МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1993

УДК 539.376

 Ф. Г. АБДУЛЛА-ЗАДЕ

ОБ ОДНОМ ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ТЕЛ

Приводится вариационный принцип смешанного типа теории ползучести. По аналогии с вариационным принципом Сандерса, Мак-Комба, Шлехта [1], варьируемыми величинами являются скорости добавочных перемещений и напряжений. Данный принцип позволяет рассчитать тело с учетом начальных напряжений. В публикуемой работе этот принцип апробируется для расчета сжатого предварительно изогнутого стержня.

1. Под начальными напряжениями [2] подразумеваются те напряжения, которые возникают в теле в исходном состоянии, т. е. перед началом развития рассматриваемой деформации. В задаче с начальными напряжениями исходное состояние берется в качестве отсчетного. Обозначим компоненты начальных напряжений через σ_{0ij}.

Предположим, что эти напряжения возникают под действием начальных массовых сил с компонентами F_{0i} и начальных поверхностных сил с компонентами T_{0i}, приложенных на поверхности тела. Пусть эти начальные напряжения и силы составляют самоуравновешенную систему, т. е.

$$\sigma_{0ij,j} + F_{0i} = 0, \qquad x \in V$$

$$\sigma_{0ij} n_j = T_{0i}, \qquad x \in S \tag{1.1}$$

где V — объем тела, S — поверхность тела, n_i — компоненты вектора нормали, запятая означает дифференцирование по координате.

Краевая задача для тела с начальными напряжениями определяется заданием дополнительных массовых сил с компонентами F_i, дополнительными поверхностными силами с компонентами $\overline{T}_i$, действующими на части поверхности тела S_σ и заданием перемещений $\overline{u}_i$ на оставшейся части поверхности S_u. При этом перемещения отсчитываются от исходного состояния. Под действием вышерассмотренных сил в теле возникают добавочные напряжения, которые вместе с начальными σ_{0ij} составляют истинное напряжение $\sigma_{шij} = \sigma_{ij} + \sigma_{0ij}$.

Отметим, что массовая сила $F_{0i} + F_i$ вызывает в теле истинное напряжение. Из условия равновесия тела под действием приложенных сил, с учетом равенств (1.1) для добавочных напряжений получаем следующие уравнения [2]:

$$[\sigma_{ij}(\delta_{ik} + u_{k,i})]_{,j} + [\sigma_{0ij} u_{k,i}]_{,j} + F_k = 0, \quad x \in V$$

$$[\sigma_{ij}(\delta_{ik} + u_{k,i}) + \sigma_{0ij} u_{k,i}]\, n_j = T_k, \quad x \in S_\sigma \tag{1.2}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера, σ_{ij} — второй тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа в декартовой системе координат [2]. При написании этих равенств предполагалось, что задача геометрически нелинейная, т. е. соотношения между деформацией и перемещением имеют вид [3]:

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\,[u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}] \tag{1.3}$$

Очевидно, что для нахождения добавочных напряжений необходимо привести физические соотношения. Предположим, что в теле после приложения добавочных нагрузок развивается деформация ε^f_{ij} вида

$$\varepsilon^f_{ij} = \varepsilon^y_{ij} + \varepsilon^p_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}^p_{ij} = P_{ij}(\sigma_{ukl}) \tag{1.4}$$

где ε^y_{ij} — упругая деформация, ε^p_{ij} — деформация ползучести, точка означает дифференцирование по времени, P_{ij} — некоторая функция от значений истинного напряжения (зависимость P_{ij} от деформации и некоторых механических параметров не учитывается).

Таким образом, для нахождения перемещения и добавочного напряжения необходимо решить систему уравнений (1.2)—(1.4) со следующим граничным условием:

$$u_i = \overline{u}_i, \quad \in S_u \tag{1.5}$$

Для решения приведенной задачи воспользуемся вариационным методом [3]. Рассмотрим следующий функционал:

$$J = \int_V \{\dot{\sigma}_{ij}\tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})^{\cdot} - \tfrac{1}{2}\dot{\varepsilon}^y_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - P_{ij}\dot{\sigma}_{ij} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(\sigma_{ij} + \sigma_{0ij})\,\dot{u}_{k,i}\dot{u}_{k,j} - \dot{F}_i\dot{u}_i\}\,dv - \int_{s_\sigma} \dot{\overline{T}}_i\dot{u}_i\,ds - \int_{s_u} \dot{T}_i(\dot{u}_i - \dot{\overline{u}}_i)\,ds \tag{1.6}$$

где T_k — добавочные поверхностные усилия вида $T_k = [\sigma_{ij}(\delta_{ki} + u_{k,i}) + \sigma_{0ij}u_{k,i}]\,n_j$.

Независимыми варьируемыми величинами являются $\dot{\sigma}_{ij}$, $\dot{u}_{k,i}$. Отметим, что при $\sigma_{0ij} = 0$ функционал (1.6) полностью совпадает с функционалом Сандерса, Мак-Комба, Шлехта [1].

Найдем уравнения Эйлера функционала, считая, что оператор варьирования δ действует лишь на указанные величины, т. е. $\dot{u}_i$ и $\dot{\sigma}_{ij}$. Тогда первая вариация будет иметь вид

$$\delta J = \int_V \{\tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})^{\cdot}\delta\dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}(\delta\dot{u}_{i,j} + u_{k,i}\delta\dot{u}_{k,j}) -$$

$$- \tfrac{1}{2}\dot{\sigma}_{ij}\delta\dot{\varepsilon}^y_{ij} - \tfrac{1}{2}\dot{\varepsilon}^y_{ij}\delta\dot{\sigma}_{ij} - P_{ij}\delta\dot{\sigma}_{ij} + (\sigma_{ij} + \sigma_{0ij})\,\dot{u}_{k,i}\delta\dot{u}_{k,j} - \dot{F}_i\delta\dot{u}_i\}\,dv -$$

$$- \int_{s_\sigma} \dot{\overline{T}}_i\delta\dot{u}_i\,ds - \int_{s_u} [\dot{T}_i\delta\dot{u}_i + (\dot{u}_i - \dot{\overline{u}}_i)\,\delta\dot{T}_i]\,ds$$

Отметим, что при варьировании учитывалось $\delta P_{ij} = 0$ и симметричность σ_{ij}. Используя теорему Гаусса — Остраградского, теорему Бетти для упругой деформации и сгруппировав члены при независимых вариациях, первую вариацию представим в виде

$$\delta J = \int_V \{\delta\dot{\sigma}_{ij}[\tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})^{\cdot} - \dot{\varepsilon}^y_{ij} - P_{ij}] -$$

$$- \delta\dot{u}_k[\dot{F}_k + [\dot{\sigma}_{ij}(\delta_{ki} + u_{k,i})]_{,j} + (\sigma_{ij}\dot{u}_{k,i})_{,j} + (\sigma_{0ij}\dot{u}_{k,i})_{,j}]\}\,dv +$$

$$+ \int_S \dot{T}_i\delta\dot{u}_i\,ds - \int_{S_\sigma} \dot{\overline{T}}_i\delta\dot{u}_i\,ds - \int_{S_u} [\dot{T}_i\delta\dot{u}_i + (\dot{u}_i - \dot{\overline{u}}_i)\,\delta\dot{T}_i]\,ds$$

Из условия стационарности функционала $\delta J = 0$ получаем следующую систему уравнения Эйлера:

$$\{\tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) - \varepsilon^y_{ij} - \varepsilon^p_{ij}\}^{\cdot} = 0, \quad x \in V$$

$$\{[\sigma_{ij}(\delta_{ki} + u_{k,i})]_{,j} + (\delta_{0ij}u_{k,i})_{,j} + F_k\}^{\cdot} = 0 \tag{1.7}$$

$$\{T_i - \overline{T}_i\}^{\cdot} = 0, \quad x \in S_\sigma; \quad \{u_i - \overline{u}_i\}^{\cdot} = 0, \quad x \in S_u$$

Полученная система уравнений представляет собой систему уравнений (1.2)—(1.5), выписанную в дифференциальной форме. Таким образом, доказан следующий вариационный принцип: функции, описывающие добавочное напряженно-деформированное состояние, возникшее в предварительно напряженном теле при ползучести, придают функционалу J стационарное значение. Отметим, что величины σ_{0ij} входят в функционал (1.6) как параметры. Они находятся независимо от решения поставленной задачи из уравнений (1.1). Для интегрирования уравнений Эйлера (1.7) достаточно поставить следующие начальные условия: при $t = 0$ добавочные напряжения и перемещения должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) = \varepsilon^y_{ij}, \quad x \in V$$

$$[\sigma_{ij}(\delta_{ki} + u_{k,i})]_{,j} + (\sigma_{0ij}u_{k,i})_{,j} + F_k(0) = 0$$

$$T_i = \overline{T}_i(0), \quad x \in S_\sigma; \quad u_i = \overline{u}_i(0), \quad x \in S_u$$

Очевидно, что при этих начальных условиях система (1.7) интегрируется, причем, получаемая система отличается от исходной отсутствием фигурных скобок. Приведенный функционал также, как и функционал Сандерса, Мак-Комба, Шлехта, имеет особенности при нахождении стационарного значения, обусловленные тем, что варьируемыми величинами являются не сами исходные величины, а их скорости [3].

В случае малости перемещений и конечности начальных напряжений уравнения равновесия (1.2) видоизменяются следующим образом [2]:

$$\sigma_{kj,j} + (\sigma_{0ij}u_{k,i})_{,j} + F_k = 0, \quad x \in V$$

$$(\sigma_{ki} + \sigma_{0ij}u_{k,i})\, n_j \equiv T_k = \overline{T}_k, \quad x \in S_\sigma \tag{1.8}$$

Соответственно меняется и функционал. Он принимает вид

$$J = \int_V \{\dot{\sigma}^{1/2}_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i})^{\cdot} - \tfrac{1}{2}\dot{\varepsilon}^y_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - P_{ij}\dot{\sigma}_{ij} + \tfrac{1}{2}\sigma_{0ij}\dot{u}_{k,i}\dot{u}_{k,j} - \dot{F}_i\dot{u}_i\}\,dv -$$

$$- \int_{S_\sigma} \dot{\overline{T}}_i\dot{u}_i\,ds - \int_{S_u} \dot{T}_i(\dot{u}_i - \dot{\overline{u}}_i)\,dS \tag{1.9}$$

Из уравнений (1.8) и (1.2) видно, что учет начального напряжения видоизменяет уравнения равновесия, вводя дополнительный член. Наличие этого члена приводит к необходимости применения приближенного метода решения задачи даже при малых перемещениях.

2. Апробируем функционал (1.9) на решении следующей задачи. Рассмотрим стержень длиной l, прямоугольный в плане, толщиной $2h$, единичной ширины. Предположим, что стержень был первоначально изогнут моментами M_0, приложенными по торцам, а затем к торцам была приложена продольная нагрузка интенсивности P. При этом после приложения нагрузки P в теле развивается ползучесть, которая описывается следующими законами [2]:

$$\dot{\varepsilon} = A(\sigma + \sigma_0)^n \tag{2.1}$$

где A — размерный коэффициент, n — показатель нелинейности, принимающий нечетные значения. Определим начальное напряжение. В рамках гипотезы плоских сечений, соотношения (1.1) примут вид:

$$\partial\overline{N}/\partial x = 0,\ \partial^2\overline{M}/\partial x^2 = 0,\ x\in[0, 1],\ \overline{M} = M_0,\ \text{при}\ x=0,\ l$$

где x — продольная координата, z — поперечная координата, $\sigma_0 = 1/2\cdot\overline{N}/h + 3/2z\overline{M}/h^3$. Отсюда находим

$$\overline{M} = M_0,\quad \sigma_0 = 3/2\cdot zM_0/h^3 \tag{2.2}$$

В рамках гипотезы плоских сечений преобразуем функционал (1.9). Считая, что $\sigma = 1/2N/h + 3/2zM/h^3$, $u^* = u - z\cdot\partial w/\partial x$, где N — усилия, M — момент, u — продольное перемещение, w — прогиб, функционал (1.9) примет вид

$$\begin{aligned} J = \int_0^l \Big\{ \dot{N}\frac{\partial\dot{u}}{\partial x} - \dot{M}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2h}\dot{N}A\int_{-h}^{h}\Big(\frac{1}{2h}N + z\frac{3}{2h^3}M + \sigma_0\Big)^n dz - \\ - \frac{3}{2h^3}\dot{M}A\int_{-h}^{h} z\Big(\frac{1}{2h}N + z\frac{3}{2h^3}M + \sigma_0\Big)^n dz - M_0\frac{\partial\dot{u}}{\partial x}\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial x^2}\Big\} dx + 2hp\dot{u}\Big|_0^l \end{aligned} \tag{2.3}$$

где варьируемыми величинами являются $\dot{u}$, $\dot{w}$, $\dot{N}$, $\dot{M}$. Уравнения Эйлера функционала (2.3) будут

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial\dot{N}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(M_0\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial x^2}\Big) = 0,\quad x\in[0, l] \\ &-\frac{\partial^2\dot{M}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(M_0\frac{\partial\dot{u}}{\partial x}\Big) = 0 \\ &\frac{\partial\dot{u}}{\partial x} = \frac{1}{2h}A\int_{-h}^{h}\Big[\frac{1}{2h}N + z\frac{3}{2h^3}(M + M_0)\Big]^n dz \\ &-\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial x^2} = \frac{3}{2h}A\int_{-h}^{h} z\Big[\frac{1}{2h}N + z\frac{3}{2h^3}(M + M_0)\Big]^n dz\quad \text{при}\ x = 0, l \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\dot{N} - M_0\,\partial^2\dot{w}/\partial x^2 = -2h\dot{p},\quad \dot{M} + M_0\,\partial\dot{u}/\partial x = 0$$

при варьировании (2.3) предполагалось, что $w=0$, при $x=0$, l; это следует из условия заделки на торцах. Для интегрирования системы (2.4) по t предположим, что при $t=0$ равны нулю следующие величины: деформация $u_{,x} = 0$, $w_{,xx} = 0$, перемещение $u=0$, $w=0$, $w_{,x} = 0$, добавочный момент $M + M_0u_{,x} = 0$, а усилие $N - M_0w_{,xx} = -2hp(0)$.

С учетом этого замечания и граничных условий из первых двух уравнений системы (2.4) имеем

$$N = M_0\partial^2 w/\partial x^2 - 2hp,\quad M = -M_0\,\partial u/\partial x$$

Третье уравнение позволяет определить продольное перемещение. Из четвертого уравнения получаем соотношения для определения прогиба. В самом деле, в рамках геометрически линейной теории имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}N + z\frac{3}{2h^3}(M + M_0) = \frac{1}{2h}\Big(-2hp + M_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + \\ + z\frac{3}{2h^3}M_0\Big(-\frac{\partial u}{\partial x} + 1\Big) \approx -p + M_0\frac{1}{2h}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + z\frac{3}{2h^3}M_0 \end{aligned}$$

Тогда четвертое уравнение системы (2.4) примет вид

$$-\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial x^2} = A\frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} z\Big(-P + M_0\frac{1}{2h}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + z\frac{3}{2h^3}M_0\Big)^n dz$$

Введя обозначение $Y = 2hw_{,xx}$ с учетом малости h при $n = 3$ получим следующее уравнение для определения прогиба: $-Y = 9A(-p + M_0Y/4M^2)^2M_0/h^2$. Проинтегрировав полученное уравнение при условии, что при $t=0$, $y=0$, будем иметь.

$$Y = 9p^2M_0At\ [9/4PM_0^2At/h^4 - 1]^{-1}/h^2 \tag{2.5}$$

Таким образом прогиб будет равен

$$w = 9/4x\,(x - l)\,P^2M_0At\ [9/4PM_0^2At/h^4 - 1]^{-1}/h^3 \tag{2.6}$$

Из выражения для прогиба следует, что прогиб имеет особенность, а именно при $t = t_* = [9/4PM_0^2A/h^4]^{-1}$ прогиб стремится к бесконечности. Отметим, что при $t = t_*$ скорость прогиба Y также стремится к бесконечности. В случае отсутствия начального изгибающего момента $M_0=0$, как следует из равенства (2.5), прогиб равен нулю. Таким образом получаем, что наличие начального изгибающего момента при сжатии стержня приводит к бесконечному росту скорости прогиба.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sanders J. L., Mc. Comb H. G., Jr. Schlechte F. R.* A variational theorem for creep with applications to plates and columus, NACA, 1957, TN 4003, 23 p.

2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

3. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.

Баку

Поступила в редакцию
2.IV.1993