МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1993

УДК 531.36

© 1993 г. В. В. ТИХОМИРОВ

НАБЛЮДАЕМОСТЬ В ЗАДАЧЕ ЗОНДОВОЙ НАВИГАЦИИ

Для решения задачи уточнения навигационных параметров космических аппаратов применяются различные методы, в том числе такие, в которых используются измерения относительного движения орбитальных ориентиров и зондов [1—3]. Для анализа возможности уточнения параметров движения в таких задачах применяются нелинейные методы [2, 3]. В настоящей работе для случая движения космического аппарата и орбитального ориентира в одной плоскости удалось провести полное аналитическое исследование структуры фазового пространства с точки зрения наблюдаемости в линейной постановке.

1. Рассматривается задача уточнения навигационных параметров материальной точки M, движущейся в центральном поле притягивающих сил по орбите, близкой к круговой. Для решения задачи используется информация о дальности от этой точки до другой точки N, движущейся также по орбите, близкой к круговой в той же плоскости, что и точка M. В качестве точки N может использоваться любое тело, движущееся по близкой к круговой орбите, которое в этом случае называется орбитальным ориентиром [2]. Кроме того, для решения поставленной задачи может быть использовано пробное тело, называемое зондом и выбрасываемое из точки M [3]. В обоих случаях предполагается, что координаты и скорость точки M и N известны с ошибками, которые должны быть уменьшены, однако величины этих ошибок позволяют проводить линеаризацию уравнений движения и измерений и решать линейную задачу анализа наблюдаемости переменных. Отметим, что движение тел рассматривается в центральном поле, возмущения которого в силу ограниченности времени коррекции не учитываются, поэтому плоскость орбит сохраняет свою ориентацию в инерциальном пространстве.

Введем в плоскости орбит тел инерциальную систему координат $O\zeta_1\zeta_2$, где точка O — притягивающий центр. Обозначим известное расчетное положение точек M и N через M' и N'. Обозначим радиус расчетной круговой орбиты точки M через r, а радиус расчетной орбиты точки N через R. Рассмотрим задачу в случае $R > r$. Для описания движения точки M в отклонениях от M' введем в плоскости $O\zeta_1\zeta_2$ систему координат Ox_1x_2 так, что точка M имеет в ней координаты $(0, r)$. Для описания движения точки N в отклонениях от N' введем в этой же плоскости систему координат Oy_1y_2 так, что точка N имеет в ней координаты $(0, R)$. Определим положение системы Ox_1x_2 относительно $O\zeta_1\zeta_2$ углом Φ, а системы Oy_1y_2 относительно $O\zeta_1\zeta_2$ углом Ψ. Будем считать, что углы Φ и Ψ отсчитываются в одном направлении, а проекции скоростей точек M и N на оси Ox_1 и Oy_1 положительны.

Проводя линеаризацию уравнений движения точек M и N вблизи расчетных положений M' и N' и нормируя линейные величины на r, а время на угловую скорость движения точки М, получим уравнения

$$dx_1/dt = x_3 - x_2, \qquad dy_1/dt = y_3 - \gamma y_2$$

$$dx_2/dt = x_1 + x_4, \qquad dy_2/dt = \gamma y_1 + y_4$$

$$dx_3/dt = -x_1 - x_4, \qquad dy_3/dt = -\gamma^2 y_1 - \gamma y_4$$

$$dx_4/dt = 2x_2 + x_3, \qquad dy_4/dt = 2\gamma^2 y_2 + \gamma y_3 \tag{1}$$

где x_1, x_2 — нормированные проекции на оси системы Ox_1x_2 отклонений точки M от расчетного положения M'; x_3, x_4 — нормированные проекции отклонений ее скорости от расчетной; y_1, y_2 — нормированные проекции на оси системы Oy_1y_2 отклонения точки N от расчетного положения N', y_3, y_4 — нормированные проекции отклонений скорости точки N от расчетной, t — нормированное время; $\gamma = (R/r)^{3/2}$.

В качестве измерения будем рассматривать величину D^2, где D — расстояние между точками M и N. Линеаризуя эту величину в окрестности расчетного положения точек M и N, получим z — скалярное измерение, линейное по отклонениям точек M и N от расчетного

$$z = x_2 - \gamma^{-2/3} (\cos\varphi x_2 + \sin\varphi x_1 - y_2) + \sin\varphi y_1 - \cos\varphi y_2 \tag{2}$$

$$\varphi = \omega t, \ \omega = 1 - \gamma$$

Система (1), (2) является линейной с нестационарным наблюдением. Для анализа возможности определения переменных системы можно применить известные методы анализа наблюдаемости нестационарных систем при помощи введения дополнительных переменных для приведения задачи к стационарной и преобразования системы к жордановой форме [4]. Подобный путь выберем и в данной задаче, преобразовав систему к нормальным координатам.

Проводя в (1) следующие преобразования переменных

$$x = C_1\xi, \quad y = C_2\eta$$

$$C_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2/3 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad C_2 = \begin{Vmatrix} \gamma^{-1} & \gamma^{-2} & 2\gamma^{-1} & -2\gamma^{-1} \\ 0 & -2/3\,\gamma^{-2} & \gamma^{-1} & \gamma^{-1} \\ 0 & 1/3\,\gamma^{-1} & -1 & -1 \\ -1 & -\gamma^{-1} & -1 & -1 \end{Vmatrix} \tag{3}$$

получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = A_\xi \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = A_\eta \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix}$$

$$A_\xi = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_\eta = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{Vmatrix} \tag{4}$$

В переменных ξ, η измерение (2) представляется в виде

$$z = -2/3\,\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 2/3\,\gamma^{-8/3}\eta_2 + \gamma^{-5/3}(\eta_3 + \eta_4) +$$

$$+ \gamma^{-2/3}(2/3 \cos\varphi\xi_2 - \sin\varphi\xi_1 - \cos\varphi\xi_3 - \cos\varphi\xi_4 - 2\sin\varphi\xi_3 + 2\sin\varphi\xi_4) + \tag{5}$$

$$+ \gamma^{-1}(\sin\varphi\eta_1 + 2\sin\varphi\eta_3 - 2\sin\varphi\eta_4 - \cos\varphi\eta_4) + \gamma^{-2}(\sin\varphi\eta_2 + 2/3\cos\varphi\eta_2)$$

Для упрощения задачи анализа наблюдаемости переменных системы (4) по нестационарным измерениям (5) часть нестационарных составляющих в (5) заменим на новые переменные u_i, v_i ($i=1$—4) по формулам

$$2v_1 = \sin\varphi\xi_3 + \cos\varphi\xi_4, \quad 2u_1 = \sin\varphi\eta_3 - \cos\varphi\eta_4$$

$$2v_2 = \sin\varphi\xi_4 - \cos\varphi\xi_3, \quad 2u_2 = \sin\varphi\eta_4 + \cos\varphi\eta_3$$

$$2v_3 = \sin\varphi\xi_3 - \cos\varphi\xi_4, \quad 2u_3 = \sin\varphi\eta_3 + \cos\varphi\eta_4$$

$$2v_4 = \sin\varphi\xi_4 + \cos\varphi\xi_3, \quad 2u_4 = \sin\varphi\eta_4 - \cos\varphi\eta_3 \tag{6}$$

Переменные u_i, v_i в силу системы (4) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = A_v \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = A_u \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

$$A_v = \begin{Vmatrix} 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma-2 \\ 0 & 0 & 2-\gamma & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_u = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\gamma \\ 0 & 0 & 2\gamma-1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{7}$$

Проводя замену переменных (6) в (5) представим уравнение измерения в новых переменных в виде

$$z = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \tag{8}$$

$$z_1 = -2/3\,(\xi_2 + \gamma^{-8/3}\eta_2)$$

$$z_2 = \xi_3 + \xi_4 + \gamma^{-1}(3u_1 - 3u_2 + u_3 - u_4)$$

$$z_3 = \gamma^{-5/3}(\eta_3 + \eta_4) + \gamma^{-2/3}(3v_2 - 3v_1 - v_3 + v_4)$$

$$z_4 = \gamma^{-2/3}(2/3\cos\varphi\xi_2 - \sin\varphi\xi_1 - \sin\varphi\xi_2) + \gamma^{-1}(\sin\varphi\eta_1 + \gamma^{-1}(\sin\varphi\eta_2 + 2/3\cos\varphi\eta_2))$$

Группировка составляющих измерения в (8) соответствует представлению его в виде суммы линейно независимых функций z_i ($i=1$—4). Величина z_1 есть постоянная в соответствии с уравнениями (4). Величина z_2, как следует из (4) и (7), есть сумма с некоторыми коэффициентами функций $\sin t$, $\cos t$, $\sin(1-2\gamma)\,t$, $\cos(1-2\gamma)\,t$. Величина z_3 представляется суммой с некоторыми коэффициентами функций $\sin\gamma t$, $\cos\gamma t$, $\sin(2-\gamma)\,t$, $\cos(2-\gamma)\,t$. В z_4 входят также с некоторыми коэффициентами функции $\sin(1-\gamma)\,t$, $\cos(1-\gamma)\,t$, $t\sin(1-\gamma)\,t$, $t\cos(1-\gamma)\,t$.

Условиями представления (8) измерения в виде линейно независимых функций являются

$$\gamma \neq 1/2, \quad \gamma \neq 1/3 \tag{9}$$

2. Представление измерения в виде (8) позволяет проводить анализ наблюдаемости переменных для подсистем, переменные которых входят в какую-либо из функций z_i и для которых z_i является измерением. Рассмотрим эти подсистемы, причем в качестве номера подсистемы возьмем индекс соответствующей функции z_i. В функцию z_1 входят переменные ξ_2, η_2, поэтому в соответствии с (4) вектор состояния подсистемы *1* включает набор переменных ξ_1, ξ_2, η_1, η_2.

Анализ наблюдаемости для подсистемы *1* по измерению z_1 показывает, что ни одна из ее переменных не является наблюдаемой.

Вектор состояния подсистемы *2* состоит из переменных ξ_3, ξ_4, u_1, u_2, u_3, u_4.

Обозначим этот вектор через X, тогда для анализа наблюдаемости подсистемы *2* задача записывается в виде

$$dX/dt = A_2X, \quad z_2 = HX \tag{10}$$

$$A_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \\ & 0 & A_u \end{matrix} \right\|, \quad H = (1, 1, 3\gamma^{-1}, -3\gamma^{-1}, \gamma^{-1}, -\gamma^{-1})$$

Вид матрицы A_2 (10) позволяет провести анализ наблюдаемости подсистемы *2*, разбив ее в свою очередь на две подсистемы, включающие переменные (ξ_3, ξ_4, u_1, u_2) и (u_3, u_4). Анализ наблюдаемости этих подсистем показывает, что в подсистеме *2* наблюдаемыми являются только переменные u_3, u_4, что соответствует в переменных ξ, η наблюдаемости величин η_3, η_4.

Вектор состояния подсистемы *3* включает переменные η_3, η_4, v_1, v_2, v_3, v_4. Обозначая его также через X, получим задачу анализа наблюдаемости в виде

$$dX/dt = A_3X, \quad z_3 = HX \tag{11}$$

$$A_3 = \left\| \begin{matrix} 0 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 0 & \\ & 0 & A_v \end{matrix} \right\|, \quad H = \gamma^{-5/3}\,(1, 1, -3\gamma, 3\gamma, -\gamma, \gamma)$$

Вид матрицы A_3 (11) позволяет провести анализ наблюдаемости подсистемы *3*, также разбив ее в свою очередь на две подсистемы с векторами состояния $(\eta_3, \eta_4, v_1, v_2)$ и (v_3, v_4). Анализ наблюдаемости этих подсистем показывает, что в подсистеме *3* наблюдаемыми являются только переменные v_3, v_4, что в переменных ξ, η по (6) соответствует наблюдаемости величин ξ_3, ξ_4.

Анализ наблюдаемости переменных, входящих в измерение z_4 проведем непосредственно, исходя из вида решений системы (4). Обозначим начальные значения переменных, входящих в z_4, в момент времени $t = 0$ следующим образом: $\xi_1(0) = \xi_{10}$, $\xi_2(0) = \xi_{20}$, $\eta_1(0) = \eta_{10}$, $\eta_2(0) = \eta_{20}$, тогда из (4) получим

$$\begin{gathered} \xi_1(t) = \xi_{10} + \xi_{20}t, \quad \xi_2(t) = \xi_{20} \\ \eta_1(t) = \eta_{10} + \eta_{20}t, \quad \eta_2(t) = \eta_{20} \end{gathered} \tag{12}$$

Вводя обозначение $z_4^* = \gamma^{-1}z_4$, из (12) и (8) получим

$$z_4^* = (\gamma^{-1}\eta_{20} + \eta_{10} - \gamma^{1/3}\xi_{20} - \gamma^{1/3}\xi_{10}) \sin\varphi +$$
$$+ 2/3\,(\gamma^{1/3}\xi_{20} + \gamma^{-1}\eta_{20}) \cos\varphi + (\eta_{20} - \gamma^{1/3}\xi_{20})\, t \sin\varphi$$

По известным в результате измерения коэффициентам разложения функции z_4 по системе функций $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $t \sin \omega t$ из (13) могут быть определены величины ξ_{20}, η_{20}, что соответствует наблюдаемости переменных ξ_2, η_2 системы (4).

Таким образом, в системе (4) наблюдаемыми по измерению (5) являются следующие наборы переменных ξ_i $(i = 2, 3, 4)$ и η_i $(i = 2, 3, 4)$. В соответствии с заменой координат (3) для исходной системы (1) в пространстве переменных x_i $(i = 1—4)$ размерность наблюдаемого подпространства есть 3 и ненаблюдаемое подпространство натянуто на вектор (1, 0, 0, −1) и удовлетворяет уравнению $x_1 + x_4 = 0$.

В пространстве переменных y_i $(i = 1—4)$ размерность наблюдаемого подпространства есть 3, и ненаблюдаемое подпространство натянуто на вектор (1,0,0,−1) и удовлетворяет уравнению $y_1 + y_4 = 0$.

Симметрия системы относительно точек M и N показывает, что и в случае $R < r$ для величин $\gamma > 1$ разбиение пространства переменных по наблюдаемости переменных сохранится, а условия невырожденности будут определяться для величин, обратных (9). Отметим, что структура разбиения пространства состояний по наблюдаемости в рассматриваемой задаче для каждой из точек M и N такая же, как в задаче измерения для каждой из точек переменных $\bar{x}_2$ и y_2 соответственно. Такая постановка задачи получается для движущихся вблизи Земли тел в случае, когда измеряется высота полета каждой из точек над поверхностью Земли. Анализ наблюдаемости и декомпозиция в этой стационарной задаче проводится любым известным методом, например, при помощи построения матрицы наблюдаемости.

Частным случаем рассмотрения задачи является коррекция навигационных параметров точки M по измерению дальности до точки N, но при отсутствии ошибок в значении ее координат и скорости. В этом случае можно считать величины η_i ($i = 1$—4) известными и из (8) следует наблюдаемость всех переменных ξ_i ($i = 1$—4) и в соответствии с (3) и переменных x_i ($i = 1$—4) исходной системы (1), что соответствует известному результату [1].

Автор благодарит Н. А. Парусникова за полезные советы и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бажинов И. К., Алешин В. И., Почукаев В. И., Поляков В. С.* Космическая навигация. М.: Машиностроение, 1975. 352 с.
2. *Брандин В. П., Разоренов Г. И.* Определение траекторий космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 216 с.
3. *Ковалев А. М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев: Наук. думка, 1980. 175 с.
4. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Оценивание и управление в нестационарных линейных системах. М.: Изд. Моск. Ун-та, 1988. 144 с.

Москва

Поступила в редакцию 4.11.1993

[1] См.: *С. В. Украинцев.* Задача об уточнении координат и скорости спутника по измерениям относительного движения спутника-ориентира: Автореф. канд. физ-мат. наук. Москва: 1981. с. 20.