

УДК 539.374

© 1993 г. С. Е. АЛЕКСАНДРОВ, Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН

ОБ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЯХ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Течение сплошной среды в сходящемся бесконечном канале, так же, как и внедрение в полупространство бесконечного конуса или клина, являются классическими и, на первый взгляд, простейшими задачами для любой модели материала. При применении моделей материала пригодных для описания технологических процессов обработки давлением течение в сходящемся бесконечном канале позволяет частично изучить процессы подобные экструзии. Внедрение бесконечного конуса в полупространство является простейшей моделью для исследования процессов внедрения, используемых для определения твердости. В публикуемой работе рассматривается идеальный жесткопластический материал, подчиняющийся условию текучести Мизеса и ассоциированному с ним закону течения. Показано, что имеющиеся решения для такой модели материала содержат неточности, которые уменьшают значимость теоретических результатов и сужают возможности их практического использования.

Решение задачи о течении идеальной жесткопластической среды в бесконечном плоском канале приведено в [1], а в осесимметричном — в [2] и, с незначительными вариациями, в [3]. Подробный обзор работ, ориентированных на исследование процесса экструзии, на соответствующий момент времени выполнен в [4]. Решение задачи о внедрении конуса в полупространство получено в [5]. Из результатов работ [1—3,5] следует, что при любом выборе постоянных, которые остаются неопределенными в этих решениях, величина нормального напряжения, действующего на поверхность матрицы (конуса), становится положительной. Это не соответствует принятым краевым условиям, так как в этом случае материал должен отрываться от матрицы (конуса). Подтверждение этого для процесса экструзии имеется в экспериментальной работе [6]. Кроме того, попытка построения автомодельного решения задачи о течении в бесконечном канале, приведенная ниже, также указывает на необходимость введения характерного размера длины несмотря на его отсутствие в исходной постановке. Отметим здесь, что аналогичные отрывные течения хорошо известны в гидродинамике, например, [7].

В публикуемой работе исследован характер течения материала для случая плоского течения в сходящемся бесконечном канале вблизи точки отрыва на основе понятия автомодельности второго рода [8]. Показано, что существует непротиворечивое решение, позволяющее описать явление отрыва.

1. Автомодельное решение. Рассмотрим течение идеальной жесткопластической среды в бесконечном сходящемся плоском канале в полярной системе координат r, θ (фиг. 1). Вследствие симметрии будем строить решение только для $\theta \geq 0$.

Система уравнений состоит из уравнений равновесия

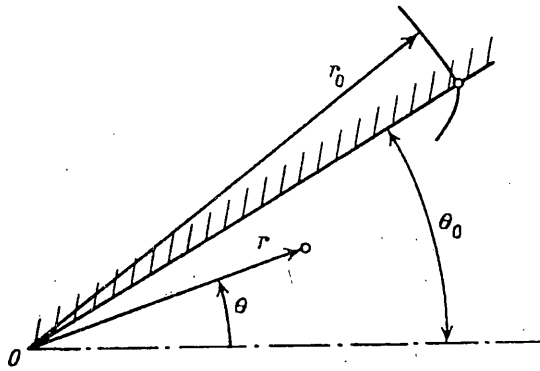
$$r\partial\sigma_r/\partial r + \partial\tau_{r\theta}/\partial\theta + \sigma_r - \sigma_\theta = 0; \quad r\partial\tau_{r\theta}/\partial r + \partial\sigma_\theta/\partial\theta + 2\tau_{r\theta} = 0 \quad (1.1)$$

условия текучести

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4K^2 \quad (1.2)$$

уравнения неразрывности

$$r\partial u_r/\partial r + \partial v_\theta/\partial\theta + u_r = 0 \quad (1.3)$$



Фиг. 1

уравнений ассоциированного закона течения

$$\varepsilon_r = \partial u_r / \partial r = \lambda (\sigma_r - \sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = (\partial v_\theta / \partial \theta + u_r) / r = \lambda (\sigma_\theta - \sigma_r) \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{r,\theta} = 1/2 (\partial v_\theta / \partial r + r^{-1} \partial u_r / \partial \theta - v_\theta / r) = 2\lambda \tau_{r,\theta}$$

Здесь $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r,\theta}$ — компоненты тензора напряжений в полярной системе координат; $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{r,\theta}$ — компоненты тензора скоростей деформаций; K — предел текучести при чистом сдвиге; u_r — радиальная скорость; v_θ — окружная скорость; λ — скалярный неотрицательный множитель.

Будем считать заданным расход материала в единицу времени Q [м²/с] и удельную силу трения на стенках матрицы $\tau_{r,\theta} = mK$ ($0 \leq m \leq 1$) при $\theta = \theta_0$. Кроме того имеются условия на оси симметрии; $\tau_{r,\theta} = 0$ и $v_\theta = 0$ при $\theta = 0$, а также условия непроницаемости стенки матрицы: $v_\theta = 0$ при $\theta = \theta_0$. Такая постановка задачи полностью соответствует постановке, рассмотренной в [1].

Поскольку характерный размер длины отсутствует, то решение должно быть представимо в виде

$$\sigma_r = K\sigma_1(\theta), \quad \sigma_\theta = K\sigma_2(\theta), \quad \tau_{r,\theta} = K\tau(\theta) \quad (1.5)$$

$$u_r = Qr^{-1}u(\theta), \quad v_\theta = Qr^{-1}v(\theta)$$

Подставим представление (1.5) в уравнения (1.1) и (1.2):

$$\tau' + \sigma_1 + \sigma_2 = 0, \quad \sigma_2' + 2\tau = 0, \quad (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau^2 = 4 \quad (1.6)$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная по θ . Система (1.6) имеет решения

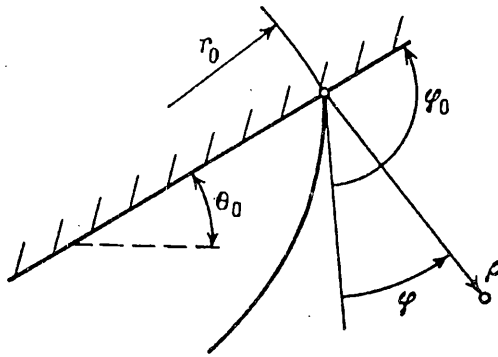
$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \tau = \pm 1, \quad \sigma_2 = \mp 2\theta + p_0, \quad p_0 = \text{const} \quad (1.7)$$

или

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \cos 2(\theta - \theta_1), \quad \tau = -\sin 2(\theta - \theta_1), \quad \sigma_2 = -\cos 2(\theta - \theta_1) + \sigma_0$$

$$\theta_1 = \text{const}, \quad \sigma_0 = \text{const} \quad (1.8)$$

Решение (1.7) не годится, так как не удовлетворяет условию $\tau = 0$ при $\theta = 0$. В решении (1.8) для выполнения этого условия необходимо положить $\theta_1 = \pi/2$. Условие трения дает $m = \sin 2(\theta_0 - \theta_1)$. Однако все постоянные в этом выражении либо заданы, либо уже определены. Таким образом, если решение и существует, то только при фиксированных соотношениях между



Фиг. 2

m и θ_0 . Рассмотрим кинематические уравнения для этого случая. Из (1.3), (1.4) и (1.8) получим

$$v' = 0, \quad (v' + 2u)/(2v - u') = \operatorname{ctg} 2(\theta_1 - \theta_0) \quad (1.9)$$

Решение этих уравнений, удовлетворяющее краевым условиям, будет

$$v = 0, \quad u = u_0 \cos^{-1}(2\theta), \quad u_0 = \operatorname{const} \quad (1.10)$$

Отсюда видно, что если $|u| < \infty$, то $\theta_0 < \pi/4$ и если материал течет к вершине, то $u_0 < 0$. Однако в этом случае, как следует из (1.4), решение (1.8), (1.10) не удовлетворяет условию $\lambda \geq 0$.

Можно показать, что автомодельное решение невозможно и при допущении существования жестких зон.

2. Течение вблизи точки отрыва. Предположим, что в точке $r=r_0$ на поверхности матрицы происходит отрыв материала от стенки матрицы (фиг.1). Введем в окрестности этой точки новую полярную систему координат ρ, φ (фиг. 2). Причем точке $\rho = 0$ соответствуют координаты r_0 и θ_0 старой системы координат, а угол φ отсчитывается против хода часовой стрелки от касательной к свободной поверхности материала после отрыва.

Система уравнений (1.1)–(1.4) остается без изменений с точностью до обозначений. Представление для напряжений оставим прежним (1.5), а для скоростей положим

$$u_\rho = Q\rho^{-1}(\rho/\rho_0)^\alpha u(\varphi), \quad v_\varphi = Q\rho^{-1}(\rho/\rho_0)^\alpha v(\varphi) \quad (2.1)$$

Здесь ρ_0 — некоторая характерная длина, связанная с локальным течением вблизи точки отрыва, необходимость ее введения вызвана невозможностью получения автомодельного решения.

Поскольку напряженное состояние определяется независимо от скоростей, то для него решение не изменится и будет определяться выражениями (1.7) или (1.8).

Очевидно, что решение (1.7) не годится вблизи свободной поверхности, так как не удовлетворяется краевое условие $\tau_{\rho\varphi} = 0$ при $\varphi = 0$. Поэтому вблизи $\varphi = 0$ обязательно имеет силу решение (1.8), причем величина θ_1 должна быть $\theta_1 = 0$ или $\theta_1 = \pi/2$. Из краевого условия $\sigma_2 = 0$ при $\varphi = 0$ следует, что $\sigma_0 = 1$ при $\theta_1 = 0$ и $\sigma_0 = -1$ при $\theta_1 = \pi/2$. Так как $|\cos 2(\varphi - \varphi_1)| \leq 1$, а величина σ_2 должна быть $\sigma_2 < 0$ при $\varphi = \varphi_0$, необходимо считать, что $\sigma_0 = -1$ и $\theta_1 = \pi/2$. Тогда из (1.8) получим

$$\sigma_1 - \sigma_2 = -2 \cos 2\varphi, \quad \tau = \sin 2\varphi, \quad \sigma_2 = \cos 2\varphi - 1 \quad (2.2)$$

Предположим, что решение (2.2) имеет силу во всем очаге деформации. Тогда условие трения даст $m = \sin 2\varphi_0$. Учитывая диапазон изменения величины φ , получим $\varphi_0 = 1/2 \arcsin m$ или $\varphi_0 = 1/2 \arcsin m + \pi/2$.

Решение (1.7) может примыкать к решению (2.2) при $\varphi = \pi/4$. Условие непрерывности σ_2 даст $p_0 = \pi/2 - 1$. Решение (1.7) в этой области будет иметь вид

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \tau = 1, \quad \sigma_2 = -2\varphi + \pi/2 - 1 \quad (2.3)$$

Если $m=1$, то это решение может быть продолжено до стенки матрицы. В противном случае решение (2.3) необходимо сшить при $\varphi = \varphi_2$ с решением (1.8), которое должно удовлетворять условию трения при $\varphi = \varphi_0$ и условиям непрерывности τ и σ_2 при $\varphi = \varphi_2$. Эти условия дают

$$\begin{aligned} -\sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) &= 1, \quad -\sin 2(\varphi_0 - \varphi_1) = m, \\ -2\varphi_2 + \pi/2 - 1 &= -\cos 2(\varphi_2 - \varphi_1) + \sigma_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом; если используется решение (1.7), то одна из постоянных, например φ_0 , остается, неопределенной из краевых условий в напряжениях. Если во всем объеме очага деформации действует решение (2.2), то имеются два возможных значения φ_0 .

Представляя (2.1) в (1.3) и (1.4), получим

$$\alpha u + v' = 0, \quad [(\alpha - 2)u - v'] / [(\alpha - 2)v + u'] = \Omega(\varphi) \quad (2.5)$$

где $\Omega(\varphi) = -\operatorname{ctg} 2(\varphi - \varphi_1)$ — для решения (1.8), $\Omega(\varphi) = 0$ — для решения (1.7). В случае $\Omega(\varphi) = 0$ из (2.5) получим

$$\alpha u + v' = 0, \quad (\alpha - 2)u - v' = 0 \quad (2.6)$$

Отсюда следует при $\alpha \neq 1$:

$$u = 0, \quad v = \text{const} \quad (2.7)$$

Если $\alpha = 1$, то уравнения (2.6) сводятся к одному

$$v' = -u \quad (2.8)$$

Полю напряжений (1.8) соответствуют уравнения (2.5) вида $\alpha u + v' = 0$, $[(\alpha - 2)u - v'] / [(\alpha - 2)v + u'] = -\operatorname{ctg} 2(\varphi - \varphi_1)$. Исключая из этих уравнений u , получим

$$v' + 2(\alpha - 1) \operatorname{tg} 2(\varphi - \varphi_1) v' - \alpha(\alpha - 2)v = 0 \quad (2.9)$$

Если это уравнение имеет силу во всем очаге деформации, то краевые условия для него будут $v=0$ при $\varphi = \varphi_0$ и, в случае установившегося течения, $v=0$ при $\varphi = 0$. Если течение не установившееся, то в начальный момент времени величина $\varphi_0 = \pi$.

Уравнение (2.9) сводится к гипергеометрическому подстановкой $\xi = \sin^2 [2(\varphi - \varphi_1)]$ [9].

$$\begin{aligned} \xi(1 - \xi) d^2v/d\xi^2 + [c - (a + b + 1)\xi] dv/d\xi - av &= 0 \\ c = 1/2, \quad a = -\alpha/4, \quad b = (2 - \alpha)/4 \end{aligned} \quad (2.10)$$

С учетом (2.4), краевые условия для (2.10) примут вид $v=0$ при $\xi = m^2$ и, для установившегося процесса, $v=0$ при $\xi = 0$. Кроме того, в местах сшивки решений для напряжений, если таковые имеются, необходимо удовлетворить условию непрерывности скоростей.

Предположим, что решение (2.2) действует во всем очаге деформации. Поскольку в этом случае величина φ_0 фиксированная, то такое решение может описывать только установившийся процесс. Остановившаяся на случае $\varphi_0 = (\frac{1}{2}) \arcsin m + \pi/2$. Новая независимая переменная будет $\xi = \sin^2(2\varphi)$. Отсюда следует, что решение уравнения (2.10) необходимо получить в интервале изменений ξ : $0 \leq \xi \leq 1$. Этот интервал содержит две особые точки уравнения (2.10): $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = 1$. Свободной поверхности ($\varphi = 0$) всегда соответствует особая точка ξ_1 . Вблизи нее решение (2.10) представимо в виде [10]:

$$v' = D_1^{(1)} F[-\alpha/4, (2-\alpha)/4, 1/2; \xi] + D_2^{(1)} F[1/2 - \alpha/4, 1 - \alpha/4; 3/2; \xi] \xi^{1/2} \quad (2.11)$$

где $F(a, b, c; \xi)$ — гипергеометрическая функция, представляемая сходящимся рядом при $|\xi| < 1$; $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}$ — постоянные интегрирования.

Из краевого условия $v = 0$ при $\xi = 0$ получим $D_1^{(1)} = 0$. Тогда окончательное выражение для скорости v вблизи свободной поверхности будет

$$v^{(1)} = D_2^{(1)} F[1/2 - \alpha/4, 1 - \alpha/4, 3/2; \xi] \xi^{1/2}$$

Радиальная скорость в этой области определяется так

$$u^{(1)} = -v^{(1)}/\alpha = -(2D_2^{(1)}/\alpha) \{ F[1/2 - \alpha/4, 1 - \alpha/4, 3/2; \xi] + \\ + 4/3 \xi (1/2 - \alpha/4) (1 - \alpha/4) F[3/2 - \alpha/4, 2 - \alpha/4, 5/2; \xi] \} (1 - \xi)^{1/2}$$

Исходя из диапазона изменения величины φ и выражения для ξ , получим, что особая точка ξ_2 будет соответствовать значению $\varphi = \pi/4$. Решение уравнения (2.10) вблизи этой точки имеет вид [10]:

$$v^{(2)} = D_1^{(2)} F[-\alpha/4, (2-\alpha)/4, 1 - \alpha/2; 1 - \xi] + \\ + D_2^{(2)} (1 - \xi)^{\alpha/2} F[\alpha/4, 1/2 + \alpha/4, 1 + \alpha/2; 1 - \xi]$$

Это решение имеет силу при $|1 - \xi| < 1$. Радиальная скорость в этой области определяется так

$$u^{(2)} = -v^{(2)}/\alpha = -1/2 \xi^{1/2} \cos(2\varphi) \{ D_1^{(2)} F(1 - \alpha/4, (6-\alpha)/4, 2 - \alpha/2; 1 - \xi) - \\ - D_2^{(2)} (1 - \xi)^{\alpha/2} [4(1 - \xi)^{-1} F(\alpha/4, 1/2 + \alpha/4, 1 + \alpha/2; 1 - \xi) + \\ + F(1 + \alpha/4, 3/2 + \alpha/4, 2 + \alpha/2; 1 - \xi)] \}$$

Диапазон изменения φ показывает, что имеется еще одна особая точка вида ξ_1 при $\varphi = \pi/2$. Общее решение вблизи этой точки будет иметь вид (2.11). Краевое условие $v = 0$ при $\xi = m^2$ дает связь между $D_1^{(3)}$ и $D_2^{(3)}$:

$$v^{(3)} = D_1^{(3)} F[-\alpha/4, (2-\alpha)/4, 1/2; m^2] + D_2^{(3)} F[1/2 - \alpha/4, \\ 1 - \alpha/4, 3/2; m^2] \quad m = 0 \quad (2.12)$$

При этом радиальная скорость

$$u^{(3)} = -v^{(3)}/\alpha = \frac{\sin(4\varphi)}{\alpha} \{ D_1^{(3)} \alpha (2-\alpha)/4 F(1 - \alpha/4, 3/2 - \alpha/4, 3/2; \xi) - \\ - [\xi^{-1/2} F(1/2 - \alpha/4, 1 - \alpha/4, 3/2; \xi) + \xi^{1/2} (2-\alpha)(4-\alpha) \times \\ \times F(3/2 - \alpha/4, 2 - \alpha/4, 5/2; \xi)/12] D_2^{(3)} \}$$

Кроме естественных краевых условий, необходимо выполнить условия непрерывности скоростей v и u при сшивке решений 1 и 2, а также 2 и 3:

$$u^{(1)}(\xi_*) = u^{(2)}(\xi_*), \quad v^{(1)}(\xi_*) = v^{(2)}(\xi_*)$$

$$u^{(2)}(\xi_{**}) = u^{(3)}(\xi_{**}), \quad v^{(2)}(\xi_{**}) = v^{(3)}(\xi_{**}) \quad (2.13)$$

Здесь ξ_* и ξ_{**} — координаты точек, в которых сшиваются решения 1 и 2 или 2 и 3 соответственно.

Система пяти уравнений (2.12), (2.13) позволяет определить пять из содержащихся в ней восьми произвольных постоянных: $D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$, ξ_* , ξ_{**} , α . Оставшиеся три постоянных могут быть найдены только из дополнительных условий, например из внешней задачи.

3. Результаты и обсуждение. Полученное решение позволяет описать течение вблизи точки отрыва на поверхности матрицы. Очевидно, кроме предложенного решения, возможны решения с использованием поля напряжений (1.7), что позволит рассмотреть развитие процесса образования полости на неустановившейся стадии.

Отметим также, что предложенная постановка оказывается перспективной при анализе распространения трещины в жесткопластическом теле и исследовании решения вблизи угловой точки, образованной поверхностью инструмента и жесткой областью (поверхностью разрыва поля скоростей). Во всех этих случаях различие в постановке локальной задачи сказывается только в формулировке краевых условий.

Важное значение имеет также статическое условие на поверхности трения. Очевидно, по мере раскрытия полости нормальное давление на стенку матрицы будет уменьшаться. Поэтому, при некотором значении угла φ_0 , применение закона трения Прандтля может оказаться некорректным и необходимо будет использовать закон трения Кулона. При дальнейшем изменении величины φ_0

значение давления, а следовательно, (в соответствии с законом трения Кулона) и величины контактного касательного напряжения будут уменьшаться. Видимо в некоторых случаях это может привести к тому, что установившееся течение будет иметь место при отсутствии трения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16492).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 407 с.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 396 с.
3. Drowman M. J. Steady Forming Processes of Plastic Materials with Their Rotation // Int. J. Mech. Sci. 1987. V. 29. No. 7. P. 483—489.
4. Avitzur B. Review of the State of the Art in the Study of Flow Through Conical Converging Dies // Dev. Draw. Metals Proc. Int. Conf. London, 11—13 May, 1983. London: 1983. P. 1—13.
5. Durban D. and Fleck N. A. Singular Plastic Fields in Steady Penetration of a Rigid Cone // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1992. V. 59. No. 4. P. 706—710.
6. Avitzur B. and Sortais H. C. Experimental Study of Hydrostatic Extrusion // Trans. ASME. Basic Engineering. Ser. D. 1966. V. 88. No. 3. P. 658—668.
7. Moffatt H. K. Viscous and Resistive Eddies Near a Sharp Corner // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. No. 1. P. 1—18.
8. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 255 с.
9. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения, М.: Наука, 1993. 464 с.
10. Кузнецов Д. С. Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965. 423 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.IV.1993