

УДК 539.375

© 1993 г. В. В. БОЛОТИН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН КАК СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

На основе теории роста усталостных трещин, предложенной автором, проанализировано влияние различных случайных факторов на процесс распространения усталостных трещин. Рассмотрены три типа разброса механических свойств, характеризующих сопротивление материала росту усталостных трещин — внутриобразцовый, межобразцовый и межпартионный разброс. Предложены вероятностные модели для описания каждого из типов разброса. Методом вычислительного эксперимента показано, что расхождения в росте усталостных трещин зарождаются уже на ранних стадиях роста, причем эти расхождения слабо компенсируются в дальнейшем даже в условиях хорошо перемешанной стохастической структуры материала. Это указывает на существенное влияние начальных условий и межобразцового разброса на скорости роста усталостных трещин и число циклов до финального разрушения.

1. Все явления, связанные с усталостью материалов и конструкций — зарождение усталостных трещин, их рост, повороты и ветвление, вплоть до финального разрушения образца или детали в той или иной степени находятся, под влиянием различных факторов случайной природы. Это хорошо известно экспериментаторам, которые наблюдают статистический разброс долговечности, измеряемой как до появления первой видимой трещины, так и до финального разрушения. Инженеры-практики знают, как трудно предсказать время и место зарождения первой макроскопической трещины.

Имеются две группы случайных факторов, влияющих на усталостную долговечность — случайный характер нагружения и случайные свойства материала и/или образца (детали, элемента конструкции). Эти факторы взаимодействуют между собой, так что, строго говоря, в расчеты прогнозирования ресурса они должны входить совместно. До сих пор большее внимание уделялось учету случайного процесса нагружения. Это сложилось потому, что для учета статистического разброса механических свойств имелась готовая методология, основанная на коэффициентах запаса, допускаемых напряжениях и т. п. Совместный учет обеих групп случайных факторов обсуждался в [1—3]. При этом главное внимание было уделено влиянию разброса механических свойств на продолжительность первой, инкубационной стадии. В последнее время появился ряд работ [4—6], посвященных росту усталостных трещин в стохастически неоднородной среде. В этих работах либо используются готовые вероятностные модели типа марковских цепей и диффузионных марковских процессов, трактуемые в терминах усталостных повреждений, либо проводится рандомизация известных детерминистических уравнений роста трещин заменой входящих в них детерминистических параметров некоторыми случайными величинами или функциями.

Вопрос о влиянии изменчивости механических свойств на усталостную долговечность, однако, не столь прост. Эта изменчивость проявляется на разных уровнях и разных масштабах длин. Не все компоненты этой изменчивости достаточно изучены, а некоторые практически еще не идентифицированы. Кроме очевидной и легко наблюдаемой статистической неоднородности структуры ма-

териала (например, на уровне зерен, волокон и т. п.), имеет место значительный межобразцовый разброс. Известно [7], что лабораторные образцы, изготовленные из одного листа и тщательно проверенные на макроскопическую идентичность, при испытаниях в идентичных условиях обнаруживают значительные расхождения как по скорости роста трещин, так и по числу циклов до разрушения. Таким образом, наряду со структурной неоднородностью необходимо учитывать межобразцовый разброс. При проектировании машин и конструкций необходимо учитывать также изменчивость свойств коммерческих материалов, например, поставляемых различными заводами и даже сменами, т. е. учитывать неопределенности и случайные факторы, связанные с неустойчивостью технологических процессов, несовершенством систем входного и выходного контроля. Эту группу факторов можно условно назвать межпартионным разбросом.

При наличии достаточной информации влияние межобразцового и межпартионного разброса на усталостную долговечность нетрудно учесть, вводя в расчет распределения соответствующих случайных величин. Для описания внутриобразцового разброса необходимо трактовать характеристики материала как случайные функции координат — случайные поля, что делает прогнозирование внутриобразцового разброса роста трещин более сложной и более содержательной научной задачей. Эта задача осложняется тем, что, строго говоря, отсутствует четкая граница между межобразцовым и внутриобразцовым разбросом. Так, изменчивость скорости роста трещин в опытах [7] можно объяснить тем, что макроскопические свойства металла менялись даже в пределах одного листа заготовки. Поэтому свойства внешне идентичных образцов оказались различными. Другой осложняющий фактор — это влияние начальных условий на скорость роста трещины и, в конечном счете, на число циклов до финального разрушения. Даже при макроскопически идентичных начальных разрезах число циклов до страгивания трещины и начальная скорость страгивания могут меняться в широких пределах. Это происходит из-за того, что на пути распространения трещины располагаются различные реализации случайного поля механических свойств. Разброс возрастает, если условия на фронте начальной трещины, например, уровень начальных микрповреждений изменяется от одного образца к другому неконтролируемым образом.

Цель настоящей статьи — изучить влияние случайной изменчивости механических свойств на условия страгивания и роста усталостных трещин. Эта задача достаточно сложна, если даже пытаться ее ставить на основе простейших моделей, например, используя рандомизированный вариант уравнения Пэриса — Эрдогана. Данная работа построена на основе теории роста усталостных трещин [8, 9], которая позволяет включить в описание как инкубационную стадию, так и все этапы роста макроскопических трещин вплоть до финального разрушения. Средством исследования служит статистический вычислительный эксперимент. По сравнению с обычными аналитическими подходами, основанными на аппарате теории вероятностей и теории случайных процессов, вычислительный эксперимент предоставляет для анализа набор реализаций. Это позволяет исследователю более глубоко понять физическое явление и усмотреть детали, которые остаются в стороне при чисто аналитическом подходе и скрываются за осредненной картиной, получаемой после статистической обработки результатов.

Следуя в основном работам [8, 9], выведем соотношение, описывающие страгивание и дальнейший рост усталостной трещины. Тело с трещиной под нагрузкой трактуем как механическую систему, состояние которой описываем при помощи двух групп обобщенных координат — обычных координат Лагранжа и обобщенных координат Гриффитса. Последние описывают форму, расположение и размеры трещин. Полагая трещины необратимыми, выберем обобщенные координаты Гриффитса a_1, \dots, a_m так, чтобы наложенные на них связи были односторонними. Тогда условием равновесия системы по отношению к обобщенным координатам Гриффитса будет неположительность суммы работ всех внешних и внутренних сил, совершенных

на вариациях от этих обобщенных координат, $\delta A \leq 0$. В терминах обобщенных сил это условие принимает вид

$$G_j \leq \Gamma_j \quad (j = 1, \dots, m) \quad (1.1)$$

где G_j — активная обобщенная сила, соответствующая координате Гриффитса a_j , Γ_j — аналогичная обобщенная сила сопротивления, m — число координат Гриффитса. Если $G_j < \Gamma_j$, то состояние системы называем субравновесным по отношению к координате a_j ; при этом трещина по этой координате не растет. При $G_j = \Gamma_j$ состояние может быть устойчивым, нейтральным или неустойчивым в зависимости от условий, накладываемых на производные от обобщенных сил по обобщенным координатам. Если $G_j > \Gamma_j$, то это означает отсутствие равновесия по координате a_j , т. е. скачкообразное продвижение трещины (возможно, до финального разрушения).

Теория роста усталостных трещин основана на синтезе механики тел с трещинами, изложенной в терминах обобщенных сил, и механики накопления микроповреждений. При этом учету подлежат как микроповреждения непосредственно на фронтах трещин, так и микроповреждения, накапливаемые в дальнем поле, т. е. на путях будущего продвижения фронтов трещин. В общем случае [10] поле микроповреждений задается в виде скалярной или тензорной функции $\omega(x, N)$ координат x и числа циклов N , которая является наследственным функционалом истории нагружения и роста трещин

$$\omega(x, N) = \int_{n=0}^{n=N} \{\sigma(x, n), a(n)\} \quad (1.2)$$

Здесь $\sigma(x, n)$ — поле напряжений в теле, $a(n)$ — совокупность обобщенных координат Гриффитса $a_1(n), \dots, a_m(n)$.

Учет микроповреждений на фронте трещин требует отказа от представления трещин в виде математических разрезов. Это нужно не только для того, чтобы избежать сингулярностей поля напряжений в упругих телах, но и чтобы учесть эффекты затупления и заострения усталостных трещин в процессе их развития. Введем характерные радиусы кривизны ρ_1, \dots, ρ_m на фронтах трещин. Совокупность этих величин $\rho(N)$ также является наследственным функционалом

$$\rho(N) = R \int_{n=0}^{n=N} [\sigma(x, n), a(n)] \quad (1.3)$$

Введение конечных кривизн на фронтах трещин не означает замену их границ гладкими поверхностями. Эти кривизны скорее носят характер мер концентрации напряжений вблизи фронтов. В упругопластическом случае компоненты $\rho(N)$ имеют порядок раскрытий на фронтах трещин.

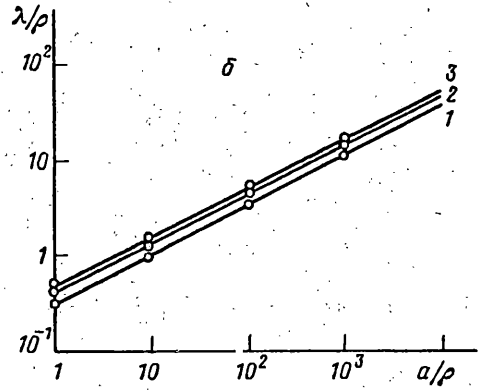
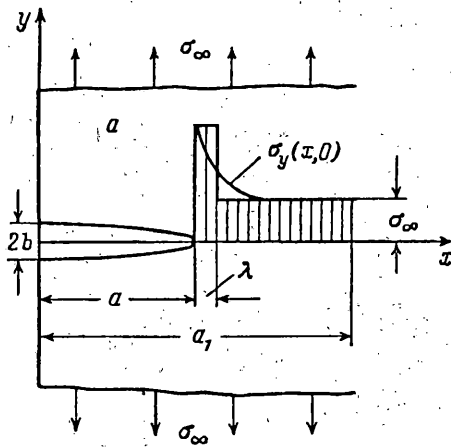
Для замыкания системы определяющих соотношений необходимо иметь зависимость обобщенных сил G_j и Γ_j от механических свойств материала, формы и размеров тела, размещения в нем трещин, способа нагружения, а также уровня микроповреждений. В дальнейшем используем обозначение

$$\psi(N) \equiv \omega[a(N), N] \quad (1.4)$$

где замена x на $a(N)$ в выражении для $\omega(x, N)$ означает, что микроповреждения вычисляются непосредственно на фронтах трещин.

2. В качестве примера возьмем трещину отрыва в неограниченной плите из линейно упругого, но повреждаемого материала (фиг. 1, а). Обозначим полудлину трещины $a(N)$, размах номинального напряжения $\Delta\sigma_\infty(N)$. Размах напряжения отрыва на продолжении трещины $|x| \geq a(N)$, $y=0$ обозначим $\Delta\sigma_y(N)$. Траектуя трещину как узкую эллиптическую щель с полуосями a и $b \ll a$, представим связь между $\Delta\sigma_y$ и $\Delta\sigma_\infty$ в виде [11]:

$$\frac{\Delta\sigma_y}{\Delta\sigma_\infty} = \frac{\xi^2 + \varepsilon}{\xi^2 - \varepsilon} + \frac{(1 - \varepsilon)^2 \xi^4 + 3\xi^2 + \varepsilon(\xi^2 - 1)}{2(\xi^2 - \varepsilon)^3}$$



Фиг. 1

$$\xi = \left\{ (x/a) + [(x/a)^2 - (1 - \eta)]^{1/2} \right\} (1 + \eta^{1/2})^{-1} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon = (a - b)(a + b)^{-1}, \quad \eta = \rho/a, \quad \rho = b^2/a$$

Здесь ε — эксцентриситет эллипса, ρ — радиус кривизны на фронте трещины. Уровень микроповреждений будем характеризовать скалярной функцией $\omega(x, N)$, принимающей значения из интервала $[0, 1]$. При этом уравнение (1.2) возьмем в виде

$$\partial \omega(x, N) / \partial N = ((\Delta \delta_s - \Delta \sigma_{th}) / \sigma_f)^m \quad (2.2)$$

где σ_f — напряжение, характеризующее сопротивление материала накоплению повреждений, $\Delta \sigma_{th}$ — пороговое значение этого сопротивления, m — аналог показателя кривых усталости. Если $\Delta \sigma_s < \Delta \sigma_{th}$, то правая часть в (2.2) должна быть положена равной нулю. Вообще, параметры уравнения (2.2) зависят от структуры цикла, в частности, от характеристики цикла $R = \sigma_{min} / \sigma_{max}$.

Чтобы составить уравнение относительно радиуса кривизны $\rho(N)$, заметим, что при ускоренном росте трещин ее фронт заостряется, при замедленном затупляется. Кроме того, затупление трещины может быть вызвано накоплением микроповреждений на фронте. При этом уравнение относительно $\rho(N)$ должно оставаться применимым и в случае, когда фронт трещины неподвижен. Принимая, что $d\rho/dN$ зависит как от скорости роста трещин da/dN , так и от скорости накопления микроповреждений $d\psi/dN$, положим

$$\frac{d\rho}{dN} = \frac{\rho_s - \rho}{\lambda_p} \frac{da}{dN} + (\rho_b - \rho) \frac{d\psi}{dN} \quad (2.3)$$

где ρ_s — радиус «острой» трещины, ρ_b — радиус «затупленной» трещины, λ_p — некоторая характерная длина. Параметры ρ_s , ρ_b и λ_p предполагаются постоянными материала (при заданной температуре и других условиях среды).

Активную обобщенную силу G выразим через коэффициент интенсивности напряжений K и упругие постоянные материала E и ν , учитывая, что в рассматриваемой задаче активная обобщенная сила совпадает с интенсивностью высвобождения упругой энергии. Влиянием микроповреждений на упругую податливость материала будем пренебрегать. Обобщенную силу сопротивления Γ свяжем с удельной работой разрушения γ_0 , отнесенной к единице вновь обра-

зованной площади трещины (без обычно принятого удвоения), и мерой микроповреждений $\psi(N)$ на фронте трещины:

$$G = K^2 (1 - \nu^2)/E, \quad \Gamma = \gamma_0 (1 - \psi^\alpha) \quad (2.4)$$

Здесь $\alpha > 0$. Трещина не растет, пока $G < \Gamma(\psi)$. При некотором числе циклов N , впервые достигается равенство $G = \Gamma(\psi)$, что отвечает страгиванию трещины. Дальнейший рост трещины в зависимости от распределения микроповреждений непосредственно у фронта происходит либо непрерывно, либо малыми скачками. В первом случае рост трещин происходит при сохранении равенства $G = \Gamma(\psi)$, во втором случае — при попеременном изменении знака неравенства в соотношении

$$G \lesseqgtr \Gamma(\psi) \quad (2.5)$$

Подробности освещены в [9, 12]. Расчет роста трещин сводится, таким образом, к интегрированию уравнений (2.2) и (2.3) с проверкой условий $G \lesseqgtr \Gamma(\psi)$ на каждом шаге продвижения фронта трещины.

Отметим, что для коротких трещин и/или при низких уровнях напряжений вычисления с использованием условий (2.5) могут оказаться неустойчивыми. Это объясняется тем, что трещина растет при значениях ψ , близких к предельным, и обобщенной силе сопротивления Γ , малой по сравнению с ее начальным значением Γ_0 . Тогда «точное» соотношение (2.5) целесообразно заменить на приближенное

$$\psi = \psi_* \quad (2.6)$$

где ψ_* — критическое значение меры микроповреждений. По условию $\psi_* = 1$, однако для повышения вычислительной устойчивости целесообразно принять для ψ_* меньшие значения, например, 0,99 и даже менее.

С другой стороны, когда трещина становится достаточно глубокой, расчет можно упростить, используя квазистационарное приближение [9, 12]. Распределение напряжений впереди трещины (2.1) аппроксимируем в виде

$$\frac{\Delta\sigma_y}{\Delta\sigma_\infty} = \begin{cases} 1 + 2(a/\rho)^{1/2}, & a \leq |x| \leq a + \lambda \\ 1, & |x| > a + \lambda \end{cases} \quad (2.7)$$

Эта формула содержит коэффициент концентрации $\kappa = 1 + 2(a/\rho)^{1/2}$ на фронте эллиптической щели в упругой пластине неограниченных размеров (фиг. 1,а). В формулу (2.7) входит некоторый характерный масштаб длины λ , который может быть истолкован как размер концевой зоны, в которой происходит интенсивное накопление повреждений. Один из способов оценки порядка λ в упругом случае — применение условий статической эквивалентности. Интегрируя выражения (2.1) и (2.7) на отрезке $[a, a_1]$, где $a_1 \gg a$, и приравнявая результаты, получим уравнение

$$\int_a^{a_1} \Delta\sigma_y(x, 0) dx = \Delta\sigma_\infty [2(a/\rho)^{1/2} \lambda + a_1 - a] \quad (2.8)$$

При этом λ оказывается зависящим как от размера трещины, так и от радиуса кривизны на фронте. Зависимость результата от a_1 , очевидно, будет тем слабее, чем больше его значение (достаточно принять $a_1 = 5a$). Если же выбрать λ из условия «равноповреждаемости», то вместо (2.8) придется использовать равенство интегралов от выражений типа $(\Delta\sigma_y - \Delta\sigma_{th})^m$.

Результаты решения уравнения (2.8) представлены на фиг. 1,б, где в логарифмической шкале показана зависимость между λ и ρ при отношениях a_1/a , равных 2, 5 и 10 (линии 1, 2 и 3 соответственно). Вычисления показывают,

что масштаб длины λ изменяется пропорционально $(a\rho)^{1/2}$. Таким образом, полагая $\rho = \text{const}$ необходимо принять, что λ растет пропорционально $a^{1/2}$. Это близко к тому, что дают оценки длины λ_p пластической зоны из условия, аналогичного уравнению (2.8). Действительно, согласно этим оценкам $\lambda_p \sim (K_I/\sigma_p)^2$, где σ_p — напряжение типа предела текучести. Заменим σ_p на $\kappa\sigma_\infty \approx 2(a/\rho)^{1/2}\sigma_\infty$, получим $\lambda \sim (a\rho)^{1/2}$. Заметим, что в модели тонкой пластической зоны как длина зоны λ , так и аналог ρ — раскрытие на фронте трещины пропорциональны размеру трещины a .

Приближенно интегрируя уравнение (2.2) и подставляя результат в условие $G = \Gamma(\psi)$ с учетом формул (2.4) и (2.7), приходим к дифференциальному уравнению роста трещины ($\Delta K > \Delta K_{th}$):

$$\frac{da}{dN} = \lambda \left(\frac{\Delta K_f - \Delta K_{th}}{K_f} \right)^m \left[\left(1 - \frac{K_{max}^2}{K_{IC}^2} \right)^{1/\alpha} - \omega_f(N) \right]^{-1} \quad (2.9)$$

Здесь K_f — характеристика сопротивления материала росту усталостной трещины, ΔK_{th} — пороговое значение этого сопротивления, K_{IC} — характеристика трещиностойкости, $\omega_f(N)$ — мера микрповреждений, накопленных при $|x| > a + \lambda$, т. е. до того, как концевая зона подошла к данной частице материала. При этом параметры уравнений (2.2) — (2.9) связаны соотношениями

$$K_f = (Y/2) \sigma_f (\pi\rho)^{1/2}, \quad \Delta K_{th} = (Y/2) \Delta\sigma_{th} (\pi\rho)^{1/2} \\ K_{IC}^2 = \gamma_0 E / (1 - \nu^2) \quad (2.10)$$

где Y — калибровочный множитель в формуле $K = Y\sigma_\infty (\pi a)^{1/2}$ для коэффициента интенсивности напряжений. Вообще, K_f и ΔK_f , как и σ_f и $\Delta\sigma_{th}$, зависят от структуры цикла, в частности, от коэффициента симметрии R .

Уравнение (2.9) аналогично по структуре полуэмпирическим уравнениям, применяемым для описания процесса роста усталостных трещин. В частности, простейшее из них — уравнение Пэриса — Эрдогана можно получить, полагая $\Delta K_{th} = 0$, $K_{max}^2 \ll K_{IC}^2$, $\omega_f(N) \ll 1$. В отличие от последнего, уравнение (2.9) описывает все три стадии роста трещины: ее начальный рост вблизи значения $\Delta K \approx \Delta K_{th}$, стадию роста со скоростью, приблизительно пропорциональной $(\Delta K)^m$ и заключительную стадию ускоренного роста перед финальным разрушением. Если учитывать суммарное изменение эффективной кривизны на фронте трещины в процессе ее роста, то преимущество, получаемое при переходе от уравнений (2.1) — (2.5) к уравнению (2.9), в значительной степени утрачивается. Так, полагая σ_f и $\Delta\sigma_{th}$ в уравнении (2.2) постоянными материала, приходим к выводу, что K_f и ΔK_{th} в уравнении (2.9) — переменные и, вообще, неизвестные заранее величины. Кроме того, параметр длины λ в уравнении (2.9) тоже, вообще, зависит от a . С другой стороны, если принять, что K_f , ΔK_{th} и λ — постоянные величины, то придется вводить специальные допущения о зависимости σ_f и $\Delta\sigma_{th}$ от ρ и a .

3. На основе соотношений (2.1) — (2.4) исследуем влияние внутриобразцового и межобразцового разброса механических свойств на рост усталостных трещин. Чтобы не затемнять картину, рассмотрим детерминистический стационарный процесс нагружения, полагая $\Delta\sigma_\infty = \text{const}$ и $R = \text{const}$ вплоть до финального разрушения. Далее, примем, что большинство параметров материала — либо детерминистические величины, либо связаны детерминистически с другими величинами, вероятностные характеристики которых заданы. Так, считаем детерминистически заданными показатель m в уравнении (2.2), упругие постоянные E и ν , а также показатель α в уравнениях (2.4). Кроме того, полагаем, что характерный размер λ концевой зоны и радиус кривизны ρ на фронте трещины —

тоже заданные детерминистические величины. Пороговое значение $\Delta K_{\text{н}}$ сопротивления накоплению микрповреждений свяжем детерминистически с соответствующей величиной K_f , например, полагая $\Delta K_{\text{н}} = 0,05K_f$. Параметр трещиностойкости K_{IC} , входящий в уравнение (2.9), характеризует локальные свойства материала и должен коррелировать с K_f . Для упрощения примем, что $K_{\text{IC}} = K_f$.

При сделанных допущениях ближайшая цель состоит в задании случайной функции $K_f(x | I_0, I_1, \dots)$ координаты x , отсчитываемой на продолжении фронта трещины. Эта функция в свою очередь зависит от случайных параметров I_0, I_1, \dots . Имеется много способов выбора этой функции для получения удовлетворительного согласия с опытными данными. Например, можно задать $K_f(x)$ либо как непрерывную случайную функцию x , либо как случайную цепь. Структура большинства конструкционных материалов с точки зрения механики сплошной среды не является непрерывной, что склоняет в пользу дискретных моделей. К тому же рост усталостных трещин, особенно при наличии выраженных пластических зон, обычно является скачкообразным. Однако масштабы структурной неоднородности и размеры скачков малы по сравнению с характерными размерами деталей машин, элементов конструкций и лабораторных образцов, что допускает возможность замены дискретных процессов непрерывными. К тому же фронт трещины, пересекая большое число зерен и других элементов структуры, является своего рода осреднителем, сглаживая маломасштабные неоднородности. При численной реализации континуальных моделей они подвергаются дискретизации, что лишает противопоставление моделей практического основания.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$K_f(x | I_0, I_1) = I_0 + I_1 u(x) \quad (3.1)$$

где I_0 и I_1 — случайные величины, а $u(x)$ — некоторая нормированная случайная функция координаты x , отсчитываемой вдоль траектории трещины. Величины I_0 и I_1 , как и параметры спектральной плотности $S_u(k)$ функции $u(x)$, характеризуют межобразцовый разброс, в то время как стохастическая неоднородность в пределах каждого образца описывается функцией $u(x)$. Если последняя неотрицательна, то I_0 имеет смысл нижней грани сопротивления росту усталостной трещины.

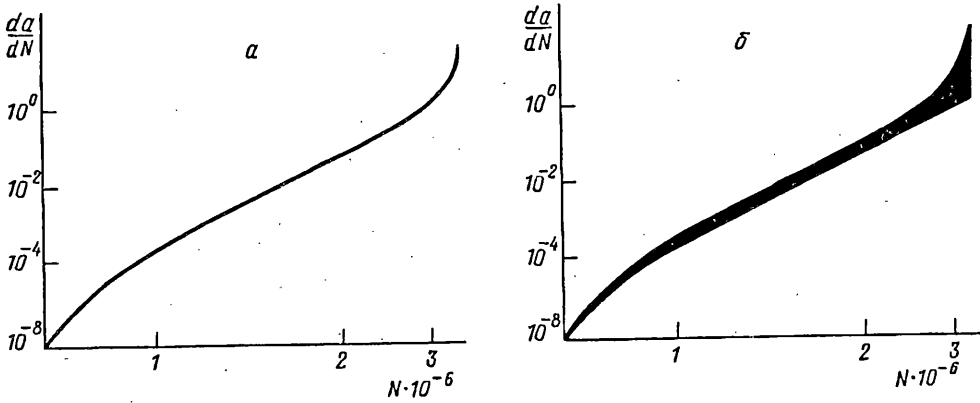
Пусть $u(x)$ задана как результат нелинейного преобразования стационарного эргодического нормального процесса с нулевым математическим ожиданием, единичной дисперсией и спектральной плотностью

$$S_u(k) = \frac{2k_1 k_0}{\pi} \frac{1}{(k^2 - k_0^2)^2 + 4k_1^2 k^2} \quad (3.2)$$

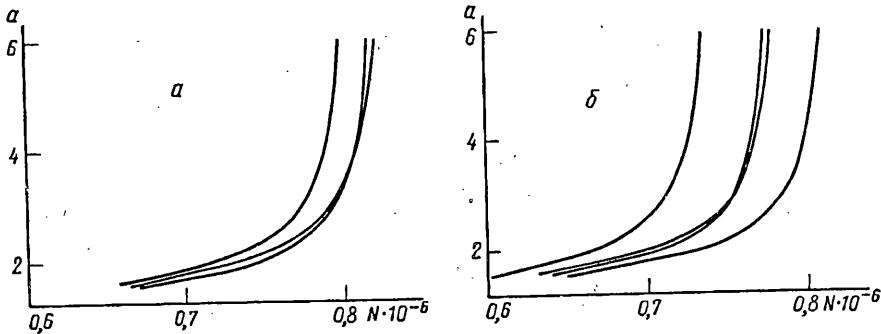
Здесь k — волновое число (аналог частоты). Параметры k_0 и k_1 связаны с характерными масштабами неоднородности λ_0 и характерным масштабом корреляции λ_1 соотношениями $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ и $k_1 = 2\pi/\lambda_1$. Если спектральные свойства поля механических неоднородностей меняются случайным образом от одного образца к другому, то параметры λ_0 и λ_1 должны быть добавлены к I_0 и I_1 . Для упрощения примем их в последующем численном эксперименте детерминистически заданными, а I_1 положим пропорциональным I_0 . Тогда остается только один параметр I_0 , характеризующий межобразцовый разброс. Если этот параметр распределен в конечном интервале $I_- \leq I_0 \leq I_+$, то естественно принять для него бета-распределение. Вводя нормированную случайную величину $v = I / (I_- - I_+)$, где $v \in [0, 1]$, придем к плотности вероятности

$$p(v) = \frac{\Gamma(\mu + \nu) v^{\mu-1} (1-v)^{\nu-1}}{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)} \quad (\mu > 0, \nu > 0) \quad (3.3)$$

Чтобы получить замкнутую совокупность исходных данных, следует задать условия при $N=0$, $x = a_0$, где a_0 — начальный размер трещины. Вообще, рас-



Фиг. 2



Фиг. 3

пределение параметра $\sigma_f(a_0)$ отличается от одноточечного распределения функции $K_f(x)$ при $x > a_0$.

Даже при детерминистически заданном размере a_0 параметр $K_f(a_0)$ меняется от одного образца к другому. Это следует, например, из формул (2.10), показывающих, что $K_f(a)$ зависит как от характеристики материала σ_f , так и от эффективного радиуса кривизны на фронте ρ . Этот радиус трудно контролируется даже при тщательно поставленном эксперименте. В дальнейшем примем, что функция $K_f(x)$ является отрезком однородного случайного процесса, так что $K_f(a_0)$ равно наугад выбранному значению функции $K_f(x)$. Как оказалось, что даже такое предположение, не учитывающее ни разброса начальной глубины трещин, ни состояния на ее фронте, оказывает заметное влияние на рост усталостных трещин.

Для численного примера рассмотрим центральную трещину в полосе шириной b . Возьмем следующие численные данные в формулах (2.9) и (3.1) — (3.3): $\Delta\sigma_\infty = 70$ МПа, $a_0 = 1$ мм, $b = 500$ мм, $\lambda = \lambda_0 = 1$ мм, $\Delta K_{th} = 0,05 K_f$, $K_{IC} = K_f$, $m = 4$, $a = 1$, $I_1 = 0,1$, $I_0, I_- = 50$ МПа \cdot м^{1/2}, $I_+ = 60$ МПа \cdot м^{1/2}, $\mu = \nu = 2$. Функцию $u(x)$ примем в виде $u(x) = [n_1^2(x) + n_2^2(x)]^{1/2}$, где $n_1(x)$ и $n_2(x)$ — два независимых стационарных гауссовских процесса с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, т. е. $u(x)$ — релеевский процесс как функция координаты x .

Диаграммы роста усталостных трещин, связывающие логарифм скорости da/dN с логарифмом размаха ΔK коэффициента интенсивности, приведены на фиг. 2. Эти диаграммы построены по 15 реализациям. Фиг. 2,а учитывает только структурную неоднородность, фиг. 2,б — как структурную неоднородность, так и межобразцовый разброс. В двойной логарифмической шкале разброс становится существенным лишь на последней стадии роста трещин, причем особенно заметен вклад межобразцового разброса (фиг. 2,б).

При относительно компактных диаграммах типа фиг. 2, разброс числа циклов до страгивания трещины и до финального разрушения может составлять полпорядка и даже больше. При этом, как показывал вычисленный эксперимент, разброс формируется уже на ранних стадиях роста трещины. Это проиллюстрировано на фиг. 3, где размер трещины a отложен в функции от числа циклов N . На каждом из графиков нанесены типичные реализации из 15: «лучшая», «худшая» и близкие к средней. Начальные условия для всех реализаций одинаковы за исключением значения $K_f(a_0)$, которое принимается равным наугад взятому значению случайной функции $K_f(x)$. При этом графики на фиг. 3,а построены для условного процесса $K_f(x|I)$, а на фиг. 3,б — с учетом того, что параметр $I = I/(I_+ - I_-)$ распределен случайно с плотностью вероятности (3.3). Во втором случае разброс больше. Однако в обоих случаях он образуется с самого начала вследствие изменчивости функции $K_f(x|I)$ в окрестности точки $x = a_0$.

Полученные результаты качественно отличаются от тех, которые основаны на представлении о росте усталостных трещин как о марковской цепи или диффузионном марковском процессе. Большинство авторов при обсуждении этих моделей и при их сопоставлении с экспериментом мало интересуются поведением реализаций, ограничиваясь сравнением по математическим ожиданиям и дисперсиям. Между тем реализации, описываемые такими моделями, могут существенно отличаться от наблюдаемых в эксперименте. Примером служит появление при численном моделировании отрицательных значений da/dN , а также слишком интенсивное (по сравнению с экспериментом) перемешивание реализаций $a(N)$ [5, 6]. Модель, основанная на рандомизации уравнений типа (2.9) с учетом как внутриобразцового, так и межобразцового разброса, позволяет получить более удовлетворительное описание процесса роста усталостных трещин.

Основной качественный вывод, который следует из результатов вычислительного эксперимента, состоит в следующем. Разброс скоростей роста усталостных трещин и, следовательно, разброс предельных чисел циклов в большей степени определяется межобразцовой изменчивостью механических свойств и, более того, межпартионной изменчивостью, чем статистической структурой материала. Это подтверждается, в частности, тем фактом, что расхождения между кривыми роста усталостных трещин обнаруживаются уже на самых ранних стадиях. В процессе дальнейшего роста структурные неоднородности, как правило, уже не сглаживают этих расхождений. Таким образом, начальные условия оказываются наиболее существенным фактором, влияющим на статистический разброс роста трещин (при детерминистически заданных условиях нагружения). Влияние начальных условий станет еще более заметным, если учесть разброс размеров и формы начальных трещин, уровень поврежденности материала в окрестности их фронтов и т. п. Все эти факторы входят в группу, которая в данной статье отнесена к межобразцовому разбросу.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант — 93—013—16—486).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.
2. Болотин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984.
3. Madsen H. O., Krenk S., Lind N. C. Methods of Structural Safety. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1986.
4. Lin Y. K., Yang J. N. A stochastic theory of fatigue crack propagation // AIAA Journal. Vol. 23. 1985. № 1. P. 117—129.
5. Bogdanoff J. L., Kozin F. Probabilistic Models of Cumulative Damage. New York et al.: John Wiley, 1985.
6. Sobczyk K., Spencer B. F. Jr. Random Fatigue: from Data to Theory. New York et al.: Academic Press, 1992.

7. *Virkler D. A., Hillberry B. M., Goel P. K.* The statistical nature of fatigue crack propagation // Trans. ASME, J. of Engineering Materials and Technology. Vol. 101. 1979. No. 1. P. 148—153.
8. *Болотин В. В.* Уравнения роста усталостных трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 153—160.
9. *Болотин В. В.* Объединенные модели в механике разрушения // Изв. АН СССР, МТТ. 1984. № 3. С. 127—137.
10. *Kračinović D.* Continuum damage mechanics // Appl. Mech. Rev. 1984. Vol. 37. No. 1. P. 1—6.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи теории упругости. М.: Наука, 1966.
12. *Bolotin V. V.* Mechanics of fatigue fracture. In: Non—linear Fracture Mechanics, CISM Course № 314 (Ed. M. Wnuk). Berlin et al.: Springer-Verlag, 1989. P. 1—69.

Москва

Поступила в редакцию
10.III.1993