МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1993

УДК 539.5

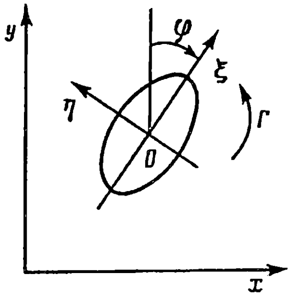
© 1993 г. В. В. КОЗЛОВ

О ПАДЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

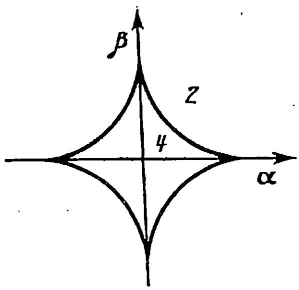
Согласно Жуковскому [1], наличие подъемной силы связано с циркуляцией жидкости вокруг тела цилиндрической формы. Применяя свою формулу для подъемной силы, Жуковский рассмотрел ряд задач о падении тяжелых твердых тел в безграничном объеме идеальной жидкости [2, 3]. В этих работах действие жидкости на твердое тело сводилось лишь к одной подъемной силе, что приводило, в частности, к нереалистическому выводу о несвязанности поступательного и вращательного движений твердого тела. Чаплыгин [4] решил более общую задачу о силах и моментах, действующих на твердое тело, двигающееся произвольным образом в бесконечном объеме идеальной жидкости. Предполагается, что жидкость совершает безвихревое движение и покоится на бесконечности. В частности, циркуляция жидкости вокруг тела постоянна. Формулы Чаплыгина позволяют записать дифференциальные уравнения движения тяжелого цилиндрического тела в идеальной жидкости с учетом ненулевой циркуляции. Однако здесь проще воспользоваться вариационным принципом Гамильтона — Остроградского, представив уравнения движения тела в форме уравнений Кирхгофа (см. [5], § 134 а). Влияние жидкости сводится к двум эффектам: появляются присоединенные массы и дополнительные гироскопические силы. В отсутствие циркуляции эта задача была рассмотрена Чаплыгиным [6]. Качественный анализ задачи Чаплыгина проведен в [7]. Оказывается, для почти всех начальных данных при $t \to \infty$ тело стремится занять такое положение, при котором его широкая сторона горизонтальна. При наличии циркуляции движение твердого тела выглядит более запутанным. В настоящей работе найдены все стационарные движения твердого тела и исследована их устойчивость. Указаны некоторые точные частные решения, аналогичные решениям Жуковского [2, 3]. В связи с исследованием устойчивости обсуждаются некоторые задачи теоретического характера.

1. Уравнения движения. Рассмотрим задачу о падении тяжелого цилиндрического твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей плоскопараллельное безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Предполагается, что образующие цилиндрического тела ортогональны плоскости потока. Согласно теореме Лагранжа, циркуляция жидкости Γ вокруг цилиндра постоянна. По существу, рассматриваемая задача является задачей плоской гидродинамики.

Положение тела определяется, очевидно, тремя параметрами. Пусть x, y — декартовы координаты некоторой точки тела O в плоскости потока жидкости (ось x горизонтальна, а ось y направлена вверх), φ — угол поворота тела (фиг. 1). В некоторой связанной с телом системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ (ось $O\zeta$ ортогональна плоскости потока) кинетическая энергия системы «тело + жидкость» имеет следующий вид: $T = (a_1u^2 + a_2v^2 + b\omega^2)/2$, где u, v — проекции скорости точки O на оси $O\xi$, $O\eta$; ω – угловая скорость тела. Постоянные коэффициенты a_1, a_2 и b включают в себя присоединенные массы и присоединенный момент инерции твердого тела. Примем, что $a_2 \geq a_1$. Поскольку угол φ отсчитывается против часовой стрелки (см. фиг. 1), то $\omega = -\varphi^{\cdot}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравнения движения тяжелого твердого тела в жидкости можно представить в виде уравнений Кирхгофа (см. [5], § 134 а и [6]):

$$
\begin{gathered}
a_1 u^{\cdot} + a_2 v\varphi^{\cdot} + \lambda v = -p\cos\varphi, \quad a_2 v^{\cdot} - a_1 u\varphi^{\cdot} - \lambda u = -p\sin\varphi \\
b\varphi^{\cdot\cdot} + (a_1 - a_2)\,uv = p\,(\xi\sin\varphi - \eta\cos\varphi)
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь p — вес системы «тело — жидкость», $-p\,(\xi\sin\varphi - \eta\cos\varphi)$ — суммарный момент веса тела и силы Архимеда относительно оси $O\zeta$, $\lambda = \rho\Gamma$, где ρ — плотность жидкости, Γ — циркуляция вокруг тела (фиг. 1). Если твердое тело однородно, то ξ, η — суть декартовы координаты его центра масс.

Перенесем слагаемые λv и $-\lambda u$ в правую часть уравнения (1.1). Тогда эти уравнения можно трактовать как классические уравнения Кирхгофа, описывающие движение твердого тела в жидкости без циркуляции, но только на тело действует дополнительная сила

$$
\mathbf{F} = (-\lambda v, \lambda u), \quad F = |\mathbf{F}| = \rho\Gamma\,|\mathbf{v}|
\tag{1.2}
$$

где $\mathbf{v} = (u, v)$ — скорость точки O. Сила $\mathbf{F}$ ортогональна скорости и ее величина определяется формулой Жуковского (1.2). Поэтому $\mathbf{F}$ можно назвать подъемной силой.

Скорость точки O в неподвижном пространстве находится из очевидных соотношений

$$
x^{\cdot} = u\sin\varphi - v\cos\varphi, \quad y^{\cdot} = u\cos\varphi + v\sin\varphi
\tag{1.3}
$$

Отметим, что при $a_1 = a_2$ система уравнений (1.1) и (1.3) интегрируется в квадратурах. Действительно, в общем случае, имеются два интеграла:

$$
H = T + p\,(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi) + py
\tag{1.4}
$$

$$
\Phi = a_1 u\sin\varphi - a_2 v\cos\varphi + \lambda y
\tag{1.5}
$$

Первый из них выражает постоянство полной энергии системы «тело + жидкость». При $a_1 = a_2$ третье уравнение системы (1.1) отделяется; оно совпадает с уравнением колебаний обычного маятника и допускает интеграл энергии. Система пяти дифференциальных уравнений относительно переменных u, v, φ, $\varphi^{\cdot}$, y замкнута. Она имеет три независимых интеграла и ее фазовый поток сохраняет обычный объем пятимерного пространства. Следовательно, эта система интегрируема согласно теории последнего множителя Эйлера — Якоби.

В дальнейшем предполагается, что $a_2 > a_1$, $p \neq 0$ и $\lambda \neq 0$. Случай $\lambda = 0$ рассмотрен в [6, 7].

2. Стационарные движения и их устойчивость. Найдем движения твердого тела, при которых переменные u, v, φ принимают постоянные значения. Из первых двух уравнений системы (1.1) получаем равенства

$$
\lambda v = -p\cos\varphi, \quad \lambda u = p\sin\varphi
\tag{2.1}
$$

С учетом (1.3) заключаем, что при этом тело ларит горизонтально со скоростью $x^\cdot = p/\lambda$. Если циркуляция жидкости происходит против часовой стрелки, то тело движется вправо. Из третьего уравнения системы (1.1) и соотношений (2.1) получаем уравнение для определения ориентации твердого тела

$$g(\varphi) = \alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$\alpha = -\xi\lambda^2/[p(a_2 - a_1)], \quad \beta = \eta\lambda^2/[p(a_2 - a_1)] \tag{2.2}$$

Поскольку среднее 2π-периодической функции g равно нулю, то в интервале $[0, 2\pi)$ она всегда имеет по крайней мере два различных корня. В типичной ситуации, когда все корни простые, их обязательно четное число. Значения параметров α, β, при которых появляются кратные корни, связаны зависимостью $\alpha^{2/3} + \beta^{2/3} = 1$. Если точка (α, β) лежит вне этой кривой, то в промежутке $[0, 2\pi)$ уравнение (2.2) имеет два различных корня, если же внутри, то имеется четыре корня (см. фиг. 2).

Отметим, что стационарные движения твердого тела можно определить по-другому: это в точности критические точки полной энергии (1.4) при постоянном значении интеграла (1.5). Для их отыскания воспользуемся методом множителей Лагранжа. Рассмотрим функцию $f = H - \mu\Phi$. Уравнение $\partial f/\partial y = 0$ дает значение множителя Лагранжа $\mu = p/\lambda$. Приравнивая нулю производную функции f по остальным переменным u, v, $\varphi^\cdot$, φ, получим условия равновесия (2.1) и (2.2), а также тривиальное соотношение $\varphi^\cdot = 0$.

Для решения задачи об устойчивости найденных стационарных движений вычислим характеристические числа линеаризованной системы (1.1). Они удовлетворяют биквадратному уравнению

$$\mu^4 + A\mu^2 + B = 0, \quad B = \frac{(a_2 - a_1)p^2}{a_1 a_2 b} g'(\varphi) \tag{2.3}$$

Производная функции g вычисляется в ее нуле.

Пусть $g' < 0$. Тогда $B < 0$ и, следовательно, характеристическое уравнение (2.3) имеет положительный корень. В этом случае стационарное движение неустойчиво.

Покажем, что при $g' > 0$ имеет место устойчивость. Для доказательства воспользуемся методом Рауса. Рассмотрим интеграл уравнений (1.1) $F = H - (p/\lambda)\Phi$. Эту функцию можно представить в следующем виде

$$F = \frac{a_1}{2}\left(u - \frac{p}{\lambda}\sin\varphi\right)^2 + \frac{a_2}{2}\left(v + \frac{p}{\lambda}\cos\varphi\right)^2 + \frac{b}{2}\varphi^{\cdot 2} + \frac{p^2(a_2 - a_1)}{\lambda^2} g_*$$

где $g_*(\varphi)$ — первообразная функции $g(\varphi)$. Если $g_*'' = g' > 0$, то функция F имеет строгий локальный минимум на стационарном движении (2.1), (2.2). Что и требовалось доказать.

Простые нули функции g, в которых значения производной g' отличаются знаками, перемежаются между собой. Отсюда вытекает любопытный закон смены устойчивости стационарных движений: перемежаются значения угла φ, отвечающие устойчивым и неустойчивым движениям. В частности, при фиксированных значениях физических параметров ровно половина стационарных движений твердого тела устойчива.

В качестве простого примера рассмотрим частный случай, когда $\xi = \eta = 0$ (например, тело имеет две плоскости симметрии, ортогональные плоскости потока жидкости). Здесь $g = (\sin 2\varphi)/2$. Стационарные значения $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ ($\varphi = \pi/2$, $\varphi = 3\pi/2$) соответствуют устойчивым (неустойчивым) движениям. Следовательно, стационарное движение широкой (узкой) стороной вперед устойчиво (неустойчиво).

3. Частные решения. Рассмотрим случай, когда $\xi = \eta = 0$. Будем искать решение уравнений (1.1) в виде $u = 0$, $\varphi = \omega t$ ($\omega = \mathrm{const}$). Третье уравнение выполняется автоматически, а из первого получаем соотношение $v = -(p\cos\omega t)/(\lambda + a_2\omega)$. Подставляя эту формулу во второе уравнение, находим, что $\omega = -\lambda/2a_2$. В итоге формулы (1.3) принимают следующий окончательный вид:

$$x^{\bullet} = \frac{2p}{\lambda}\cos^2\frac{\lambda}{2a_2}t, \quad y^{\bullet} = \frac{2p}{\lambda}\sin\frac{\lambda}{2a_2}t\cos\frac{\lambda}{2a_2}t$$

Таким образом, точка O движется по циклоиде, находясь в среднем на одной высоте.

4. Некоторые обобщения. Заменим в третьем уравнении системы (1.1) переменные u, v их «стационарными» значениями (2.1). В результате получим одно уравнение второго порядка

$$\varphi^{\bullet\bullet} = -\partial V/\partial\varphi, \quad V = p^2(a_2 - a_1)g_*/(b\lambda^2)$$

где g_* — первообразная функции g; она, разумеется, 2π-периодична. Критическим точкам функции V отвечают стационарные движения твердого тела, причем свойство их устойчивости зависит от наличия минимума функции V. Это наблюдение, оказывается, не случайным; оно допускает некоторые обобщения.

Итак, рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x^{\bullet} = f(x, \varphi^{\bullet}, \varphi), \quad \varphi^{\bullet\bullet} = g(x, \varphi); \quad x \in \mathrm{R}^n, \ \varphi \in \mathrm{R} \tag{4.1}$$

Стационарные движения находятся из следующей алгебраической системы

$$f(x, 0, \varphi) = 0, \quad g(x, \varphi) = 0 \tag{4.2}$$

Предполагая, что в стационарной точке матрица Якоби $A = \partial f/\partial x$ невырождена, из первого уравнения системы (4.2) можно (по крайней мере локально) выразить x через φ: $x = h(\varphi)$.

Рассмотрим функцию $G(\varphi) = g(h(\varphi), \varphi)$ и вспомогательное уравнение второго порядка $\varphi^{\bullet\bullet} = G(\varphi)$. Нули функции G дают как раз стационарные значения переменной φ.

Теорема. Пусть φ_* — простой нуль функции G и $G'(\varphi_*) > 0$. Если $|-A| > 0$, то положение равновесия системы (1.1) $\varphi = \varphi_*$, $x = h(\varphi_*)$ неустойчиво.

В нашей задаче $n = 2$ и матрица A имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & -\lambda/a_1 \\ \lambda/a_2 & 0 \end{Vmatrix}$$

Следовательно, $|-A| = \lambda^2/(a_1a_2) > 0$. Поэтому теорема позволяет указать достаточное условие неустойчивости стационарного движения (см. п. 2).

Доказательство. Вычислим производную функции G в точке φ_*:

$$G' = \frac{\partial g}{\partial\varphi} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dh}{d\varphi} \tag{4.3}$$

Поскольку $f(h(\varphi), 0, \varphi) \equiv 0$, то

$$A\,dh/d\varphi + \partial f/\partial\varphi = 0 \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4) получаем $G' = \partial g/\partial\varphi - (\partial g/\partial x, A^{-1}\partial f/\partial x)$. Производные $\partial f/\partial\varphi^{\bullet}$, $\partial f/\partial\varphi$, $\partial g/\partial x$ и $\partial g/\partial\varphi$, вычисленные в стационарной точке, обозначим a, b, c и e соответственно. Ясно, что a, b, c — векторы из R^n, а e — вещественное число. С учетом этих обозначений получаем искомую формулу

$$G'(\varphi_*) \doteq e - (c, A^{-1}b) \tag{4.5}$$

Полагая $x = h(\varphi_*) + X$, $\varphi^\bullet = \Psi$, $\varphi = \varphi_* + \Phi$, выполним линеаризацию системы (4.1):

$$X^\bullet = AX + a\Psi + b\Phi, \quad \Phi^\bullet = \Psi, \quad \Psi^\bullet = cX + e\Phi$$

Характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\chi(\mu) = \begin{vmatrix} A - \mu E & b & a \\ 0 & -\mu & 1 \\ c^T & e & -\mu \end{vmatrix} = 0$$

Поскольку $\chi(\mu) = (-1)^{n+2}\mu^{n+2} + \ldots + \alpha = 0$, то положение равновесия заведомо неустойчиво, если $(-1)^n\alpha < 0$. Используя формулу Крамера, можно получить $\alpha = -|A|\{e - (c, A^{-1}b)\}$.

Воспользуемся формулой (4.5); тогда $(-1)^n\alpha = -|-A|\,G'(\varphi_*)$. Поскольку $|-A| > 0$, то $(-1)^n\alpha < 0$, если $G'(\varphi_*) > 0$. Что и требовалось доказать.

Не следует думать, что при $G'(\varphi_*) < 0$ положение равновесия будет устойчивым. Это показывает следующий контрпример: $x^\bullet = x/a - \varphi$, $\varphi^{\bullet\bullet} = \varphi + x$. По критерию Гурвица, равновесие $x = \varphi = 0$ всегда неустойчиво. Однако $G' = 1 + a < 0$ при $a < -1$. Теорема дает достаточное условие неустойчивости: $1 + a > 0$ и $a < 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуковский Н. Е.* О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси. Статья первая//Полн. собр. соч. М.— Л.: Глав. ред. авиац. лит., 1937. Т. 5. С. 72—80.
2. *Жуковский Н. Е.* О парении птиц//Полн. собр. соч. М.— Л.: Глав. ред. авиац. лит., 1937. Т. 5. С. 7—35.
3. *Жуковский Н. Е.* О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси. Статья вторая//Полн. собр. соч. М.— Л.: Глав. ред. авиац. лит., 1937. Т. 5. С. 100—115.
4. *Чаплыгин С. А.* О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло// Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 3. С. 3—64.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
6. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости//Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 133—150.
7. *Козлов В.В.* О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 10—17.

Москва

Поступила в редакцию
12.XII.1991