МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1993

УДК 539.374

© 1993 г. А. В. ГНОЕВОЙ, Д. М. КЛИМОВ, В. М. ЧЕСНОКОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧНЫХ СРЕД[1]

В работе приводится разработанный авторами метод исследования пространственных течений вязко-пластичных сред при сложных граничных условиях, основанный на введении понятия коэффициента «эквивалентной вязкости» и на последующем его аналитическом определении. Это позволяет свести решение широкого класса задач по анализу пространственных течений вязкопластичных сред к решению соответствующих задач гидродинамики вязких жидкостей.

1. Изучением течений вязкопластичных сред занимались многие исследователи [1—7]. Однако, в настоящее время возникли новые постановки краевых задач для изучения течений вязкопластичных сред со сложной реологией. Их суть состоит в следующем. Среда рассматривается находящейся под воздействием нестационарных внешних факторов двух типов: переменная граница области течения и переменные массовые силы. Для сообщения среде желаемого движения граница предполагается изменяющейся медленно, а массовые силы считаются быстроосциллирующими, целью чего является изменение эффективных реологических констант среды.

Краевая задача, таким образом, ставится как задача управления: требуется найти оптимальный вид функций, характеризующих внешние воздействия, рассматриваемые как управления, с тем, чтобы обеспечить экстремум некоторых функционалов, определенных на движениях среды. Такими функционалами могут быть: степень перемешиваемости среды за заданное время, расход среды при заданных энергозатратах и так далее.

В известных публикациях [6, 7] обычно рассматривались течения вязкопластичных сред при сравнительно простых граничных условиях.

Полные уравнения Г. Генки (H. Hencky), описывающие пространственные течения вязкопластичных сред [1], не удается решить из-за существенно нелинейной зависимости тензора напряжений от тензора скоростей деформации. Поэтому часто используется прием замены уравнений течения вязкопластичных сред уравнениями течения вязких жидкостей (уравнениями Навье—Стокса). Именно здесь возникает сложная проблема выбора коэффициента вязкости в уравнениях Навье—Стокса, который характеризует исследуемую вязкопластичную среду. Некоторые авторы называют этот коэффициент «фиктивной» вязкостью, другие — «эффективной». Как следует из публикаций, этот коэффициент обычно выбирается по результатам экспериментальных исследований, которые у разных авторов сильно отличаются друг от друга. Это не позволяет, к сожалению, получить общего подхода для обоснованной замены уравнений течения вязкопластичных сред уравнениями течения вязких жидкостей.

Авторы предлагают следующий путь перехода от уравнений H. Hencky к уравнениям Навье—Стокса. Для этого они записываются в следующей форме, при условии $\rho = \mathrm{const}$:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho}\operatorname{div} T, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93—013—17722)

$$\begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\left(\mu + \frac{\tau_0}{H}\right) \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$H = [4\varepsilon_{xy}^2 + 4\varepsilon_{xz}^2 + 4\varepsilon_{yz}^2 + 2\varepsilon_{xx}^2 + 2\varepsilon_{yy}^2 + 2\varepsilon_{zz}^2]^{1/2} \tag{3}$$

$$\operatorname{div} T = \partial\tau_x/\partial x + \partial\tau_y/\partial y + \partial\tau_z/\partial z \tag{4}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(\partial v_x/\partial y + \partial v_y/\partial x), \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}(\partial v_x/\partial z + \partial v_z/\partial x) \tag{5}$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}(\partial v_y/\partial z + \partial v_z/\partial y)$$

$$\varepsilon_{xx} = \partial v_x/\partial x, \quad \varepsilon_{yy} = \partial v_y/\partial y, \quad \varepsilon_{zz} = \partial v_z/\partial z$$

Здесь T — тензор напряжений, H — интенсивность скоростей деформации, μ — пластическая вязкость, τ_0 — предельное напряжение сдвига, p — давление.

Из выражения (2) видно, что зависимость между тензором напряжений и тензором скоростей деформации имеет существенно нелинейный характер. Поэтому интегрирование системы (1)—(5) весьма затруднительно даже для простых течений.

Здесь предлагается проводить линеаризацию следующим образом. Комплекс $(\mu + \tau_0/H)$ заменяется величиной η_e, которую предлагается называть эквивалентной вязкостью данной вязкопластичной среды

$$\eta_e = \mu + \tau_0/H \tag{6}$$

С физической точки зрения такая замена означает, что эффект проявления предельного напряжения сдвига и эффект вязкости вязкопластичной среды заменяются некоторой эквивалентной этим двум эффектам вязкостью. Таким образом, под эквивалентной вязкостью вязкопластичной среды будем понимать вязкость такой ньютоновской жидкости, которая оказывает такое же сопротивление своему относительному перемещению как и данная вязкопластичная среда.

Эквивалентная вязкость (6) в отличие от обычных вязких жидкостей зависит не только от физических констант данной среды, но и от поля скоростей этой среды, различных для каждой конкретной задачи.

В отличие от известных приемов экспериментального нахождения «фиктивной» или «эффективной» вязкости [6, 7], предлагается определять эквивалентную вязкость вязкопластичной среды, как некоторую величину характерную для данного течения вязкопластичной среды, получаемую в результате следующего решения.

Полагаем величину η_e, определяемую из (6), не зависящей от переменных интегрирования в системе (1)—(5). В этом случае система уравнений (1)—(5) будет описывать течение вязкой ньютоновской жидкости с коэффициентом динамической вязкости равным η_e. Определяем поле скоростей и давлений данного течения, интенсивность скоростей деформации (3). Подставляя найденное значение интенсивности скоростей деформации в равенство (6), получим, в общем случае, некоторое трансцендентное уравнение относительно η_e. Решая его, найдем эквивалентную вязкость как функцию координат и времени. Используя далее различные способы осреднения, найдем η_e как некоторую характерную величину процесса, не зависящую от переменных интегрирования.

Ниже сравниваются результаты решений уравнений (1), (2) с результатами известных точных решений для некоторых простейших течений.

2. Рассмотрим задачу расхода вязкопластичной среды через сечение круглой прямой трубы при стационарном перепаде давления.

Точное решение этой задачи известно [8]. Здесь будет рассмотрено приближенное решение предлагаемым методом.

В соответствии с вышеуказанным порядком определения эквивалентной вязкости находим вначале решение соответствующей задачи для вязкой жидкости с динамическим коэффициентом вязкости η_e. Воспользовавшись, например, решением, приведенным в [9], запишем:

$$v = \frac{1}{4\eta_e}\left|\frac{dp}{dz}\right|(R^2 - r^2), \quad \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{2}\eta_e\left|\frac{dp}{dz}\right| r \tag{7}$$

Здесь dp/dz — постоянный перепад давления, R — радиус трубы, r — текущая радиальная координата (ось Oz направлена вдоль оси трубы).

Находим интенсивность скоростей деформации

$$H = \left|\frac{dv}{dr}\right| = \frac{1}{2\eta_e}\left|\frac{dp}{dz}\right| r \tag{8}$$

Среднее значение интенсивности скоростей деформации по области вязкопластичного течения равно (r_0 — радиус квазитвердого ядра):

$$\langle H\rangle = \frac{1}{R - r_0}\int_{r_0}^{R} H dr = \frac{1}{4\eta_e}\left|\frac{dp}{dz}\right|(R + r_0) \tag{9}$$

Подставляя в (6) вместо H среднее значение этой величины из (9), получим уравнение для определения эквивалентной вязкости

$$\eta_e = \mu + \frac{4\eta_e\tau_0}{|dp/dz|\,(R + r_0)} \tag{10}$$

решая которое относительно η_e, получим

$$\eta_e = \mu\frac{|dp/dz|\,(R + r_0)}{|dp/dz|\,(R + r_0) - 4\tau_0} \tag{11}$$

В данном простейшем случае эквивалентная вязкость η_e хотя и является постоянной величиной (для стационарного течения в трубе $r_0 = \mathrm{const}$), но зависит от всех параметров течения (физических, гидромеханических, геометрических).

Воспользовавшись формулами (7) и (11), приведем полное решение рассматриваемой задачи.

В области вязкопластичного течения ($r_o \le r \le R$) на основании (7) и (11) скорость точек среды определяется формулой

$$v = \frac{1}{4\mu}\left|\frac{dp}{dz}\right|(R^2 - r^2) - \frac{\tau_0}{\mu\,(R + r_0)}(R^2 - r^2) \tag{12}$$

Если в (12) текущая координата r не сильно отличается от радиуса квазитвердого ядра r_0, то формула (12) практически совпадает с соответствующей формулой, приведенной в [8]. При $r = r_0$ скорость течения в квазитвердом ядре на основании (12) и точного решения [8] полностью совпадают

$$v_0 = v(r_0) = \frac{1}{4\mu}\left|\frac{dp}{dz}\right|(R^2 - r_0^2) - \frac{\tau_0}{\mu}(R - r_0) \tag{13}$$

Найдем теперь радиус r_0 квазитвердого ядра. Для этого в механике вязкопластичных сред ставится дополнительное граничное условие, заключающееся в равенстве нулю всех компонент тензора скоростей деформации на границе этой области. В данном случае это условие не пригодно, так как модель вязкопластичной среды заменена моделью вязкой жидкости. Так, например, при течении вязкой жидкости в трубе величина $(dv/dr) = 0$ только на оси трубы.

На основании этого заменим кинематическое условие на квазитвердой поверхности динамическим, заключающемся в равенстве касательного напряжения τ на квазитвердой поверхности предельному напряжению сдвига τ_0. Таким образом, имеем

$$\tau(r_0) = \tau_0 \tag{14}$$

Поскольку $\tau(r_0) = \eta_e (dv/dr)_{r=r_0}$, то определяя из (12) на основании (11) и (14), найдем τ_0:

$$r_0 = 2\tau_0 \Big/ \left|\frac{dp}{dz}\right| \tag{15}$$

что совпадает с точным значением [8].

Определим теперь расход вязкопластичной среды через любое сечение трубы по формуле

$$Q = \int_0^{r_0} 2\pi r v_0 dr + \int_{r_0}^{R} 2\pi r v dr \tag{16}$$

Подставляя в (16) величины v и v_0 из (12) и (13) и интегрируя, получим

$$Q = \frac{\pi d^4}{128\mu}\left|\frac{dp}{dz}\right|(1-n)^2(1+n^2), \quad n = \frac{d_0}{d} \tag{17}$$

где $d = 2R$ — диаметр трубы, а $d_0 = 2r_0$ — диаметр квазитвердого ядра.

Чтобы сравнить, насколько величина расхода, определяемая по приближенной формуле (17), отличается от расхода, определяемого точной формулой (формула Букингама), приведенной в [8], подсчитаем относительную погрешность (17) по отношению к точной формуле расхода

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{2n(1-n)^3}{3-4n+n^4}100\% \tag{18}$$

Анализ (18) показывает, что максимальная погрешность достигает 12,1% при $n \approx 0{,}41$, что вполне приемлемо для расчетов многих технологических процессов.

3. Рассмотрим задачу определения момента сопротивления, действующего на вращающийся цилиндр ротационного вискозиметра. Для этого будем изучать стационарное круговое течение вязкопластичной среды в зазоре между неподвижным внешним цилиндром и вращающимся с постоянной угловой скоростью ω внутренним цилиндром. Точное решение этой задачи для неустановившегося течения приведено в [6, 7]. Отсюда при $t \to \infty$ может быть получено и стационарное решение.

Найдем теперь решение этой же задачи предложенным методом. Для этого запишем решение соответствующей задачи для вязкой жидкости с коэффициентом динамической вязкости равным η_e. Взяв, например, решение, приведенное в [9], при $\omega_2 = 0$ и $\omega_1 = \omega$, имеем для области вязкопластичного течения при $R_1 \le r \le R_0$:

$$v = \frac{\omega R_1^2}{r}\frac{R_0^2 - r^2}{R_0^2 - R_1^2}, \quad H = \left|\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right| = \frac{2\omega R_1^2 R_0^2}{r^2(R_0^2 - R_1^2)} \tag{19}$$

Здесь v — окружная скорость точек среды в области вязкопластичного течения, R_1 — радиус внутреннего цилиндра, R_0 — радиус границы квазитвердой зоны, примыкающей к неподвижному внешнему цилиндру радиуса R_2, r — текущая радиальная координата.

В этой задаче можно было бы, как и в предыдущей, взять среднее значение интенсивности скоростей деформации по всей области вязкопластичного течения. Однако, основной целью решения является определение момента сил сопротивления, приложенного к вращающемуся цилиндру радиуса R_1. Поэтому вычислим интенсивность скоростей деформации H из (19) при $r = R_l$:

$$H(R_1) = 2\omega R_0^2/(R_0^2 - R_1^2) \tag{20}$$

Подставляя это значение H в (6), найдем сразу эквивалентную вязкость

$$\eta_e = \mu + 0{,}5\tau_0 (m^2 - 1)/(\omega m^2) \tag{21}$$

$$m = R_0/R_1, \quad (R_0/R_1) > 1 \tag{22}$$

Радиус границы квазитвердой области найдем из динамического граничного условия

$$\tau(R_0) = \tau_0 \tag{23}$$

Здесь τ — касательное напряжение в любой точке цилиндрической поверхности произвольного радиуса r, определяемое для вязкой жидкости по формуле

$$\tau = \eta_e (dv/dr - v/r) = \eta_e H \tag{24}$$

Подставляя в (24) H из (19) при $r = R_0$ и η_e из (21), получим на основании (23)

$$m^2 = \left\{ 1 + \frac{\omega\mu}{\tau_0} - \left(\frac{\omega\mu}{\tau_0} \left(2 + \frac{\omega\mu}{\tau_0} \right) \right)^{1/2} \right\}^{-1} \tag{25}$$

Вычислим момент сил сопротивления, действующих на единицу длины вращающегося цилиндра

$$M = -\int\limits_0^{2\pi} \tau(R_1) R_1^2 d\varphi \tag{26}$$

Величину τ в (26) находим при $r = R_1$. Согласно (20) и (24) она будет равна

$$\tau(R_1) = \eta_e H(R_1) = \frac{2\omega\mu m^2}{m^2 - 1} + \tau_0 \tag{27}$$

Подставим в (26) значение $\tau(R_1)$ из (27) и проинтегрировав, получим

$$M = -2\pi R_1^2 \left(\frac{2\omega\mu m^2}{m^2 - 1} + \tau_0 \right) \tag{28}$$

Момент сил сопротивления, следуя точному решения их [6, 7] при $t \to \infty$, имеет вид

$$M = -\frac{4\pi R_1^2 m^2}{m^2 - 1} (\mu\omega + \tau_0 \ln m) \tag{29}$$

Если рассматривать в (22) m как величину, близкую к единице, и взять в (29) $\ln m \approx (m - 1)$, то можно убедиться в практическом совпадении формул (28) и (29).

Таким образом, приведенные примеры показывают, что уже в первом приближении результаты расчетов предложенным методом дают хорошее совпадение с известными точными решениями.

Основываясь на вышеприведенных примерах, рассмотрим, как изменяется эквивалентная вязкость η_e при изменении кинематических и динамических характеристик течения. Так, например, из формулы (11) видно, что по мере увеличения перепада давления в трубе эквивалентная вязкость уменьшается от ∞ при $|dp/dz| = 2\tau_0/R$ (этот случай соответствует запиранию трубы вязкопластичной средой) до μ при $|dp/dz| \to \infty$. Точно также из формулы (21) следует, что эквивалентная вязкость на поверхности ротора ротационного вискозиметра уменьшается от ∞ при $\omega = 0$ до μ при $\omega \to \infty$.

Опираясь на вышеприведенные результаты в рамках принятой авторами модели, можно дать теоретическое объяснение установленному ранее явлению уменьшения сопротивления относительному движению вязкопластичных сред при увеличении гидродинамических параметров движения (перепад давления, угловая скорость и так далее).

4. Рассмотрим пример точного решения уравнений (1), (2) для плоского течения вязкопластичной среды между двумя подвижными плоскостями, перемещающимися с постоянными скоростями перпендикулярно друг другу.

Этот пример интересен, на наш взгляд, своей аналогией с эффектом «преобразования» вектора силы сухого трения при сообщении телу, движущемуся по шероховатой поверхности дополнительного движения, составляющего некоторый угол с заданным (Н. Е. Жуковский, 1896).

Определим силу сопротивления, действующую на пластину, перемещающуюся с постоянной скоростью v по тонкому слою вязкопластичной среды h, находящемуся на подвижном основании, перемещающемся с постоянной скоростью u перпендикулярно пластине. Скорости направлены вдоль осей координат соответственно: v — вдоль оси x, u — вдоль оси y.

Полагая в системе (1)—(5) $v_z = 0$, $\partial v_x/\partial t = \partial v_y/\partial t = 0$, $v_x = v_x(z)$, $v_y = v_y(z)$, запишем ее в следующем виде:

$$\partial\tau_{zx}/\partial z - \partial p/\partial x = 0$$

$$\partial\tau_{zy}/\partial z - \partial p/\partial y = 0, \quad \partial\tau_{xz}/\partial x - \partial\tau_{yz}/\partial y = 0 \tag{30}$$

$$\tau_{xz} = (\mu + \frac{\tau_0}{H})\frac{dv_x}{dz}, \quad \tau_{yz} = (\mu + \frac{\tau_0}{H})\frac{dv_y}{dz}$$

В рассматриваемом случае уравнение несжимаемости $\mathrm{div}\, v = 0$ удовлетворяется тождественно.

Считаем дополнительно, что компоненты grad p в направлении осей x и y равны нулю $(dp/dx) = (dp/dy) = 0$. Это означает, что движение вязкопластичной среды происходит только посредством передачи движения от верхней и нижней плоскостей. С учетом этого система (30) примет следующий вид:

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} = 0, \quad \tau_{xz} = (\mu + \frac{\tau_0}{H})\frac{dv_x}{dz} \tag{31}$$

$$\tau_{yz} = (\mu + \frac{\tau_0}{H})\frac{dv_y}{dz}, \quad H = [(dv_x/dz)^2 + (dv_y/dz)^2]^{1/2}$$

Интегрируем ее при следующих граничных условиях:

$$z = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = u = \mathrm{const}$$

$$z = h, \quad v_x = v = \mathrm{const}, \quad v_y = 0 \tag{32}$$

Первые два уравнения системы (31) легко интегрируются

$$\tau_{zx} = c_1, \quad \tau_{zy} = c_2 \tag{33}$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования. Подставляя τ_{xx} и τ_{zy} из (33) в третье и четвертое уравнения системы (31), получим

$$(\mu + \frac{\tau_0}{H})\frac{dv_x}{dz} = c_1, \quad (\mu + \frac{\tau_0}{H})\frac{dv_y}{dz} = c_2 \tag{34}$$

Разделив левые и правые части уравнений (34), найдем

$$\frac{dv_y}{dz} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \frac{dv_x}{dz} \tag{35}$$

Подставляя (dv_y/dz) из (35) в одно из дифференциальных уравнений (34) с учетом выражения H из (31), получим дифференциальное уравнение для определения функции $v_x(z)$:

$$\frac{dv_x}{dz} = \frac{c_1}{\mu} - \frac{\tau_0}{\mu} \frac{\operatorname{sign}(dv_x/dz)}{[1 + (c_2/c_1)^2]^{1/2}} \tag{36}$$

а на основании (35) с учетом (36), дифференциальное уравнение для определения функции $v_y(z)$:

$$\frac{dv_y}{dz} = \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{c_1}{\mu} - \frac{\tau_0}{\mu} \frac{\operatorname{sign}(dv_x/dz)}{[1 + (c_2/c_1)^2]^{1/2}}\right) \tag{37}$$

Поскольку sign (dv_x/dz) сохраняется для всех $z \in [0h]$, то уравнения (36) и (37) легко интегрируются

$$v_x = \left(\frac{c_1}{\mu} - \frac{\tau_0}{\mu} \frac{\operatorname{sign}(dv_x/dz)}{[1 + (c_2/c_1)^2]^{1/2}}\right) z + c_3 \tag{38}$$

$$v_y = \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{c_1}{\mu} - \frac{\tau_0}{\mu} \frac{\operatorname{sign}(dv_x/dz)}{[1 + (c_2/c_1)^2]^{1/2}}\right) z + c_4 \tag{39}$$

где c_3 и c_4 — постоянные интегрирования.

Подставляя выражения v_x и v_y из (38) и (39) в граничные условия (32), найдем

$$c_3 = 0, \quad c_4 = u, \quad c_1 = \frac{v}{h} \mu + \tau_0 \frac{v \sin(dv_x/dz)}{\sqrt{v^2 + u^2}} \tag{40}$$

$$c_2 = -\frac{u}{h} \mu - \tau_0 \frac{u \operatorname{sign}(dv_x/dz)}{\sqrt{v^2 + u^2}}$$

Подставляя (40) в (38) и (39) и учитывая sign$\cdot(dv_x/dz)$, найдем выражения для проекций скорости вязкопластичной среды, находящейся в зазоре между подвижными параллельными плоскостями

$$v_x = (v/h)\, z \tag{41}$$

$$v_y = u\,(1 - z/h) \tag{42}$$

Найдем теперь проекцию силы вязкопластичного сопротивления на ось x, приложенную к верхней пластине, по формуле

$$F_x = -\tau_{xz} S \tag{43}$$

где S — площадь пластины. На основании (33) и с учетом значений c_1 из (40) и sign $(dv_x/dz) = 1$ получим для силы сопротивления выражение

$$F_x = -\left(\mu + \frac{\tau_0 h}{\sqrt{v^2 + u^2}}\right) \frac{v}{h} S \tag{44}$$

Из анализа (44) видно изменение величины и характера сопротивления движению тела в вязкопластичной среде, при сообщении телу или среде дополнительного относительного движения. В рассматриваемом примере это скорость

u. При увеличении u сила F_x уменьшается и движение пластины начнется при любой малой величине F_x. При $u = 0$ (одномерное сдвиговое течение) движение пластины начнется только при достижении напряжения, равного τ_0.

Обозначим сомножитель в скобках выражения (44) через η_e:

$$\eta_e = \mu + \tau_0 h\,(v^2 + u^2)^{-1/2} \qquad (45)$$

В данном примере эквивалентная вязкость η_e определена точно. Полученный результат с очевидной наглядностью иллюстрирует зависимость эквивалентной вязкости η_e не только от физических параметров, но и от ее гидродинамических параметров и хорошо согласуется с полученными ранее результатами (11), (21).

Рассмотрим еще один способ решения этого примера. Так как здесь течение вязкопластичной среды является одномерным, направленным под некоторым углом к выбранной системе координат, то используется известная модель среды Бингама, но записанная в векторной форме

$$\tau = \frac{\partial \mathrm{v}/\partial n}{|\partial \mathrm{v}/\partial n|}\,\tau_0 + \mu\,\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial n} \qquad (46)$$

Здесь $\partial \mathrm{v}/\partial n$ — вектор, имеющий компоненты $(\partial v_x/\partial z)$ и $(\partial v_y/\partial z)$. Проекции вектора τ на выбранные оси координат соответственно равны

$$\tau_x = \tau_{zx} = \frac{\tau_0 v}{\sqrt{v^2 + u^2}} + \mu\,\frac{v}{h} \qquad (47)$$

$$\tau_y = \tau_{yz} = -\,\frac{\tau_0 u}{\sqrt{v^2 + u^2}} - \mu\,\frac{u}{h} \qquad (48)$$

Проекции силы сопротивления на ось x:

$$F_x = -\,\tau_x S = -\left(\mu + \frac{\tau_0 h}{\sqrt{v^2 + u^2}}\right)\frac{v}{h}\,S \qquad (49)$$

Таким образом получили результат, аналогичный предыдущему (44).

Анализ выражений (46)—(49) показывает, что наличие дополнительного движения со скоростью u приводит к повороту вектора силы сопротивления в направлении вектора результирующей скорости v ($v = (v^2 + u^2)^{1/2}$). Поворот вектора силы вязкопластичного сопротивления при сообщении телу или среде дополнительного движения напоминает поворот вектора сухого трения, если телу, движущемуся по шероховатой поверхности, сообщить дополнительное движение под некоторым углом. По аналогии с эффектом преобразования сухого трения (Жуковский Н. Е., 1896 г.) предлагается называть для случая плоского течения изменение величины и характера вязкопластичного сопротивления в заданном направлении *эффектом преобразования вязкопластичного сопротивления*. Минимальная величина сопротивления соответствует углу между заданным (v) и дополнительным (u) движениями равным 90°.

Таким образом, вышеизложенный подход позволяет указать пути целенаправленного управления выбранными функционалами, характеризующими рассматриваемую вязкопластичную среду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hencky H. Z.* Langsame stationäre Strömmungen in plastischen Massen Z. angew. Math und Mech, B. 5, H. 2. 115—124, 1925.
2. *А. А. Ильюшин.* К вопросу о вязкопластичном течении материала // Тр. конференц. по пласт. деформации. М.: Изд-во АН СССР, 1936. С. 5—18.

3. *А. А. Илюшин.* Деформация вязкопластичного тела // Уч. записки МГУ. Сер. Механика. Вып. 39. Изд-во МГУ, 1940. С. 3—81
4. *А. Ю. Ишлинский.* Уравнения деформирования не вполне упругих и вязкопластичных тел // Изв. АН СССР. ОТН. 1945. № 1—2. С. 34—45.
5. *А. Ю. Ишлинский.* Пространственное деформирование не вполне упругих и вязкопластичных тел // Изв. АН СССР. ОТН. 1945. № 3. С. 250—260.
6. *П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде.* Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1970. 416 с.
7. *П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде.* Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1977. 373 с.
8. *Л. Г., Лойцянский.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 445 с.
9. *С. М. Тарг.* Основные задачи теории ламинарных течений. М: Л.: ГИТТЛ, 1951. 420 с.

Москва

Поступила в редакцию
I.III.1993