1.2), получаем интегродифференциальное уравнение типа Прандтля

$$\int_{-\lambda}^t \chi(\tau) d\tau + \gamma \int_{-\lambda}^{\infty} S(t - \tau) \chi(\tau) d\tau = -P_0 + \frac{\gamma_0 p}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\alpha) e^{-i\alpha(\lambda+t)} \frac{d\alpha}{\alpha}$$

$$0 < t < \infty, \quad \lambda = a/b, \quad \gamma = \gamma_+/b, \quad \chi(t) = b\tau(a + bt) \quad (2.2)$$

Параметры γ_0, γ_+ определены в (1.4), функция $\chi(t)$ на отрезке $-\lambda < t < 0$ известна: $\chi(t) = -p_*$, $p_* = \mu b p$. При помощи функций $\chi_{\pm}(t)$: $\operatorname{supp} \chi_+ \subset [-\lambda, \infty)$, $\operatorname{supp} \chi_- \subset (-\infty, 0]$, $\chi_+(t) = \chi(t)$, $-\lambda < t < \infty$ доопределим урав-

нение (2.2) на всю ось и применим преобразование Фурье. Вводя в рассмотрение кусочно-аналитические функции

$$\Phi^+(\alpha) = \int_0^{\infty} \chi(t) e^{i\alpha t} dt, \quad \Phi^-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \chi_-(t) e^{i\alpha t} dt \quad (2.3)$$

приходим к краевой задаче Римана ($-\infty < \alpha < +\infty$):

$$G(\alpha) [\Phi^+(\alpha) - p_*(i\alpha)^{-1} (1 - e^{-i\alpha\lambda})] = -P_0 - \gamma_0 p g_1(\alpha) e^{-i\alpha\lambda} - i\alpha \Phi^-(\alpha) \quad (2.4)$$

Факторизация функции $G(\alpha) = 1 + \gamma\alpha g(\alpha)$ определяется формулами

$$G(\alpha) = X^+(\alpha) X^-(\alpha), \quad X^{\pm}(\alpha) = K^{\pm}(\alpha) X_0^{\pm}(\alpha) \quad (2.5)$$

Функции $K^{\pm}(\alpha)$, $X_0^{\pm}(\alpha)$ имеют вид (1.9), если заменить γ_+ на γ и в качестве функции $G_0(\alpha)$ взять следующую:

$$G_0(\alpha) = \frac{\text{th } \alpha}{\gamma\alpha} + \frac{\kappa \text{sh}^2 \alpha + \alpha \text{th } \alpha}{\kappa \text{sh}^2 \alpha + \kappa_+^2 + \alpha^2}$$

Перепишем краевое условие (2.4) в виде

$$X^+(\alpha) [\Phi^+(\alpha) - (i\alpha)^{-1} p_*] + (i\alpha)^{-1} p_* = -[X^-(\alpha)]^{-1} [i\alpha \Phi^-(\alpha) + P_0 + (i\alpha)^{-1} p_* e^{-i\alpha\lambda} G(\alpha) + \gamma_0 p g_1(\alpha) e^{-i\alpha\lambda}] + (i\alpha)^{-1} p_*, \quad -\infty < \alpha < +\infty \quad (2.6)$$

Функции $G(x)$ и $g_1(\alpha)$ в полуплоскости \mathbb{C}^- имеют счетное множество полюсов $\alpha = -i\beta_n$ ($n = 1, 2, \dots$); β_1 — вещественный корень уравнения $\kappa_+^2 - \beta^2 - \kappa \sin^2 \beta = 0$, $\beta_{2m} = -1/2iz_m$, $\beta_{2m+1} = \overline{\beta_{2m}}$ ($m = 1, 2, \dots$); z_n определяются по итеративной схеме

$$z_n^{(1)} = 2\pi ni, \quad z_n^{(k)} = 2\pi ni + \ln \varphi(z_n^{(k-1)}) \quad (k = 2, 3, \dots)$$

$$\varphi(z) = -\kappa^{-1} (z^2 + \kappa^2 + 1) - e^{-z} \quad (2.7)$$

Вычитаем из левой и правой частей равенства (2.6) функцию

$$\Psi^+(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{iA_n}{\alpha + i\beta_n}, \quad A_n = \frac{e^{-\beta_n \lambda}}{2X_n} \left(\gamma p_* + \gamma_0 p \frac{\kappa \kappa_- \sin^2 \beta_n - \beta_n^2}{\beta_n + \kappa \sin \beta_n \cos \beta_n} \right) \\ X_n = (\pi\gamma)^{1/2} \frac{\Gamma(1 + \pi^{-1}\beta_n)}{\Gamma(1/2 + \pi^{-1}\beta_n)} \exp \left(\frac{\beta_n}{\pi} \int_0^{\infty} \ln G_0(x) \frac{dx}{x^2 + \beta_n^2} \right) \quad (2.8)$$

и применяем к полученному соотношению теорему Лиувилля. В результате имеем решение задачи (2.4):

$$\Phi^+(\alpha) = (i\alpha)^{-1} p_* + [X^+(\alpha)]^{-1} [-(i\alpha)^{-1} p_* + \Psi^+(\alpha)] \\ \Phi^-(\alpha) = -(i\alpha)^{-1} \{X^-(\alpha) [-(i\alpha)^{-1} p_* + \Psi^+(\alpha)] + P_0 + e^{i\alpha\lambda} [p\gamma_0 g_1(\alpha) + (i\alpha)^{-1} p_* G(\alpha)]\} \quad (2.9)$$

Необходимым и достаточным условием аналитичности функции $\Phi^-(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$ является обращение в ноль выражения в фигурной скобке в последнем равенстве. Учитывая представления в окрестности точки $\alpha = 0$

$$X^-(\alpha) = 1 + i\alpha (d_0 + 2\pi^{-1} \ln 2) + O(\alpha^2), \quad G^-(\alpha) = 1 + O(\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow 0$$

$$d_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G_0'(\eta)}{G_0(\eta)} \frac{d\eta}{\eta}, \quad G_0'(\eta) = O(\eta), \quad \eta \rightarrow 0; \quad G_0'(\eta) = O\left(\frac{1}{\eta^2}\right), \quad \eta \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

$b-1, \epsilon=2$		$\mu_*=0,3, b-1$		$\epsilon=2, \mu_*=0,3$	
μ_*	λ	ϵ	λ	b	λ
0,05	20,31	0,01	3,77	0,5	6,88
0,1	10,31	0,1	3,76	1	3,64
0,2	5,31	1	3,70	2	2,03
0,3	3,64	2	3,64	3	1,50
0,4	2,81	5	3,50	5	1,07
0,5	2,31	10	3,30	10	0,756
0,6	1,98	20	2,99	20	0,598
0,7	1,74	50	2,30	50	0,504
0,8	1,56	100	1,48	100	0,472
0,9	1,42	200	0,644	500	0,447
1,0	1,31	500	0,116	1000	0,444

условие аналитичности запишем в виде

$$A_* - p_* (d_0 + 2\pi^{-1} \ln 2 + \lambda) + P_0 = 0, \quad A_* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\beta_n} \quad (2.11)$$

Условие равновесия (1.5) вследствие (2.2) и (2.3) преобразуется следующим образом: $\Phi_0^+ - p_* + P_0 = 0$. Принимая во внимание (2.9), (2.5) и (2.10) приводим последнее равенство к виду (2.11). Уравнение (2.11) — трансцендентное уравнение относительно параметра λ .

Найдем контактные напряжения $\tau(x)$. Для $0 < x < \infty$ имеем на основании (2.2), (2.3) и (2.9)

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{1}{2\pi b} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\Phi^+(\alpha) - p_* \frac{1 - e^{-i\alpha\lambda}}{i\alpha} \right] \exp \left[-\frac{i\alpha(x-a)}{b} \right] d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi b} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Psi^+(\alpha) - (i\alpha)^{-1} p_*}{X^+(\alpha)} e^{i\alpha\lambda} + \frac{p_*}{i\alpha} \right] \exp \left(-\frac{i\alpha x}{b} \right) d\alpha \end{aligned}$$

Отсюда при помощи теории вычетов получаем

$$\tau(x) = -\mu p, \quad 0 < x < a$$

$$\tau(x) = -\frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^0}{G_n} \left(\frac{p_*}{\delta_n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\delta_n - \beta_m} \right) \exp \left(-\delta_n \left(\frac{x}{b} - \lambda \right) \right), \quad a < x < \infty$$

где $\pm i\delta_n$ ($n=1, 2, \dots$) — нули функции $G(\alpha)$, причем $\pm i\delta_1$ — мнимый корень, а остальные — комплексные: $\delta_{2m} = -1/2i\zeta_m$, $\delta_{2m+1} = \overline{\delta_{2m}}$ ($m=1, 2, \dots$), ζ_n определяются так же, как и z_n , формулой (2.7), если функцию $\varphi(\zeta)$ заменить на следующую:

$$\psi(\zeta) = (1 + 1/2\gamma\zeta)^{-1} [-(1 + \gamma) \kappa^{-1}\zeta^2 - (\kappa^2 + 1) \kappa^{-1} - (1 - 1/2\gamma\zeta) e^{-\zeta}]$$

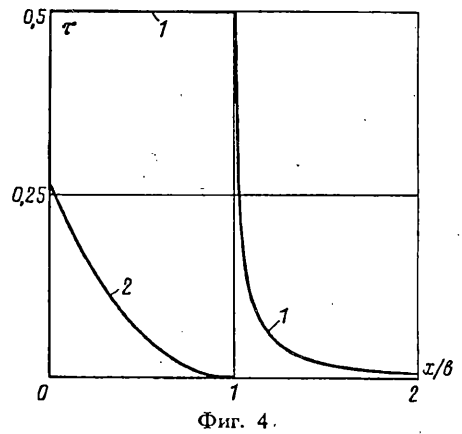
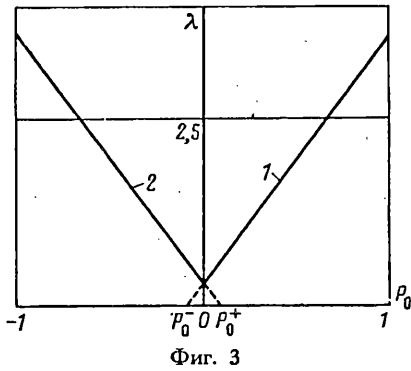
Коэффициенты X_n^0 совпадают с (2.8), если сделать замену β_n на δ_n , и, наконец

$$G_n = \gamma e_n [1/2\kappa \sin 2\delta_n + \kappa\delta_n \cos 2\delta_n + 2\delta_n + 2\delta_n e_n (1/2\kappa \sin 2\delta_n + \delta_n)^2]$$

$$e_n = (\kappa_+^2 - \delta_n^2 - \kappa \sin^2 \delta_n)^{-1}$$

Определим теперь скачок смещений граничных точек слоя и накладки в зоне проскальзывания $\omega(x) = u(x, 0) - u^0(x)$. Найдем сначала деформации. Имеем

$$\epsilon_x^0(x) = (1 - \nu_0^2) (hE_0)^{-1} (P_0 - \mu p x), \quad 0 \leq x \leq a \quad (2.12)$$



$$\begin{aligned} \varepsilon_x(a+bt, 0) = & \frac{1+\nu}{E} \left\{ -\frac{\kappa_+}{2\pi b} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\Phi^+(\alpha) - p_* \frac{1-e^{-i\alpha\lambda}}{i\alpha} \right] ig(\alpha) e^{-i\alpha t} d\alpha + \right. \\ & \left. + \frac{p}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(\alpha)}{\alpha} \exp(-i\alpha(\lambda+t)) d\alpha \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Соотношение (2.13) следует из (2.1), или воспользоваться теоремой о свертке Фурье. Вычисляя интегралы в (2.13) при помощи теории вычетов и учитывая (2.8), находим при $0 < x < a$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, 0) = & \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x) - h_n(x)], \quad f_n(x) = \frac{1-\nu^2}{bEX_n} \left(\frac{p_*}{\beta_n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\beta_n + \beta_m} \right) \times \\ & \times \exp\left(\beta_n \left(\frac{x}{b} - \lambda\right)\right) \\ h_n(x) = & (1-\nu_0^2) (hE_0\beta_n)^{-1} K_n X_n A_n \exp(-\beta_n(x/b - \lambda)) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Интегрируя по x деформации (2.12) и (2.14) и учитывая $\omega(a) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \omega(x) = & b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x) - f_n(a) + h_n(x) - h_n(a)}{\beta_n} - \frac{1-\nu_0^2}{hE_0} \times \\ & \times [P_0(x-a) - \frac{1}{2}\mu p(x^2 - a^2)], \quad 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

3. Численный анализ. Расчеты проведены для задачи о контакте стрингера с полосой при $\nu = \nu_0 = 0,3$, $h = 0,01$, $p = 1$. В таблице приведены значения λ при $P_0 = 1$ для некоторых значений коэффициента трения μ_* , толщины слоя b и отношения модулей упругости $\varepsilon = E_0/E$. Во всех случаях корень λ уравнения (2.11) существует и единственен. На фиг. 3 изображены графики зависимости λ от величины горизонтальной силы P_0 при $p = 1$, $\mu_* = 0,3$, $b = 1$, $\varepsilon = 2$, причем кривая 1 соответствует случаю (1.1) при $\mu = \mu_*$, а кривая 2 — случаю $\mu = -\mu_*$. Как видно, при малых $|P_0|$: $P_0^- \leq P_0 \leq P_0^+$ ($P_0^- = -0,0996$, $P_0^+ = 0,0971$) характеристическое уравнение (2.11) имеет единственный корень λ как в случае $\mu = \mu_*$, так и при $\mu = -\mu_*$ (графики при $P_0 \in (P_0^-, P_0^+)$ изображены штрих-пунктирной линией), причем эти корни не совпадают, т. е. длина зоны трения определяется направлением проскальзывания. Этот парадокс есть следствие приближенности модели, проявившейся при малых $|P_0|$.

На фиг. 4 представлены графики контактных напряжений $\tau(x)$ (кривая 1) и скачка смещений $10^{-1}E\omega(x)$ (кривая 2) для $\mu = 0,5$, $b = 1$, $\sigma = 10$, $P_0 = 0,5$ (в этом случае $\lambda = 0,988$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине // Прикл. мех. Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Е. 1968. Т. 31. № 4. С. 124—135.
2. Koiter W. T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1955. V. 8. № 2. P. 164.

Москва, Одесса

Поступила в редакцию
2.XII.1992