

УДК 539.3

© 1993 г. А. Г. ГОРШКОВ, И. Ю. КОЛЕСНИКОВ

ФОРМИРОВАНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИЙ ФОРМЫ ДЛЯ ПЛАСТИНЧАТОГО БЛОКА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ГРАНИЧНЫХ УЗЛОВ

При реализации метода конечных элементов (МКЭ) возникает альтернатива в использовании большего числа простейших или меньшего числа уточненных конечных элементов. Что касается первого направления, то оно автоматически развивается с ростом вычислительных возможностей ЭВМ (главным образом супер-ЭВМ) и совершенствованием их технической оснащенности (систем геометрического моделирования, сервисных процедур и так далее).

В свою очередь широкое внедрение мини-ЭВМ и персональных компьютеров предоставляет большие возможности оперативного решения инженерных задач на базе уточненных конечных элементов, позволяя при реализации ограничиваться сравнительно небольшим их числом, не оперируя при этом с большими объемами вводимой информации и не приводя к трудно обозримым результатам.

Областью практического использования уточненных конечных элементов являются задачи с сильно изменяемостью решения, когда применение стандартных схем МКЭ оказывается мало эффективным или вообще неприемлемым. Это в первую очередь относится к задачам со смешанными (разрывными) граничными условиями и задачам для тел с углами и ребрами, где под уточненными конечными элементами понимаются такие элементы, базисные функции (функции формы) которых в той или иной степени могут учесть специфику данного класса задач. В связи с этим, центральным моментом, во многом обуславливающим успешность численной реализации, становится само построение уточненных конечных элементов. При этом приходится учитывать противоречивые требования к реализуемости, сочетая алгоритмическую простоту с достаточным функциональным произволом.

Так в [1] при формировании пластинчатых трещицеобразных базисных функций использовались специальные суперпозиции с применением степенных полиномов высокого порядка, удовлетворяющих бигармоническому уравнению и корректирующим функциям, что позволило при решении некоторых задач ограничиваться всего лишь одним конечным элементом. Как отмечалось в [2] для обеспечения согласованных форм приходится привлекать ортогональные и неполиномиальные базисные функции [3, 4].

Сделанные замечания естественным образом приводят к целесообразности аналитического построения базисных функций (функций формы), которые помимо интерполирующих и аппроксимирующих свойств должны обладать еще и определяющими, т. е. удовлетворять определяющим уравнениям задачи. Тогда значительно повышается точность расчета МКЭ, а в некоторых случаях и вообще отпадает необходимость привлечения вариационных принципов (или метода взвешенных невязок) и связанных с ними процедур численного интегрирования, что в значительной степени обеспечивает оперативность решения задачи.

В [5] был сформулирован общий методологический принцип расчета составных конструкций и неоднородных тел, получивший название метода блоков, а в [6] было введено понятие канонического блока — как прямоугольного (параллелепипедного) конечного элемента с произвольным числом граничных узлов, наделенного определяющими свойствами. В связи с этим представляются целесообразными два варианта реализации метода блоков: на основе МКЭ — с использованием для уточненного расчета определяющих базисных функций и непосредственного гранично-коллокационного сопряжения блоков с применением базисных функций — как общих решений определяющих уравнений, что для

задач изгиба пластин и плоской задачи теории упругости связано с решением бигармонической проблемы.

Решение бигармонической проблемы тесно связано с решениями гармонических задач, наиболее эффективным аналитическим методом решения которых является классический метод суперпозиции (метод частных решений) [7]. Однако было сделано критическое замечание [8, 9] о недостаточной общности и адекватности классического метода суперпозиции и был предложен прием, устраняющий оговоренные дефекты. Как выяснилось впоследствии [10], идейные стороны метода [8, 9], являющегося вариантом реализации метода конечных интегральных преобразований, были заложены еще Стоксом [11], но не получили широкого распространения ввиду громоздкости их реализации. Заметим, что упомянутое замечание и его обоснование вызваны не столько существом дела, сколько выбором классической схемы метода суперпозиции.

В [6, 12—16] для прямоугольника и прямоугольного параллелепипеда была предложена новая схема суперпозиции построенных частных решений, связанных с граничными точками, включая углы и ребра. Было показано, что в предельном случае, когда задействуются все граничные точки, приближенное решение становится точным, полнота представления которого обуславливается полнотой поточечного представления границы, естественным образом обеспечивая при этом адекватность решения задачи в равномерно сходящихся рядах.

В публикуемой работе формируются определяющие базисные функции и функции формы для задач изгиба и плоской теории упругости пластин. Построено общее решение бигармонического уравнения с учетом угловых точек.

Получены компактные представления гармонических (или «почти гармонических») функций формы и бигармонических базисных функций для прямоугольного конечного элемента (блока) с произвольным числом граничных узлов, включая углы пластины. Построены общие решения определяющих уравнений при разрыве разрешающих функций в углах. Показано, что в предельном случае (при неограниченном увеличении числа граничных узлов) полученные представления становятся точными.

Результаты реализации метода блоков в гранично-коллокационном варианте проиллюстрированы на примерах решения задач изгиба кирхгофовских пластин со смешанными (разрывными) граничными условиями, расчете непрямоугольной пластины и расчете составной пластинчатой конструкции, набранной из 16 блоков. Следует подчеркнуть, что дискретизации подвергались лишь границы блоков — аналогично тому как это делается в методе граничных элементов (МГЭ) [17], не приводя, однако, к сингулярным представлениям МГЭ и не требуя привлечения процедур численного интегрирования. Из проведенных сопоставлений с другими приближенными методами и точными решениями следует как высокая точность, так и адекватность сформированных блоков для решения бигармонической проблемы.

Другие схемы метода суперпозиции с добавочными членами для учета угловых точек использовались в [18—21] при расчете прямоугольных пластин с двумя свободными смежными сторонами.

1. Рассмотрим пластинчатую область Ω^v (фиг. 1). Выделим в ней, произвольным образом, прямоугольную подобласть Ω_p , ограниченную ломаной линией Γ_i с угловыми точками A_i, B_i, C_i, D_i .

Уравнение изгиба кирхгофовской пластины имеет вид [22]:

$$D\nabla^2\nabla^2w = q, \quad \nabla^2 = \partial^2/\partial x_i^2 + \partial^2/\partial y_i^2 \quad (1.1)$$

Обозначения здесь совпадают с [22].

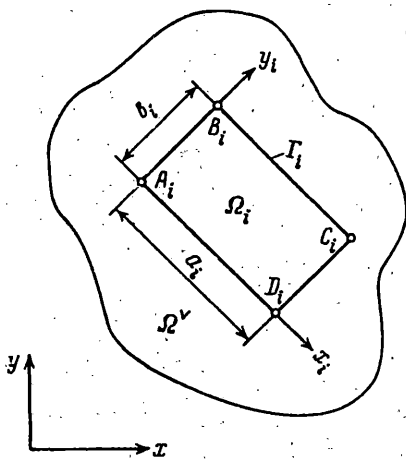
Уравнение (1.1) эквивалентно системе (ν — коэффициент Пуассона):

$$\nabla^2M = q, \quad D\nabla^2w = M \quad (1.2)$$

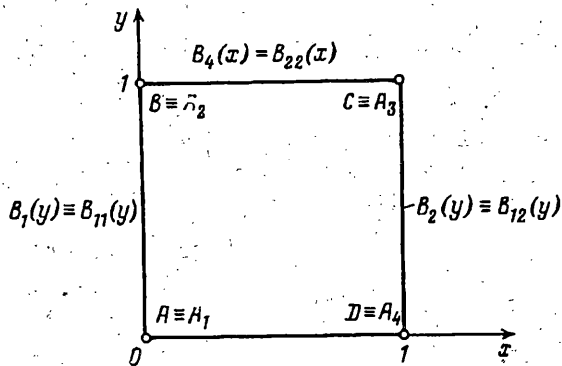
$$M = -(M_x + M_y)/(1 + \nu) \quad (1.3)$$

Преобразуем прямоугольную подобласть Ω_i в единичный квадрат Ω_0 и введем безразмерные координаты и функции

$$x^0 = x_i/a_i, \quad y^0 = y_i/b_i, \quad \kappa = a_i/b_i \quad (1.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$M^0 = M/(q_0 a_i^2), \quad w^0 = w/(q_0 a_i^2/D), \quad q^0 = q/q_0$$

Подставляя (1.4) в (1.3) и опуская верхние индексы, получим в $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ с границей Γ систему уравнений

$$\partial^2 M / \partial x^2 + \kappa^2 \partial^2 M / \partial y^2 = q \quad (1.5)$$

$$\partial^2 w / \partial x^2 + \kappa^2 \partial^2 w / \partial y^2 = M \quad (1.6)$$

Представим множество точек границы Γ , углы и стороны которой обозначены согласно фиг. 2, в виде суммы (объединения) двух непересекающихся множеств угловых точек S_1 и точек сторон S_2 :

$$\Gamma = S_1 + S_2, \quad S_1 = \{A, B, C, D\}, \quad S_2 = \bigcup_{i=1}^4 B_i(\zeta), \quad 0 < \zeta < 1 \quad (1.7)$$

Будем конструировать общее решение системы (1.5), (1.6) последовательной суперпозицией частных решений в соответствии с множественным представлением (1.7):

$$M(x, y) = M_0(x, y) + M_1(x, y) + M_2(x, y) \quad (1.8)$$

$$w(x, y) = w_0(x, y) + w_1(x, y) + w_2(x, y) \quad (1.9)$$

Слагаемые в (1.8), (1.9) определим из краевых задач:

$$\partial^2 M_0 / \partial x^2 + \kappa^2 \partial^2 M_0 / \partial y^2 = q, \quad M_0|_{\Gamma} = 0 \quad (1.10)$$

$$\partial^2 w_0 / \partial x^2 + \kappa^2 \partial^2 w_0 / \partial y^2 = M_0, \quad w_0|_{\Gamma} = 0 \quad (1.11)$$

задача (б):

$$\partial^2 M_1 / \partial x^2 + \kappa^2 \partial^2 M_1 / \partial y^2 = 0, \quad M_1(P \in S_1) = M(P \in S_1) \quad (1.12)$$

$$\partial^2 w_1 / \partial x^2 + \kappa^2 \partial^2 w_1 / \partial y^2 = M_1, \quad w_1(P \in S_1) = w(P \in S_1) \quad (1.13)$$

задача (в):

$$\partial^2 M_2 / \partial x^2 + \kappa^2 \partial^2 M_2 / \partial y^2 = 0, \quad M_2(P \in S_1) = 0 \quad (1.14)$$

$$\partial^2 w_2 / \partial x^2 + \kappa^2 \partial^2 w_2 / \partial y^2 = M_2, \quad w_2(P \in S_1) = 0 \quad (1.15)$$

Задача (а) допускает точное решение

$$M_0 = \sum_{m,n} M_{mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y), \quad w_0 = \sum_{m,n} W_{mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y)$$

$$M_{mn} = -(1/\pi^2) Q_{mn} (m^2 + \kappa^2 n^2)^{-1}, \quad W_{mn} = (1/\pi^4) Q_{mn} (m^2 + \kappa^2 n^2)^{-2},$$

$$Q_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 q(\xi, \eta) \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta) d\xi d\eta \quad (1.16)$$

Задача (1.12) решается также точно

$$M_1 = M(A)(1-x)(1-y) + M(B)(1-x)y + M(C)xy + M(D)x(1-y) \quad (1.17)$$

Решение задачи (1.13), (1.17) представим, в свою очередь, в виде суперпозиции двух решений

$$w_1 = w^* + w^\vee \quad (1.18)$$

$$w^* = w(A)(1-x)(1-y) + w(B)(1-x)y + w(C)xy + w(D)x(1-y) \quad (1.19)$$

Для того, чтобы функция w_1 удовлетворяла задаче (1.13), (1.17), функцию w^\vee определим из красной задачи

$$\partial^2 w^\vee / \partial x^2 + \kappa^2 \partial^2 w^\vee / \partial y^2 = M_1, \quad w^\vee|_{\Gamma} = 0 \quad (1.20)$$

Точное решение задачи (1.20) запишется в виде

$$w^\vee = M(A) w_1^\vee(x, y) + M(B) w_2^\vee(x, y) + M(C) w_3^\vee(x, y) + M(D) w_4^\vee(x, y) \quad (1.21)$$

$$w_i^\vee = \sum_{m,n} W_{mn}^{(i)} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) \quad (i = \overline{1,4}) \quad (1.22)$$

$$W_{mn}^{(1)} = -4/\pi^4 [mn(m^2 + \kappa^2 n^2)]^{-1}, \quad W_{mn}^{(2)} = (-1)^{n+1} W_{mn}^{(1)} \quad (1.23)$$

$$W_{mn}^{(3)} = (-1)^{m+1} (-1)^{n+1} W_{mn}^{(1)}, \quad W_{mn}^{(4)} = (-1)^{m+1} W_{mn}^{(1)}$$

Двойные ряды (1.22) можно заменить одинарными

$$w_1^\vee = \sum_n \varphi_{1n}(x) \sin(n\pi y), \quad w_2^\vee = \sum_n \varphi_{2n}(x) \sin(n\pi y)$$

$$w_3^\vee = \sum_n \sigma_{2n}(x) \sin(n\pi y), \quad w_4^\vee = \sum_n \sigma_{1n}(x) \sin(n\pi y) \quad (1.24)$$

$$\varphi_{kn}(x) = \exp(-a_n(1-x))c_{1n}^{(k)} + \exp(-a_n x)c_{2n}^{(k)} - (1-x)b_n^{(k)}/a_n^2,$$

$$\sigma_{kn}(x) = \exp(-a_n(1-x))c_{2n}^{(k)} + \exp(-a_n x)c_{1n}^{(k)} - x b_n^{(k)}/a_n^2$$

$$c_{1n}^{(k)} = -b_n^{(k)} e^{-a_n} [a_n^2 (1 - e^{-2a_n})]^{-1}, \quad c_{2n}^{(k)} = b_n^{(k)} [a_n^2 (1 - e^{-2a_n})]^{-1}$$

$$a_n = \kappa n, \quad b_n^{(1)} = 2/(\pi n), \quad b_n^{(2)} = (-1)^{n+1} b_n^{(1)} \quad (1.25)$$

Для построения общего решения задачи (а) решим сначала одну частную задачу для системы (1.14), (1.15).

Проведем прямые $y = y_k = k/(n+1)$, $k = \overline{0, n+1}$. Система метода прямых $O(1/(n+1)^2)$ запишется в виде [23—25]:

$$M_k''(x) + \Lambda_k^2 M_k(x) = 0, \quad w_k''(x) + \Lambda_k^2 w_k(x) = M_k(x)$$

$$M_k(x) = M(x, y_k), \quad w_k(x) = w(x, y_k) \quad (1.26)$$

где Λ_k^2 — центральный конечно-разностный оператор. Не увеличивая числа прямых, запишем систему метода прямых повышенного порядка аппроксимации $O(1/(n+1)^4)$ [15, 23]:

$$\begin{aligned} & 5/6 M_k''(x) + 1/12 [M_{k-1}''(x) + M_{k+1}''(x)] + \Lambda_k^2 M_k(x) = 0 \\ & 5/6 w_k''(x) + 1/12 [w_{k-1}''(x) + w_{k+1}''(x)] + \Lambda_k^2 w_k(x) = \\ & = 5/6 M_k(x) + 1/12 [M_{k-1}(x) + M_{k+1}(x)] \end{aligned} \quad (1.27)$$

Граничные условия для (1.26) зададим следующим образом:

$$M_0(x) = M_{n+1}(x) = w_0(x) = w_{n+1}(x) = 0 \quad (1.28)$$

$$M_k(1) = 0, \quad w_k(1) = 0, \quad k = \overline{1, n} \quad (1.29)$$

$$M_k(0) = \sum_{s=1}^n M_s \sin(\pi s y_k), \quad w_k(0) = \sum_{s=1}^n W_s \sin(\pi s y_k) \quad (1.30)$$

Точное решение задачи (1.26), (1.28)—(1.30) примет вид

$$M(x, y_k) = \sum_{s=1}^n \chi_s(x) M_s \sin(\pi s y_k) \quad (1.31)$$

$$w(x, y_k) = \sum_{s=1}^n \chi_s(x) W_s \sin(\pi s y_k) + \sum_{s=1}^n \psi_{1s}(x) M_s \sin(\pi s y_k) \quad (1.32)$$

$$\chi_s(x) = \exp(-\alpha_s(1-x)) c_{1s} + \exp(-\alpha_s x) c_{2s} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \psi_{1s}(x) = & \exp(-\alpha_s(1-x)) d_{1s} + \exp(-\alpha_s x) d_{2s} + \\ & + \exp(-\alpha_s(1-x)) (1-x) e_{1s} + \exp(-\alpha_s x) x e_{2s} \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\alpha_s = 2\kappa(n+1) \sin(\pi s / (2(n+1))) \quad (1.35)$$

$$c_{1s} = -e^{-\alpha_s} c_{2s}, \quad c_{2s} = (1 - e^{-2\alpha_s})^{-1} \quad (1.36)$$

$$d_{1s} = 1/2 e^{-\alpha_s} (1 + e^{-2\alpha_s}) [\alpha_s (1 - e^{-2\alpha_s})^2]^{-1}, \quad d_{2s} = -e^{-2\alpha_s} [\alpha_s (1 - e^{-2\alpha_s})^2]^{-1}$$

$$e_{1s} = 1/2 e^{-\alpha_s} [\alpha_s (1 - e^{-2\alpha_s})]^{-1}, \quad e_{2s} = -1/2 [\alpha_s (1 - e^{-2\alpha_s})]^{-1}$$

Точное решение уточненной задачи (1.27)—(1.30) имеет тот же вид (1.31)—(1.34), (1.36) с заменой характеристических чисел α_s (1.35) на $\alpha_s [6/[5 + \cos(\pi s/(n+1))]]^{1/2}$.

Воспользовавшись принципом суперпозиции и решением введенной частной задачи, нетрудно получить общее решение задачи (6). Возьмем на стороне AB — n_1 равномерно расположенных узлов (исключая угловые точки), на стороне DC — n_2 узлов, на стороне AD — n_3 узлов и на стороне BC — n_4 узлов. Число узлов n_i выбирается в зависимости от предполагаемой степени гладкости решения вдоль соответствующей стороны, а также из соображений стыковки сопрягаемых блоков.

В результате суперпозиции частных решений получим общее решение би-гармонической проблемы в виде представлений

$$M(x, y) = M_0(x, y) + \sum_{s=1}^{n_1} \chi_{1s}(x) \sin(\pi s y) M_{1s} + \sum_{s=1}^{n_2} \chi_{2s}(x) \sin(\pi s y) M_{2s} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n_3} \chi_{1s}(y) \sin(\pi s x) M_{3s} + \sum_{s=1}^{n_4} \chi_{2s}(y) \sin(\pi s x) M_{4s} + \quad (1.37)$$

$$+ M(A)(1-x)(1-y) + M(B)(1-x)y + M(C)xy + M(D)x(1-y)$$

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \sum_{s=1}^{n_1} \chi_{1s}(x) \sin(\pi s y) W_{1s} + \sum_{s=1}^{n_2} \chi_{2s}(x) \sin(\pi s y) W_{2s} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n_3} \chi_{1s}(y) \sin(\pi s x) W_{3s} + \sum_{s=1}^{n_4} \chi_{2s}(y) \sin(\pi s x) W_{4s} + \sum_{s=1}^{n_1} \psi_{1s}(x) \sin(\pi s y) M_{1s} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n_2} \psi_{2s}(x) \sin(\pi s y) M_{2s} + \sum_{s=1}^{n_3} \psi_{1s}(y)/\kappa^2 \sin(\pi s x) M_{3s} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n_4} \psi_{2s}(y)/\kappa^2 \sin(\pi s x) M_{4s} + w(A)(1-x)(1-y) + w(B)(1-x)y +$$

$$+ w(C)xy + w(D)x(1-y) + M(A)w_1^v(x, y) + M(B)w_2^v(x, y) +$$

$$+ M(C)w_3^v(x, y) + M(D)w_4^v(x, y) \quad (1.38)$$

Здесь M_{is} и W_{is} — весовые коэффициенты разложения компонент граничных функций в конечные ряды Фурье; для $\chi_{2s}(\dots)$ и $\psi_{2s}(\dots)$ следует воспользоваться выражениями (1.33) и (1.34) с заменой $1 \approx 2$, а для функций $\chi_{1s}(y)$ и $\psi_{1s}(y)$ заменить в характеристических числах (1.35) параметр κ на $1/\kappa$.

Общее решение (1.37), (1.38) обладает достаточным произволом для поточечного удовлетворения любым граничным условиям при обеспечении непрерывности разрежающих функций в угловых точках.

В предельном случае ($n_i \rightarrow \infty$; $i = 1, 4$):

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \alpha_s = \kappa s \quad (1.39)$$

и ряды (1.37), (1.38) будут точно удовлетворять системе (1.5), (1.6) (точное удовлетворение будет также иметь место для выражений (1.37), (1.38) и при конечных n_i , если положить $\alpha_s = \kappa s$). Очевидно, полнота представлений (1.37), (1.38) непосредственно следует из полноты граничного представления (1.7).

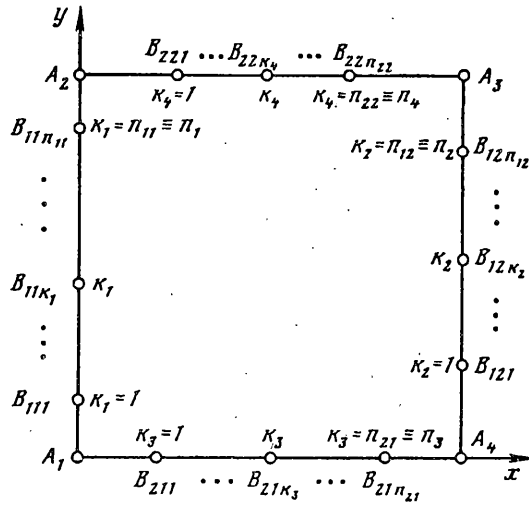
2. Производя обратное конечное (дискретное) преобразование Фурье и приводя подобные члены, относящиеся к одним и тем же угловым точкам, после сворачивания сумм согласно [6], получим второе представление общего решения, где в качестве произвольных констант выступают уже сами значения искомого (или заданного) решения в граничных узлах A_i и B_{ijk} (фиг. 3) (приводятся только окончательные результаты):

$$M(x, y) = M_0(x, y) + \sum_{i=1}^4 f_i^A(x, y) M(A_i) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{1}{n_{ij} + 1} \sum_{k=1}^{n_{ij}} f_{ijk}^B(x, y) M(B_{ijk}) \quad (2.1)$$

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \sum_{i=1}^4 f_i^A(x, y) w(A_i) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{1}{n_{ij} + 1} \sum_{k=1}^{n_{ij}} f_{ijk}^B(x, y) w(B_{ijk}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^4 g_i^A(x, y) M(A_i) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{1}{n_{ij} + 1} \sum_{k=1}^{n_{ij}} g_{ijk}^B(x, y) M(B_{ijk}) \quad (2.2)$$

$$f_{ijk}^B(x, y) = 2 \sum_{s=1}^{n_{ij}} \chi_{js}(z) \sin \frac{\pi s k}{n_{ij} + 1} \sin(\pi s t)$$



Фиг. 3

$$g_{ijk}^B(x, y) = 2 \sum_{s=1}^{n_{ij}} \psi_{js}(z) \Lambda_s \sin \frac{\pi s k}{n_{ij} + 1} \sin(\pi s t)$$

$$\begin{Bmatrix} f_1^A(x, y) \\ g_1^A(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1-x)(1-y) \\ w_1^y(x, y) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_A^{(1)}(x, y) \\ g_A^{(1)}(x, y) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_A^{(3)}(x, y) \\ g_A^{(3)}(x, y) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_2^A(x, y) \\ g_2^A(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1-x)y \\ w_2^y(x, y) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_B^{(1)}(x, y) \\ g_B^{(1)}(x, y) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_B^{(4)}(x, y) \\ g_B^{(4)}(x, y) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_3^A(x, y) \\ g_3^A(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} xy \\ w_3^y(x, y) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_C^{(2)}(x, y) \\ g_C^{(2)}(x, y) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_C^{(4)}(x, y) \\ g_C^{(4)}(x, y) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_4^A(x, y) \\ g_4^A(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(1-y) \\ w_4^y(x, y) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_D^{(2)}(x, y) \\ g_D^{(2)}(x, y) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_D^{(3)}(x, y) \\ g_D^{(3)}(x, y) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_A^{(1)}(x, y) \\ g_A^{(1)}(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^{n_1} \begin{Bmatrix} \chi_{1s}(x) \\ \psi_{1s}(x) \end{Bmatrix} b_s^{(1)} \sin(\pi s y)$$

$$\begin{Bmatrix} f_A^{(3)}(x, y) \\ g_A^{(3)}(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^{n_3} \begin{Bmatrix} \chi_{1s}(y) \\ \psi_{1s}(y)/x^2 \end{Bmatrix} b_s^{(3)} \sin(\pi s x)$$

$$\begin{Bmatrix} f_B^{(1)}(x, y) \\ g_B^{(1)}(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^{n_1} \begin{Bmatrix} \chi_{1s}(x) \\ \psi_{1s}(x) \end{Bmatrix} (-1)^{s+1} b_s^{(1)} \sin(\pi s y)$$

$$\begin{Bmatrix} f_B^{(4)}(x, y) \\ g_B^{(4)}(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^{n_4} \begin{Bmatrix} \chi_{2s}(y) \\ \psi_{2s}(y)/x^2 \end{Bmatrix} b_s^{(4)} \sin(\pi s x)$$

$$\begin{Bmatrix} f_C^{(2)}(x, y) \\ g_C^{(2)}(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^{n_2} \begin{Bmatrix} \chi_{2s}(x) \\ \psi_{2s}(x) \end{Bmatrix} (-1)^{s+1} b_s^{(2)} \sin(\pi s y)$$

$$\begin{Bmatrix} f_C^{(4)}(x, y) \\ g_C^{(4)}(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^{n_4} \begin{Bmatrix} \chi_{2s}(y) \\ \psi_{2s}(y)/x^2 \end{Bmatrix} (-1)^{s+1} b_s^{(4)} \sin(\pi s x)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_D^{(2)}(x, y) \\ g_D^{(2)}(x, y) \end{Bmatrix} &= \sum_{s=1}^{n_2} \begin{Bmatrix} \chi_{2s}(x) \\ \psi_{2s}(x) \end{Bmatrix} b_s^{(2)} \sin(\pi s y) \\ \begin{Bmatrix} f_D^{(3)}(x, y) \\ g_D^{(3)}(x, y) \end{Bmatrix} &= \sum_{s=1}^{n_3} \begin{Bmatrix} \chi_{1s}(y) \\ \psi_{1s}(y)/\kappa^2 \end{Bmatrix} (-1)^{s+1} b_s^{(3)} \sin(\pi s x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$b_s^{(j)} = 2/\gamma_s^{(j)} \cos[\pi s/(2(n_j + 1))]$$

$$\gamma_s^{(j)} = 2(n_j + 1) \sin[\pi s/(2(n_j + 1))]$$

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & (i=1) \\ 1/\kappa^2 & (i=2) \end{cases}, \quad (z, t) = \begin{cases} (x, y) & (i=1) \\ (y, x) & (i=2) \end{cases}$$

$$B_{ijk} = B_{ij}(z_k), \quad z_k = k/(n_{ij} + 1) \quad (i, j = 1, 2), \quad k = \overline{1, n_{ij}}$$

Решение в форме (2.1)–(2.3) дает приближенное представление граничного оператора Грина с учетом угловых точек. При этом функции, фигурирующие в правых частях (2.1) и (2.2) (в (2.2) при $w(\dots)$), являются функциями формы для узлов (фиг. 3): в углах — A_i ($i = \overline{1, 4}$) и на сторонах — $B_{ijk} = B_{ij}(z_k)$, $z_k = k/(n_{ij} + 1)$, ($i, j = 1, 2, k = \overline{1, n_{ij}}$).

Принципиальное отличие построенных функций формы от известных — синеридиповых [26] состоит в том, что, во-первых, они приближенно (или точно) удовлетворяют определяющему уравнению и, во-вторых, они представлены в явном виде для произвольного числа граничных узлов.

Представление (2.1) в отличие от [12] сокращает вычисление функций формы для каждой угловой точки в $2n$ раз (для решения всей бигармонической проблемы (2.1), (2.2) такое сокращение будет уже, по крайней мере, в $6n$ раз, где $n = \min\{n_{ij}\}$), что при реализации обеспечивает существенные вычислительные преимущества.

Представления гармонической (2.1) и бигармонической (2.2) функциями обладают полнотой [27] по отношению к выбранной системе граничных узлов.

В предельном случае $n_{ij} \rightarrow \infty$ ($n_i \rightarrow \infty$) выражения (2.1) и (2.2) переходят в гранично-интегральные

$$M(x, y) = M_0(x, y) + \sum_{i=1}^4 f_i^{A, \infty}(x, y) M(A_i) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_0^1 f_{ij}^B(x, y; \zeta) M(B_{ij}(\zeta)) d\zeta \quad (2.4)$$

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \sum_{i=1}^4 f_i^{A, \infty}(x, y) w(A_i) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_0^1 f_{ij}^B(x, y; \zeta) w(B_{ij}(\zeta)) d\zeta + \quad (2.5)$$

$$+ \sum_{i=1}^4 g_i^{A, \infty}(x, y) M(A_i) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_0^1 g_{ij}^B(x, y; \zeta) M(B_{ij}(\zeta)) d\zeta$$

Причем полнота представлений (2.4), (2.5) непосредственно следует из полноты граничного представления (1.7), поскольку каждой граничной точке соответствует отвечающее ей свое частное решение.

Полагая в (2.1), (2.2) и (2.4), (2.5) точку $(x, y) \in \Gamma$, получим граничные операторные (интегральные) уравнения (тождества), имеющие структуру второго рода, что связано с устойчивостью численной реализации [28].

Внося слагаемые при значениях разрешающих функций в углах в (2.4), (2.5) под знак граничных интегралов по Γ путем их домножения на δ -функции, сосредоточенные в углах, получим граничные интегральные представления на основе граничных функций Грина с учетом углов

$$M(x, y) = M_0(x, y) + \int_{\Gamma} G_{\Gamma}(x, y; Q \in \Gamma) M(Q \in \Gamma) d\Gamma_Q \quad (2.6)$$

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \int_{\Gamma} G_{\Gamma}(x, y; Q \in \Gamma) w(Q \in \Gamma) d\Gamma_Q + \\ + \int_{\Gamma} H_{\Gamma}(x, y; Q \in \Gamma) M(Q \in \Gamma) d\Gamma_Q \quad (2.7)$$

Здесь граничные функции Грина G_{Γ} и H_{Γ} определяются краевыми задачами

$$\nabla^2 G_{\Gamma} = 0, \quad G_{\Gamma}(P; Q) = \delta(1P - Q1) \quad (P, Q \in \Gamma) \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 H_{\Gamma} = 0, \quad H_{\Gamma}|_{\Gamma} = 0, \quad \nabla^2 H_{\Gamma}(P; Q) = \delta(1P - Q1) \quad (P, Q \in \Gamma) \quad (2.9)$$

Явный вид G_{Γ} и H_{Γ} непосредственно следует из (2.4), (2.5).

Заметим, однако, что здесь достаточно ограничиться полученными операторными представлениями, выражающими общее решение определяющих уравнений, которые в форме (2.1), (2.2) и используются при численной реализации.

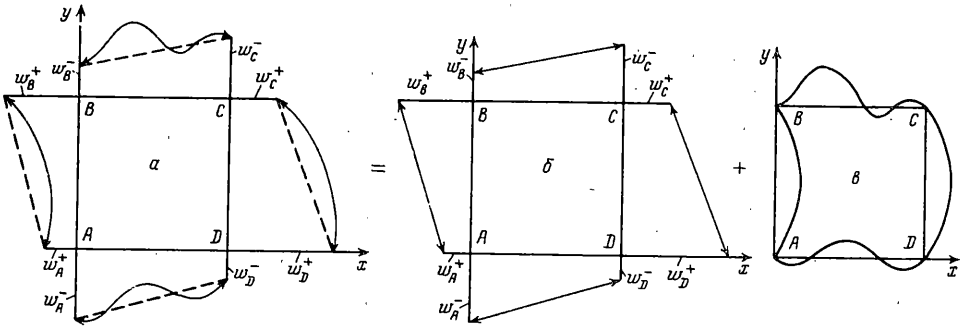
3. Требование непрерывности граничных функций в углах может быть стеснительным для приложений (например, при смешанных граничных условиях на смежных сторонах). Поэтому ослабим его, предположив возможность наличия разрывов первого рода в углах, где будут определены (в смысле предельных значений) уже по два значения: M_P^{\pm} , w_P^{\pm} ($P = A, B, C, D$) (фиг. 4, а).

Вдоль каждой из сторон прямоугольника соединим прямыми (на фиг. 4, а — штриховыми) линиями граничные значения в углах. Тогда, очевидно, искомое решение может быть представлено суперпозицией решений двух задач: задачи (б) с линейным (разрывным в углах) изменением граничных функций вдоль границы (фиг. 4, б) и задачи (в) с граничными функциями, обращающимися в нуль в угловых точках (фиг. 4, в). Поскольку задача (в) уже решена, остается решить лишь задачу (б), решение которой, заметим, строится один раз и навсегда.

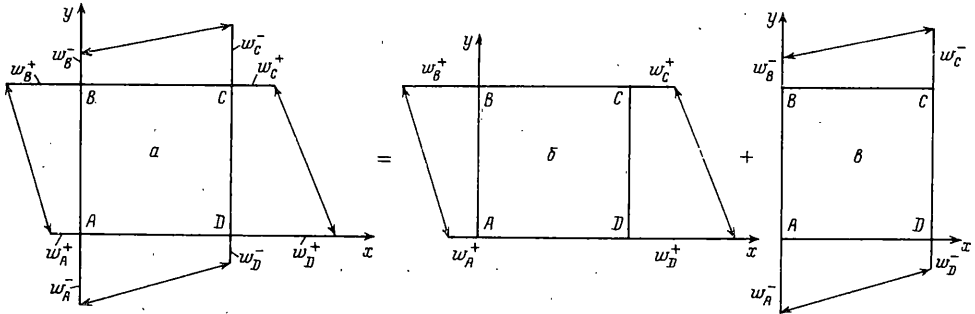
Используя принцип суперпозиции, в свою очередь, разобьем задачу (б) (фиг. 5, а) на две задачи с граничными условиями согласно фиг. 5, б и фиг. 5, в. Для решения каждой из задач аналогично предыдущему используем метод прямых (с дискретизацией в направлениях задания граничных неоднородностей) в сочетании с конечными (дискретными) рядами Фурье. В результате получим решение задачи (б) (фиг. 5, а) в явном аналитическом виде

$$M_1(x, y) = M_A^+ \sum_{s=1}^{n_5} \chi_{1s}(x) b_s \sin(\pi s y) + \\ + M_A^- \sum_{s=1}^{n_5} \chi_{1s}(y) b_s \sin(\pi s x) + M_B^+ \sum_{s=1}^{n_5} \chi_{1s}(x) (-1)^{s+1} b_s \sin(\pi s y) + \\ + M_B^- \sum_{s=1}^{n_5} \chi_{2s}(y) b_s \sin(\pi s x) + M_C^+ \sum_{s=1}^{n_5} \chi_{2s}(x) (-1)^{s+1} b_s \sin(\pi s y) + \\ + M_C^- \sum_{s=1}^{n_5} \chi_{2s}(y) (-1)^{s+1} b_s \sin(\pi s x) + M_D^+ \sum_{s=1}^{n_5} \chi_{2s}(x) b_s \sin(\pi s y) + \\ + M_D^- \sum_{s=1}^{n_5} \chi_{1s}(y) (-1)^{s+1} b_s \sin(\pi s x) \quad (3.1)$$

$$w_1(x, y) = w_A^+ \sum_{s=1}^{n_5} \chi_{1s}(x) b_s \sin(\pi s y) + w_A^- \sum_{s=1}^{n_5} \chi_{1s}(y) b_s \sin(\pi s x) +$$



Фиг. 4



Фиг. 5

$$\begin{aligned}
 & + w_B^+ \sum_{s=1}^{n_s} \chi_{1s}(x) (-1)^{s+1} b_s \sin(\pi s y) + w_B^- \sum_{s=1}^{n_s} \chi_{2s}(y) b_s \sin(\pi s x) + \\
 & + w_C^+ \sum_{s=1}^{n_s} \chi_{2s}(x) (-1)^{s+1} b_s \sin(\pi s y) + w_C^- \sum_{s=1}^{n_s} \chi_{2s}(y) (-1)^{s+1} b_s \sin(\pi s x) + \\
 & + w_D^+ \sum_{s=1}^{n_s} \chi_{2s}(x) b_s \sin(\pi s y) + w_D^- \sum_{s=1}^{n_s} \chi_{1s}(y) (-1)^{s+1} b_s \sin(\pi s x) + \\
 & + M_A^+ \sum_{s=1}^{n_s} \psi_{1s}(x) b_s \sin(\pi s y) + M_A^- \sum_{s=1}^{n_s} \psi_{1s}(y) \kappa^{-2} b_s \sin(\pi s x) + \\
 & + M_B^+ \sum_{s=1}^{n_s} \psi_{1s}(x) (-1)^{s+1} b_s \sin(\pi s y) + M_B^- \sum_{s=1}^{n_s} \psi_{2s}(y) \kappa^{-2} b_s \sin(\pi s x) + \\
 & + M_C^+ \sum_{s=1}^{n_s} \psi_{2s}(x) (-1)^{s+1} b_s \sin(\pi s y) + M_C^- \sum_{s=1}^{n_s} \psi_{2s}(y) \kappa^{-2} (-1)^{s+1} b_s \sin(\pi s x) + \\
 & + M_D^+ \sum_{s=1}^{n_s} \psi_{2s}(x) b_s \sin(\pi s y) + M_D^- \sum_{s=1}^{n_s} \psi_{1s}(y) \kappa^{-2} (-1)^{s+1} b_s \sin(\pi s x)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$b_s = 2/\gamma_s \cos(\pi s/(2(n_s + 1))), \quad \gamma_s = 2(n_s + 1) \sin(\pi s/(2(n_s + 1))) \tag{3.3}$$

где n_s — число граничных узлов вдоль каждой из сторон пластины (исключая углы).

Решения (3.1) и (3.2) в граничных узловых точках — в силу свойств конечных (дискретных) рядов Фурье [27] — в точности совпадают со значениями линейных функций (фиг. 5, а), а их разностные производные [24] (вдоль сторон пластины) тождественно равны нулю.

Таблица 1

N_i	N_1		N_2		N_3		N_4	N_5
Q	243	3267	882	1922	64	256	—	—
Q_0	147	2883	722	1682	0	0	—	—
$w_C^0 \cdot 10^3$	1,19	1,28	1,29	1,26	1,23	1,26	1,27	1,26
$M_{xc}^0 \cdot 10^2$	2,24	2,29	2,30	2,31	2,26	2,29	2,29	2,31
$-M_{xA}^0 \cdot 10^2$	4,37	5,17	5,04	5,12	5,09	5,13	5,22	5,13

Таблица 2

m	n	7	15	31	63	127	255
1	$w_C^0 \cdot 10^3$	2,70	2,80	2,85	2,88	2,89	2,90
	$M_{xc}^0 \cdot 10^2$	3,74	3,83	3,87	3,89	3,90	3,91
	$M_{yc}^0 \cdot 10^2$	3,48	3,58	3,64	3,67	3,68	3,69
2	$w_C^0 \cdot 10^3$	2,18	2,32	2,38	2,42	2,44	2,44
	$M_{xc}^0 \cdot 10^2$	3,18	3,30	3,36	3,38	3,40	3,41
	$M_{yc}^0 \cdot 10^2$	3,18	3,30	3,36	3,38	3,40	3,41
3	$w_C^0 \cdot 10^3$	1,23	1,27	1,29	1,29	1,29	1,29
	$M_{xc}^0 \cdot 10^2$	2,26	2,29	2,30	2,30	2,30	2,30
	$M_{yc}^0 \cdot 10^2$	2,26	2,29	2,30	2,30	2,30	2,30
	$-M_{xA}^0 \cdot 10^2$	5,13	5,21	5,24	5,25	5,26	5,26
	$-M_{yA}^0 \cdot 10^2$	1,54	1,56	1,57	1,58	1,58	1,58
	$ w_A^0 $	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}
	$ w_A^0 $	10^{-14}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}

Замстим, что, поскольку при приближенном (дискретном) подходе значения в углах всегда конечны, то полученные решения (3.1)—(3.2) описывают самый общий случай разрывов в углах (в том числе и разрывов второго рода, которые приближенно описываются последовательностью разрывов первого рода при нарастании значений n_s).

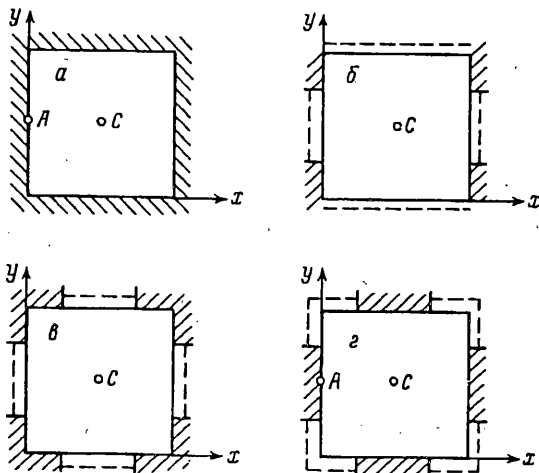
В предельном случае $n_s \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n_s \rightarrow \infty} b_s = \frac{2}{\pi s}, \quad \lim_{n_s \rightarrow \infty} \gamma_s = \pi s \quad (3.4)$$

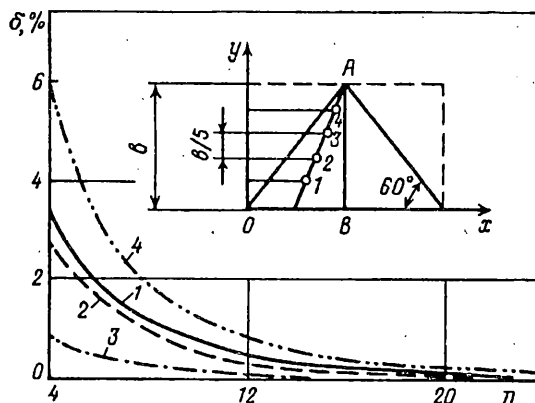
и конечные суммарные представления (3.1) и (3.2) перейдут в бесконечные ряды, точно удовлетворяющие определяющим уравнениям.

4. В качестве иллюстрирующих примеров рассмотрим сначала изгиб квадратных ($\kappa = 1$) частично свободно опертых — частично защемленных пластин (фиг. 6) от действия равномерного поперечного давления q_0 .

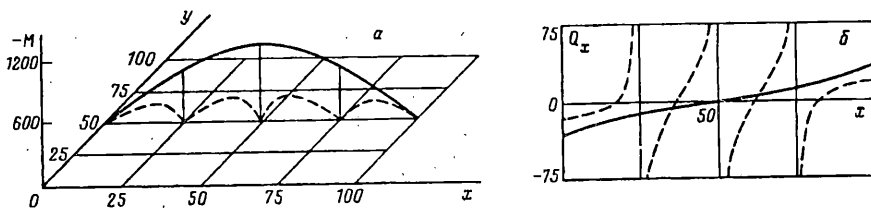
В табл. 1 проведено сопоставление результатов расчета защемленной пластины (фиг. 6, а), полученных различными методами (N_i). N_1 — соответствует расчету методом конечных элементов (МКЭ) [29], N_2 — методом конечных разностей (МКР) [30], N_3 — методом блоков в коллокационном варианте согласно изложенной выше методике, N_4 — методом граничных элементов (МГЭ) [31] и N_5 — методом Тимошенко [22]. Здесь приведены значения безразмерного прогиба в центре пластины C $w_C^0 = w_C / (q_0 a^4 / D)$ и безразмерных изгибающих моментов



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

$M_x^0 = M_x / (q_0 a^2)$ в центре и на контуре в зависимости от общего числа степеней свободы Q и числа степеней свободы внутренних узлов Q_0 . Сопоставление результатов показывает эффективность полученного выше решения, которое при сравнительно небольшом числе степеней свободы Q обеспечивает высокую точность расчета без введения внутренних узлов ($Q_0 = 0$) и кроме того на контуре пластины, где имеют место наибольшие напряжения, дает результаты наиболее близкие к точному значению [22].

Табл. 2 отражает сходимость решения частично-защемленных пластин согласно фигурам 6, б ($m=1$), в, в ($m=2$) и б, г ($m=3$), где защемленные участки отмечены штриховкой, а свободно опертые — штриховыми линиями, в зависимости от числа граничных узлов n вдоль каждой из сторон пластины. Для задачи

($m = 1$) известно решение, полученное методом парных уравнений [32]: $w_c^0 \cdot 10^3 = 2,9$; $M_{xc}^0 \cdot 10^2 = 4,04$; $M_{yc}^0 \cdot 10^2 = 3,69$.

Для частично-защемленной пластины фиг. 6, z ($m = 3$) приведены также абсолютные значения максимальных прогибов W_A^0 и углов поворота θ_A^0 , являющиеся невязками разрешающей системы линейных алгебраических уравнений. Видно, что невязки малы по абсолютной величине и практически не возрастают с ростом числа граничных узлов в широком диапазоне изменения n , что свидетельствует о хорошей обусловленности системы линейных алгебраических уравнений. В целом имеет место достаточно быстрая сходимость как в центральной точке, так и на границе области, причем с ростом n решение каждый раз монотонно уточняется, что позволяет производить расчеты с, практически, любой степенью точности.

На фиг. 7 приведено изменение относительной погрешности по моментам $\delta\% = |(M_x^y - M_x)/M_x^y| \cdot 100\%$ (M_x^y — точное решение [22]) в зависимости от числа граничных узлов n для четырех точек, расположенных вдоль биссектриссы угла OAB свободно опертой равносторонней треугольной пластины. Приближенное решение здесь получилось в результате «погружения» треугольной пластины в прямоугольную (смежные стороны которой отмечены штриховыми линиями) с использованием сформированных общих решений. Здесь также наблюдается достаточно быстрая сходимость (о расчете непрямоугольных пластин см. [33]).

И наконец, рассмотрим составную пластинчатую конструкцию, набранную из 16 квадратных блоков (фиг. 8), находящуюся под действием равномерного поперечного давления q_0 при свободном опирании вдоль внешней границы. На фиг. 8 приведены графики изменения функций моментов M (фиг. 8, а) и перерезывающих сил Q_x (фиг. 8, б) вдоль сечения $y = 50$. Решение для каждого блока находилось по двум методикам: с учетом угловых точек и полным набором базисных функций (1.37), (1.38) (сплошные линии) и без учета угловых точек на основе классических решений, обращающихся в нуль в углах для каждого блока (штриховые линии). Как видно из фигур, в последнем случае конструкция из блоков «развалилась», приведя к неадекватному решению для функции моментов и разрывам первого рода (аппроксимирующим действительные разрывы второго рода) в углах для перерезывающих сил. В случае же учета угловых точек полученное решение совпало с точным [22].

Из приведенных результатов следует, что учет угловых точек и соответствующих им частных решений при коллокационном варианте реализации метода блоков имеет принципиальное значение. Кроме того, подчеркнем, что разрешающая матрица системы содержит много нулевых элементов и имеет блочную структуру.

Отметим, что вычисления производились с использованием метода V -обозначений [27], позволившего улучшить экономичность численной реализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jirousek J., Diaye M. N. Solution of orthotropic plates based on p-vestension of the hybrid — Trefftz finite element model//Comput. and Struct. 1990. V. 34, No. 1. P. 51—62.
2. Победра Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности.— М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
3. Woo Kwang S., Basu P. K. Analysis of singular cylindrical shells by p — version FEM//Int. J. Solids and Struct. 1989. V. 25, No. 2. P. 151—165.
4. Krahula J. L., Polhemus J. E. Use of Fourier series in the finite element method//AIAA Journal.— 1968. V. 6, N 4. P. 210—211.
5. Ильюшин А. А. Загадки механики твердых деформируемых тел//Нерешенные проблемы механики и прикладной математики.— М.: Изд-во МГУ, 1977. С. 68—73.
6. Горшков А. Г., Колесников И. Ю. Граничный оператор Грина и функции формы для канонического блока в пространственной задаче несвязанной термоупругости//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 14—21.

7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Л. М.: Гостехиздат, 1949. 696 с.
8. Гринберг Г. А. Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных//Изв. АН СССР, Серия физическая. 1946. Т. 10, № 2. С. 141—168.
9. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений.— М. Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 728 с.
10. Вопросы математической физики/Сборник к 75-летию член.-корр. АН СССР Г. А. Гринберга. АН СССР. Физ.-техн. ин-т им. А. Ф. Иоффе. Л.: Наука, 1976. 300 с.
11. Stokes G. G. Mathematical and physical papers. V. 1. Cambridge: University press, 1880. 328 p.
12. Колесников И. Ю. Применение модульного подхода к расчету пластин//Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 136—141.
13. Колесников И. Ю. Приближенное построение функций влияния для многослойных пластин с произвольными граничными условиями//Прикл. механика. 1985. Т. 21, № 3. С. 87—92.
14. Горшков А. Г., Колесников И. Ю. Построение операторов граничного влияния для несвязанной динамической задачи термоупругости в прямоугольном параллелепипеде//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 94—100.
15. Горшков А. Г., Колесников И. Ю. Формирование общих решений в форме функций граничного влияния для статической задачи теории упругости в прямоугольном параллелепипеде//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 67—74.
16. Горшков А. Г., Колесников И. Ю. Об одной методике приближенного решения задач колебаний пластин//Прикл. механика. 1985. Т. 21, № 2. С. 86—91.
17. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир. 1984. 494 с.
18. Wang K., Huang Yi. The general solutions of thick rectangular plates with two adjacent free edges//Acta mech. solida. sin. 1987. V. 19, № 2. P. 186—192.
19. Zhu Y., Fu B. Further research on the bending of the cantilever rectangular plates under a concentrated load//Appl. Math. and Mech. 1986. V. 7, N 10. P. 917—928.
20. Lin X., Yuan W. Solution of bending of cantilever rectangular plates under uniform surface — load by the method of two — direction trigonometric series//Appl. Math. and Mech. 1985. V. 6, N 8. P. 735—744.
21. Huang Y. A general solution of rectangular thin plates in bending//Appl. Math. and Mech. 1987. V. 8, N 8. P. 725—732.
22. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
23. Слободянский М. Г. Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости//ПММ. 1939. Т. 3., Вып. 1. С. 75—81.
24. Колесников И. Ю. К расчету трехслойных пластин со смешанными граничными условиями с помощью рядов Фурье//Прикл. механика. 1981. Т. 17, № 7. С. 94—100.
25. Колесников И. Ю. Метод конечных рядов Фурье и его применение к расчету трехслойных пластин со сложными граничными условиями//Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 1. С. 169—175.
26. Зенкевич О. Применение метода конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
27. Хемминг Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1972. 398 с.
28. Годунов С. К., Рябенкий В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
29. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение. 1974. 343 с.
30. Bhattacharya M. C. Static and dynamic deflections of plates of arbitrary geometry by a new finite difference approach//J. of Sound and Vibr. 1986. V. 107, N 3. P. 507—521.
31. Du Q. H., Lu X. L. Some further works for the kirchhoff plate bending problems by highly conforming boundary element method//Boundary elem. 8. Proc. 8th Int. Conf., Tokyo, Sept., 1986. Vol. 1. Berlin e. a., 1986. P. 475—485.
32. Цейтлин А. И., Гликман Б. Т. Изгиб упругой прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями//Тр. ЦНИИ строит. конструкций. 1971. Вып. 17. С. 123—143.
33. Колесников И. Ю. Расчет косоугольных пластин методом прямых//Изв. ВУЗов. Машиностроение. 1982. № 9. С. 37—41.