МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1993

УДК 539.3:01

© 1993 г. Д. Я. БАРДЗОКАС, Б. А. КУДРЯВЦЕВ, О. Б. РУДАКОВА

К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Предлагается метод решения тройных интегральных уравнений, а также систем интегральных уравнений, к которым сводится решение смешанных краевых задач для плоского слоя, имеющего на одной из границ произвольное конечное число (более трех) участков с различными типами граничных условий. Рассматриваются тройные интегральные уравнения и обобщающие их системы интегральных уравнений, возникающие при использовании косинус-преобразования Фурье в решении смешанных краевых задач для плоского слоя.

1. Рассмотрим задачу определения гармонической функции $u(x, y)$ в области $-\infty < x < \infty$, $0 < y < h$ (см. фигуру) при следующих условиях на границе

$$u(x, h) = 0 \tag{1.1}$$

$$u(x, 0) = 0,\ 0 < x < a_1,\ b_i < x < a_{i+1},\ x > b_N \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1) \tag{1.2}$$

$$\partial u(x, y)/\partial y \big|_{y=0} = -f_i(x),\ a_i < x < b_i\ (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.3}$$

Здесь предполагается, что функция $u(x, y)$ является четной функцией по x и при $y=0$ существует конечное число $2N$ симметричных относительно оси OY интервалов, на которых заданы условия второго рода (1.3) с известными значениями $f_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, N$. Кроме того, будем считать, что $u(x, y) \to 0$ при $|x| \to \infty$.

Типичной краевой задачей с условиями вида (1.1)—(1.3) является задача стационарной теплопроводности в области $|x| < \infty$, $0 < y < h$ с нулевой температурой на границе слоя всюду кроме участков $a_i < x < b_i$ $(i=1, 2, \ldots, N)$, $y=0$, на которых задан тепловой поток.

Используя косинус-преобразование Фурье по переменной x, можно представить гармоническую функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условию (1.1), в виде

$$u(x, y) = \int_0^\infty A(\xi) \frac{\operatorname{sh}(\xi(h-y))}{\operatorname{sh} \xi h} \cos \xi x d\xi \tag{1.4}$$

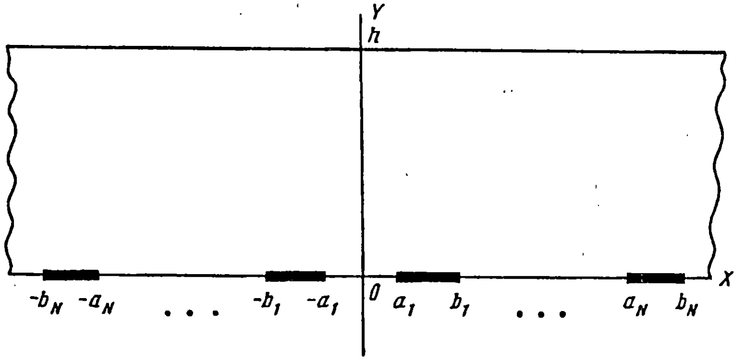
Тогда смешанные условия (1.2), (1.3) приводят к системе интегральных уравнений для определения $A(\xi)$:

$$\int_0^\infty (\xi + F(\xi)) A(\xi) \cos \xi x d\xi = f_i(x),\ a_i < x < b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.5}$$

$$\int_0^\infty A(\xi) \cos \xi x d\xi = 0,\ 0 < x < a_1,\ b_i < x < a_{i+1},\ x > b_N \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1) \tag{1.6}$$

$$F(\xi) = \xi e^{-\xi h}/\operatorname{sh} \xi h$$

Следует отметить, что при $N=1$ уравнения (1.5), (1.6) называются тройными интегральными уравнениями, решение которых исследовалось в работах ряда



авторов [1, 2, 3]. Если $N > 1$, то уравнения (1.5), (1.6) можно назвать N-кратными интегральными уравнениями. Очевидно также, что к решению N-кратных интегральных уравнений сводится не только указанная выше задача теплопроводности, но и ряд смешанных краевых задач теории упругости и электростатики.

Переходя к решению N-кратных интегральных уравнений (1.5), (1.6), определим значение интеграла в левой части (1.6) при $a_i < x < b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N$). Так

$$\int_0^\infty A(\xi)\cos\xi x d\xi = ((b_i - x)(x - a_i))^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n^{(i)}}{n+1}U_n\left(2\frac{x-a_i}{b_i-a_i}-1\right) \tag{1.7}$$

Здесь $U_n(z)$ — полиномы Чебышева второго рода, $c_n^{(i)}$ — коэффициенты, подлежащие определению.

На основании (1.6), (1.7) и формулы обращения преобразования Фурье находим

$$A(\xi) = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n^{(i)}}{(n+1)}\int_{a_i}^{b_i}\sqrt{(b_i-x)(x-a_i)}\,U_n\left(2\frac{x-a_i}{b_i-a_i}-1\right)\cos\xi x dx \tag{1.8}$$

Интегралы в (1.8) преобразуем с помощью переменной x_1, связанной с x равенством

$$x = \left(\frac{b_i - a_i}{2}\right)x_1 + \left(\frac{b_i + a_i}{2}\right), \quad -1 \le x_1 \le 1$$

Тогда

$$\int_{a_i}^{b_i}\sqrt{(b_i-x)(x-a_i)}\,U_n\left(2\frac{x-a_i}{b_i-a_i}-1\right)\cos\xi x dx =$$

$$= \left(\frac{b_i-a_i}{2}\right)^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x_1^2}\,U_n(x_1)\cos\left(\xi\frac{b_i-a_i}{2}x_1 + \xi\frac{b_i+a_i}{2}\right)dx_1 = \tag{1.9}$$

$$= \left(\frac{b_i-a_i}{2}\right)^2\left[\cos\left(\xi\frac{b_i+a_i}{2}\right)\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x_1^2}\,U_n(x_1)\cos\left(\xi\frac{b_i-a_i}{2}x_1\right)dx_1 -\right.$$

$$\left.-\sin\left(\xi\frac{b_i+a_i}{2}\right)\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x_1^2}\,U_n(x_1)\sin\left(\xi\frac{b_i-a_i}{2}x_1\right)dx_1\right]$$

С учетом значений интегралов [4]:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x_1^2}\, U_n(x_1) \cos\left(\xi \frac{b_i - a_i}{2} x_1\right) dx_1 = \tag{1.10}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 + (-1)^n\right) \frac{(n+1)}{\xi\left(\frac{b_i - a_i}{2}\right)} J_{n+1}\left(\xi \frac{b_i - a_i}{2}\right)$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x_1^2}\, U_n(x_1) \sin\left(\xi \frac{b_i - a_i}{2} x_1\right) dx_1 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - (-1)^n\right) (-1)^{1/2(n-1)} \frac{(n+1)}{\xi\left(\frac{b_i - a_i}{2}\right)} J_{n+1}\left(\xi \frac{b_i - a_i}{2}\right)$$ ($J_{n+1}(z)$ — функции Бесселя)

находим

$$A(\xi) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{b_i - a_i}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(i)} R_n\left(\xi \frac{b_i + a_i}{2}\right) \frac{1}{\xi} J_{n+1}\left(\xi \frac{b_i - a_i}{2}\right) \tag{1.11}$$

$$R_n\left(\xi \frac{b_i + a_i}{2}\right) = \left(1 + (-1)^n\right)(-1)^{1/2n} \cos\left(\xi \frac{b_i + a_i}{2}\right) - \left(1 - (-1)^n\right)(-1)^{1/2(n-1)} \times$$

$$\times \sin\left(\xi \frac{b_i + a_i}{2}\right) \tag{1.12}$$

то есть

$$R_{2n}\left(\xi \frac{b_i + a_i}{2}\right) = 2(-1)^n \cos\left(\xi \frac{b_i + a_i}{2}\right) \tag{1.13}$$

$$R_{2n+1}\left(\xi \frac{b_i + a_i}{2}\right) = 2(-1)^{n+1} \sin\left(\xi \frac{b_i + a_i}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Заметим также, что с помощью интегралов (1.10) можно получить следующее разложение функции $\cos \xi x$ при $a_j < x < b_j$ ($j = 1, 2, \ldots, N$):

$$\cos \xi x = \frac{1}{\xi (b_j - a_j)/2} \sum_{k=0}^{\infty} R_k\left(\xi \frac{b_j + a_j}{2}\right) (k+1) J_{k+1}\left(\xi \frac{b_j - a_j}{2}\right) U_k(x_1) \quad (-1 \le x_1 \le 1) \tag{1.14}$$

Подставим теперь выражение (1.11) в (1.5) и воспользуемся разложением (1.14), предполагая при этом, что функции $f_i(x)$ представимы в виде рядов

$$f_i'(x_1) = f\left(\frac{b_i - a_i}{2} x_1 + \frac{b_i + a_i}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(i)} U_k(x_1) \tag{1.15}$$

$$f_k^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x_1^2}\, U_k(x_1) f_i'(x_1)\, dx_1 \tag{1.16}$$

В результате получим из (1.5) бесконечную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов $c_n^{(i)}$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(i)} \Omega_{nk}^{(ij)} = f_k^{(j)}/(k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots; \ j = 1, 2, \dots, N) \tag{1.17}$$

$$\Omega_{nk}^{(ij)} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\xi} + \frac{F(\xi)}{\xi^2} \right) R_n \left(\xi \frac{b_i + a_i}{2} \right) R_k \left(\xi \frac{b_j + a_j}{2} \right) J_{k+1} \left(\xi \frac{b_j - a_j}{2} \right) \times$$
$$\times J_{n+1} \left(\xi \frac{b_i - a_i}{2} \right) d\xi \tag{1.18}$$

В дальнейшем используем представления для коэффициентов $\Omega_{nk}^{(ij)}$ в виде

$$\Omega_{nk}^{(ij)} = \omega_{nk}^{(ij)} + \overset{\vee}{\Omega}{}_{nk}^{(ij)} \tag{1.19}$$

$$\omega_{nk}^{(ij)} = \int_0^\infty \frac{1}{\xi} R_n \left(\xi \frac{b_i + a_i}{2} \right) R_k \left(\xi \frac{b_j + a_j}{2} \right) J_{k+1} \left(\xi \frac{b_j - a_j}{2} \right) J_{n+1} \left(\xi \frac{b_i - a_i}{2} \right) d\xi \tag{1.20}$$

$$\overset{\vee}{\Omega}{}_{nk}^{(ij)} = \int_0^\infty \frac{F(\xi)}{\xi^2} R_n \left(\xi \frac{b_i + a_i}{2} \right) R_k \left(\xi \frac{b_j + a_j}{2} \right) J_{k+1} \left(\xi \frac{b_j - a_j}{2} \right) J_{n+1} \left(\xi \frac{b_i - a_i}{2} \right) d\xi \tag{1.21}$$

$(i, j = 1, 2, \dots, N)$, $(n, k = 0, 1, 2, \dots)$

2. В частном случае при $N = 1$ бесконечная система (1.17) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Omega_{nk} = f_k/(k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{2.1}$$

причем коэффициенты Ω_{nk} определяются по формулам

$$\Omega_{nk} = \omega_{nk} + \overset{\vee}{\Omega}_{nk} \tag{2.2}$$

$$\omega_{nk} = \int_0^\infty \frac{1}{\xi} R_n \left(\xi \frac{b+a}{2} \right) R_k \left(\xi \frac{b+a}{2} \right) J_{k+1} \left(\xi \frac{b-a}{2} \right) J_{n+1} \left(\xi \frac{b-a}{2} \right) d\xi \tag{2.3}$$

$$\overset{\vee}{\Omega}_{nk} = \int_0^\infty \frac{F(\xi)}{\xi^2} R_n \left(\xi \frac{b+a}{2} \right) R_k \left(\xi \frac{b+a}{2} \right) J_{k+1} \left(\xi \frac{b-a}{2} \right) J_{n+1} \left(\xi \frac{b-a}{2} \right) d\xi \tag{2.4}$$

и, кроме того, используются обозначения

$$c_n^{(1)} = c_n, \ b_1 = b, \ a_1 = a, \ f_k^{(1)} = f_k \tag{2.5}$$

Переходя к преобразованию интегралов (2.3), запишем выражения для коэффициентов ω_{nk} в виде

$$\omega_{2n,2k} = 4(-1)^{n+k} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} J_{2n+1}(\eta) J_{2k+1}(\eta) \cos^2(\eta/\alpha)\, d\eta$$

$$\omega_{2n+1,2k+1} = 4(-1)^{n+k} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} J_{2n+2}(\eta) J_{2k+2}(\eta) \sin^2(\eta/\alpha)\, d\eta \tag{2.6}$$

$$\omega_{2n+1,2k} = 2(-1)^{n+k+1} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} J_{2n+2}(\eta) J_{2k+2}(\eta) \sin(2\eta/\alpha)\, d\eta$$

где $\alpha = (b - a)/(b + a)$, $(n, k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Если теперь использовать формулу Неймана [5]:

$$J_\nu(\eta) J_\mu(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{\mu+\nu}(2\eta \cos\theta) \cos[(\mu - \nu)\theta]\, d\theta \tag{2.7}$$

и значения интегралов

$$\begin{gathered} \int_0^\infty J_\mu(\eta) J_\nu(\eta) \frac{d\eta}{\eta} = \frac{\sin((\nu - \mu)\pi/2)}{(\nu - \mu)\pi(\nu + \mu)/2}, \quad \nu + \mu > 0 \\ \int_0^\infty J_\mu(a\eta) \cos b\eta \frac{d\eta}{\eta} = \frac{a^\mu}{\mu} \frac{\cos(\pi\mu/2)}{(b + \sqrt{b^2 - a^2})^\mu}, \quad b > a \end{gathered} \tag{2.8}$$

то на основании (2.6) получим после некоторых преобразований следующее выражение для коэффициентов ω_{nk}:

$$\omega_{nk} = \frac{\delta_{nk}}{k+1} - \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{n+k} \alpha^{n+k+2}}{(n+k+2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos[(n-k)\theta](\cos\theta)^{n+k+2} d\theta}{(1 + \sqrt{1 - \alpha^2 \cos^2\theta})^{n+k+2}} \tag{2.9}$$

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}, \quad (n, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

С учетом (2.9) бесконечную систему (2.1) запишем так

$$c_k + \sum_{n=0}^\infty c_n (\omega_{nk}^\vee + (k+1)\Omega_{nk}^\vee) = f_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.10}$$

$$\omega_{nk}^\vee = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{n+k+1} \alpha^{n+k+2} (k+1)}{(n+k+2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos[(n-k)\theta](\cos\theta)^{n+k+2} d\theta}{(1 + \sqrt{1 - \alpha^2 \cos^2\theta})^{n+k+2}} \tag{2.11}$$

Для исследования на регулярность бесконечной системы (2.10) произведем оценку суммы

$$S_k^{(1)} = \sum_{n=0}^\infty |\omega_{nk}^\vee| \tag{2.12}$$

С помощью формулы (2.11) можно показать, что

$$|\omega_{nk}^\vee| < \alpha^{k+2}(k+1) \frac{\alpha^n}{(n+k+2)} \tag{2.13}$$

и, следовательно,

$$S_k^{(1)} < \alpha^{k+2}(k+1)\, \Phi(\alpha, 1, k+2) \tag{2.14}$$

$$\Phi(\alpha, 1, k+2) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha^n}{(n+k+2)} \quad (0 < \alpha < 1) \tag{2.15}$$

Так как при $k \to \infty$ имеет место асимптотическая формула [6]:

$$\Phi(\alpha, 1, k+2) \backsim \frac{1}{2(k+2)} \tag{2.16}$$

то на основании (2.14), (2.16) получим оценку

$$S_k^{(1)} = O(\alpha^{k+2}), \quad k \to \infty \tag{2.17}$$

Переходя к оценке суммы

$$S_k^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} |\Omega_{kn}^{\nu}| \, (k+1) \tag{2.18}$$

введем в рассмотрение функцию двух переменных x, y ($a < x, y < b$)

$$\Psi(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^2} \left[\sin \xi x - J_0 \left(\xi \frac{b-a}{2} \right) \sin \left(\xi \frac{b+a}{2} \right) \right] \times$$
$$\times \left[\sin \xi y - J_0 \left(\xi \frac{b-a}{2} \right) \sin \left(\xi \frac{b+a}{2} \right) \right] d\xi \tag{2.19}$$

Если теперь воспользоваться разложением, аналогичным (1.14):

$$\sin \xi x - J_0 \left(\xi \frac{b-a}{2} \right) \sin \left(\xi \frac{b+a}{2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} J_{k+1} \left(\xi \frac{b-a}{2} \right) R_k \left(\xi \frac{b+a}{2} \right) T_{k+1}(x_1) \tag{2.20}$$

где $T_{k+1}(x_1)$ — полиномы Чебышева 1-го рода и

$$x = \left(\frac{b-a}{2} \right) x_1 + \left(\frac{b+a}{2} \right) \quad (-1 \le x_1 \le 1)$$

то можно показать, что функция

$$\overline{\Psi}(x_1, y_1) = \Psi \left(\frac{b-a}{2} x_1 + \frac{b+a}{2}, \; \frac{b-a}{2} y_1 + \frac{b+a}{2} \right)$$

представима в виде двойного ряда

$$\overline{\Psi}(x_1, y_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Omega_{kn}^{\nu} T_{k+1}(x_1) T_{n+1}(y_1) \tag{2.21}$$

причем коэффициенты этого ряда определяются по известным формулам Фурье

$$\Omega_{kn}^{\nu} = \frac{4}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \overline{\Psi}(x_1, y_1) \frac{T_{k+1}(x_1) T_{n+1}(y_1)}{\sqrt{1 - x_1^2} \sqrt{1 - y_1^2}} dx_1 dy_1 \tag{2.22}$$

Применив формулу интегрирования по частям в (2.22), получим следующие выражения для коэффициентов Ω_{kn}^{ν}:

$$\Omega_{kn}^{\nu} = \frac{1}{(n+1)(k+1)} P_{kn} \tag{2.23}$$

$$P_{kn} = \frac{4}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial x_1 \partial y_1} \sqrt{1 - x_1^2} \sqrt{1 - y_1^2} \, U_k(x_1) U_k(y_1) \, dx_1 dy_1 \tag{2.24}$$

На основании представления (2.23) и неравенства Коши — Буняковского будем иметь

$$S_k^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} |P_{kn}| \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |P_{kn}|^2 \right)^{1/2} = \frac{\pi}{6} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |P_{kn}|^2 \right)^{1/2} \tag{2.25}$$

Так как P_{kn} являются коэффициентами Фурье для квадратично суммируемой в области $-1 \le x_1, y_1 \le 1$ функции

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial y_1} = \int_0^{\infty} F(\xi) \cos \left(\xi \left(\frac{b-a}{2} x_1 + \frac{b+a}{2} \right) \right) \cos \left(\xi \left(\frac{b-a}{2} y_1 + \frac{b+a}{2} \right) \right) d\xi$$
$$(F(\xi) = \xi e^{-\xi h} / (sh \xi h)) \tag{2.26}$$

по полной ортогональной с весом системе полиномов Чебышева второго рода, то согласно неравенству Бесселя находим следующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |P_{kn}|^2 < \infty \tag{2.27}$$

который сходится и, следовательно, по крайней мере

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P_{kn}|^2 = O\left(\frac{1}{(k+1)^{1+\varepsilon}}\right) \text{ при } k \to \infty \ (\varepsilon > 0) \tag{2.28}$$

Таким образом, получим оценку

$$S_k^{(2)} = O\left(\frac{1}{(k+1)^{(1+\varepsilon)/2}}\right) \ (k \to \infty) \tag{2.29}$$

Соотношения (2.17) и (2.29) позволяют утверждать, что бесконечная система (2.10) квазивполне регулярна. Отметим, что аналогичный подход к доказательству последнего утверждения использовался в монографии [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валов Г. Н.* О действии кольцевых штампов на упругое полупространство//Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 1. С. 143—149.
2. *Cooke J.* Triple integral equations//Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1963. V. 16. No. 2. P. 193—200.
3. *Tranter C.* Some triple integral equations//Proc. Glasgow Math. Assoc. 1960. V. 4. No. 4. P. 200—203.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 343 с.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1986. 295 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 294 с.
7. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.I.1992